Aula 1

Conceitos básicos da teoria de erros

I. Medidas e incertezas

II. Propagação de erros

Medidas e Incertezas

Medir é um procedimento experimental em que o valor de uma grandeza é determinado em termos do valor de uma unidade definida através de um padrão.

Uma medição começa com a especificação apropriada do mensurando e do procedimento de medição.

Como todo processo de medição é imperfeito, resulta que toda medida tem uma incerteza associada que procura expressar a nossa ignorância (no bom sentido) do valor medido.

Sendo assim, uma medida deve conter as seguintes informações:

1. **o valor da grandeza**
2. **a incerteza da medição**
3. **a unidade**

Medidas e Incertezas

→ Sistemas de unidades

- MKS

Sistema metro-kilograma-segundo (MKS) que, mais tarde, deu origem ao Sistema Internacional de Unidades (SI) que é o sistema de unidades de físicas medidas mais utilizado na atualidade;

- CGS

É um sistema de unidades de medidas físicas, ou sistema dimensional, de tipologia LMT (comprimento, massa tempo), cujas unidades-base são o centímetro para o comprimento, o grama para a massa e o segundo para o tempo;

Medidas e Incertezas

→ Sistema internacional de unidades (SI)

Grandeza	Unidade	Símbolo
Comprimento	metro	m
Massa	quilograma	kg
Tempo	segundo	s
Corrente elétrica	ampère	A
Temperatura	kelvin	K
Intensidade luminosa	candela	cd
Quantidade de matéria	mol	mol

Tabela 2. Grandezas e unidades fundamentais do SI

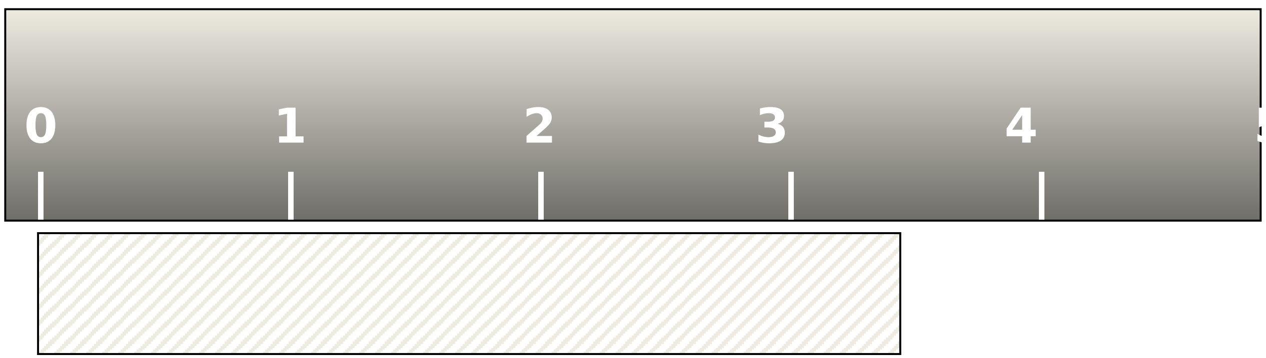
→ Notação científica

Ordem de grandeza	Prefixo	Abreviatura
10^{-12}	pico	p
10^{-9}	nano	n
10^{-6}	micro	µ
10^{-3}	mili	m
10^{-2}	centi	cm
10^{-1}	deci	d
10^{1}	deca	da
10^{2}	hecto	h
10^{3}	quilo	k
10^{6}	mega	M
10^{9}	giga	G
10^{12}	tera	T

Tabela 1. Potências de dez e prefixos

→ Algarismos significativos

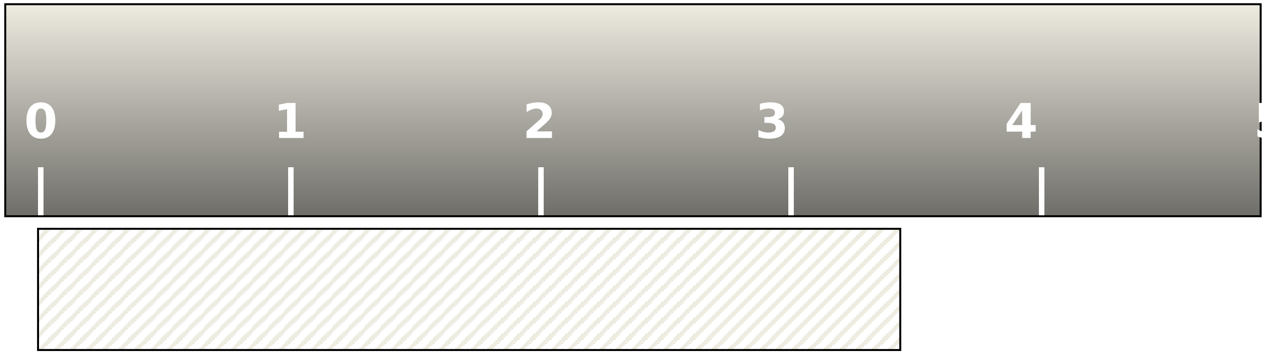
Exemplo ilustrativo: medindo o comprimento de uma barra com uma régua graduada em **centímetros**



- O comprimento da barra está certamente entre 3 cm e 4 cm;

→ Algarismos significativos

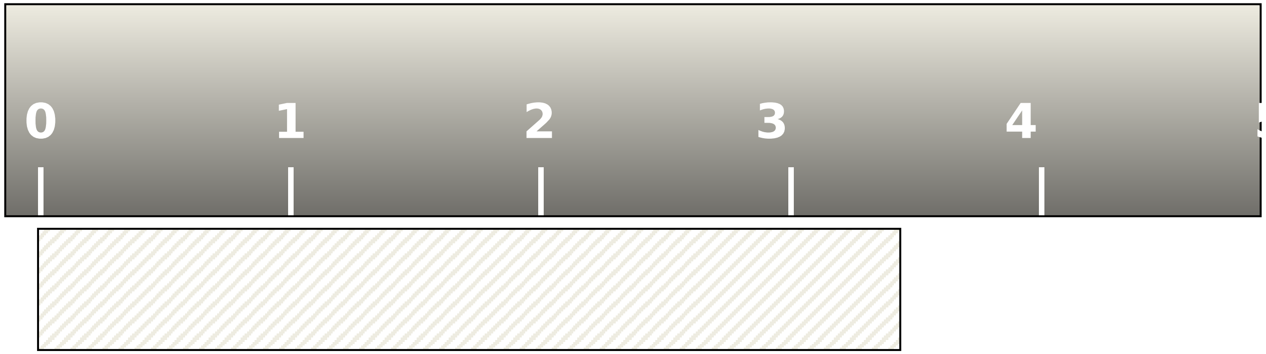
Exemplo ilustrativo: medindo o comprimento de uma barra com uma régua graduada em **centímetros**



- O comprimento da barra está certamente entre 3 cm e 4 cm;
- Qual seria o algarismo que viria depois do 3?

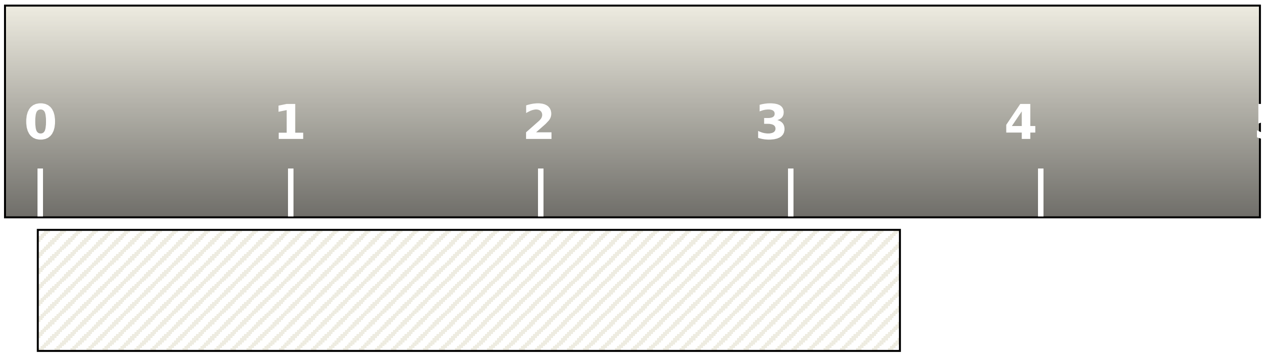
→ Algarismos significativos

Exemplo ilustrativo: medindo o comprimento de uma barra com uma régua graduada em **centímetros**



- O comprimento da barra está certamente entre 3cm e 4cm;
- Qual seria o algarismo que viria depois do 3?
- Leitura possível: L=3,3cm (ou 3,4 cm ou, ainda, 3,6 cm).

→ Algarismos significativos

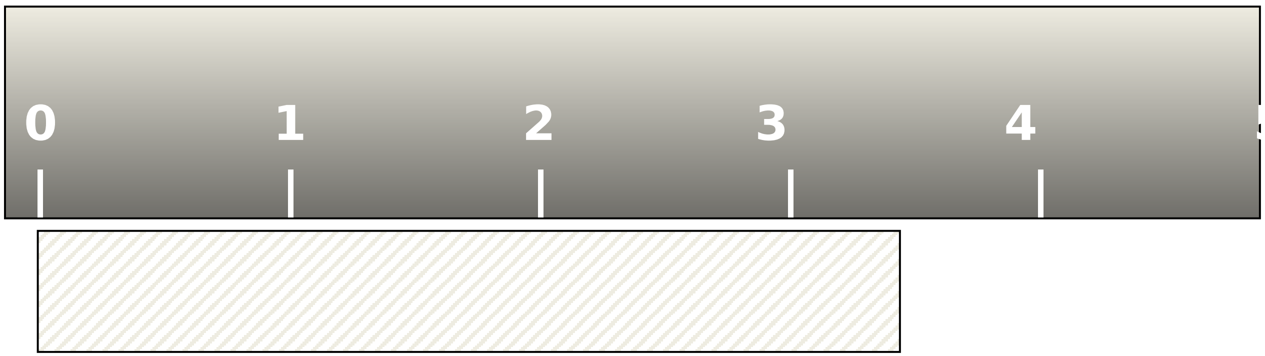


algarismo duvidoso

L = 3,3 cm

algarismos significativos

→ Algarismos significativos



algarismo duvidoso

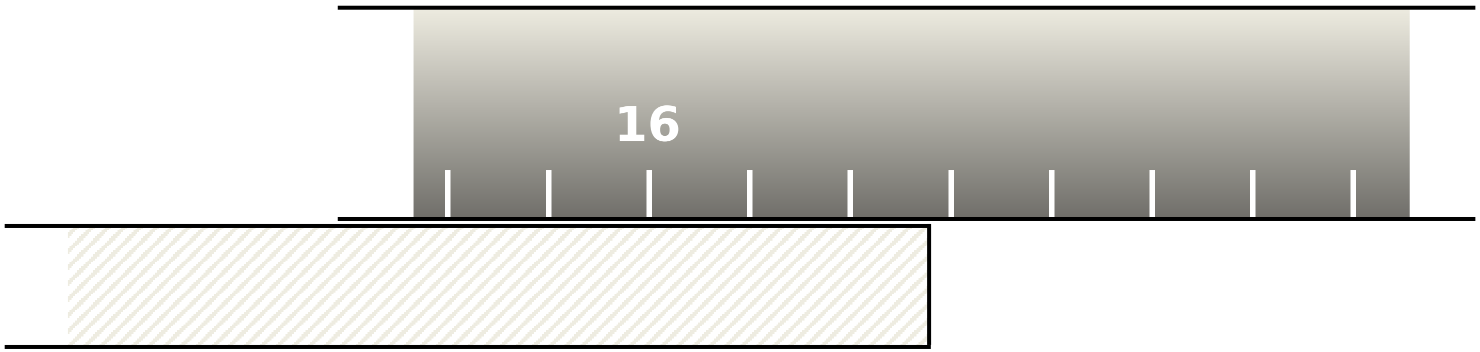
L = 3,3 cm

algarismos significativos

- Regra geral: Os algarismos significativos de uma medida são todos os algarismos lidos com certeza mais o primeiro algarismo duvidoso;

→ Algarismos significativos

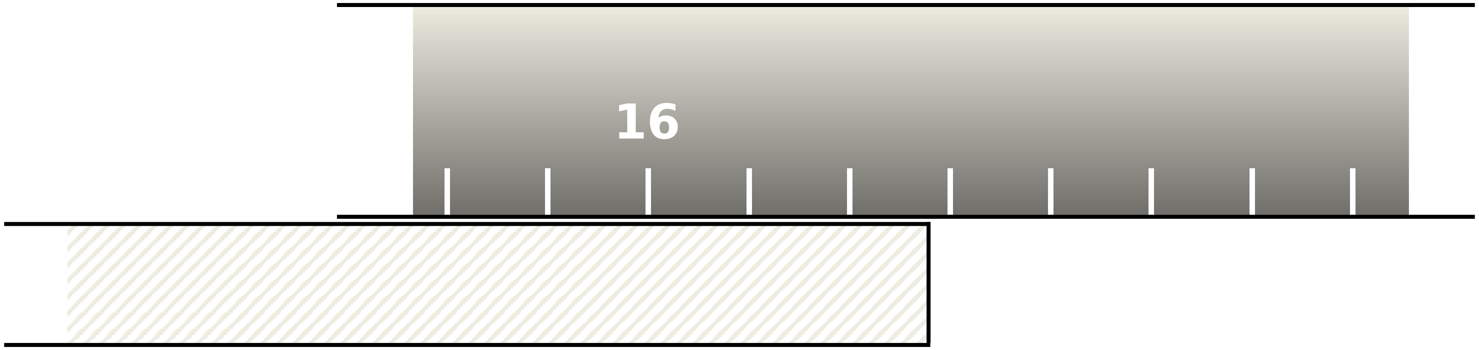
Mais um exemplo ilustrativo: medindo o comprimento de uma barra com uma régua graduada em **milímetros**



- Leitura possível: L=16,28cm;

→ Algarismos significativos

Mais um exemplo ilustrativo: medindo o comprimento de uma barra com uma régua graduada em **milímetros**



- Leitura possível: L=16,28cm;

- Na referida medida todos os algarismos são significativos;
- O algarismo 8 foi avaliado, porém, sendo ele o primeiro algarismo duvidoso, ele também é significativo;

→ Algarismos significativos

Exercício de fixação

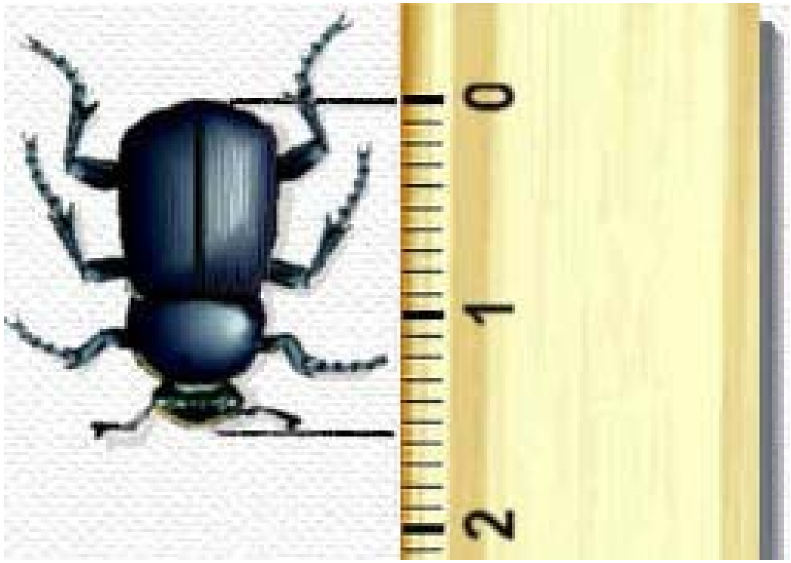


Figura 1. Medindo o tamanho de um besouro.

Qual das alternativas abaixo melhor representa a medida do tamanho do besouro?

a) Entre 0 e 1 cm
b) Entre 1 e 2 cm
c) Entre 1,5 e 1,6 cm
d) Entre 1,54 e 1,56 cm
e) Entre 1,546 e 1,547 cm

→ Algarismos significativos

(Regras básicas)

- Constantes numéricas

- São fatores como π = 3,141592...; e = 2,71828...; log2 = 0,3010299...; $\sqrt{2}$ = 1,4142...; etc., que eventualmente podem aparecer nas fórmulas. Por exemplo, o período de um pêndulo simples é dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$$

- Estes números são tidos como exatos, pois são sempre conhecidos com maior precisão do que podemos medir as grandezas físicas. **Nos cálculos, estas constantes numéricas devem ser tomadas com um algarismo significativo a mais do que o fator com o menor número de algarismos significativos;**

→ Algarismos significativos

(Regras básicas)

- Constantes físicas

- São grandezas que constam em tabelas de constantes físicas;
- **Exemplos**: **$c = 2{,}99792 \times 10^{8}$ m/s** **(velocidade da luz no vácuo)**

  $h = 6{,}62607 \times 10^{-34}$ J.s **(constante de Planck)**

- Estas constantes foram obtidas a partir de medidas e, embora a precisão com a qual as mesmas sejam conhecidas seja limitada (em geral, seis a sete casas decimais), esta precisão é muito maior do que aquela com a qual em geral efetuamos as nossas medidas. Nos cálculos, estas constantes físicas devem ser tomadas com um algarismo significativo a mais do que o fator com o menor número de algarismos significativos;

→ Algarismos significativos
(Regras básicas)

- Ao efetuar qualquer operação matemática com grandezas expressas com diferentes números de algarismos significativos, é necessário exprimir o resultado segundo a norma de que o número obtido pode ter apenas <u>um algarismo duvidoso</u>;

- Assim sendo, é preciso arredondar o resultado obtido no primeiro algarismo duvidoso;

Medidas e Incertezas

→ Algarismos significativos

(Regras básicas)

- Critérios de arredondamento:

1. Se numa quantidade os algarismos que vierem após o primeiro algarismo duvidoso formarem números **superiores** a 5, 50, 500, 5000, etc., aumenta-se uma unidade o primeiro algarismo duvidoso e desprezam-se os demais;

Exemplos:

787,672 cm³ → 787,7 cm³

24,9287 g → 24,93 g

0,002619 A → 0,00262 A

Medidas e Incertezas

→ Algarismos significativos

(Regras básicas)

- Critérios de arredondamento:

2. Se os algarismos a serem desprezados numa quantidade formarem números **inferiores** a 5, 50, 500, 5000, etc., os algarismos significativos que restam não se modificam;

Exemplos:

$76\bar{1}$,05 mmHg → 761 mmHg

0,$\bar{0}$931 cal/g.K → 0,09 cal/g.K

6,$\bar{9}$305 dyn/cm² → 6,9 dyn/cm²

Medidas e Incertezas

→ Algarismos significativos

(Regras básicas)

- Critérios de arredondamento:

3. Se os algarismos a serem desprezados numa quantidade formarem números **iguais** a 5, 50, 500, etc., faz-se com que o algarismo duvidoso fique par (caso o algarismo que fica seja ímpar, soma-se a ele uma unidade para torná-lo par);

Exemplos:

2,78500 s → 2,78 s

0,0755 A → 0,076 A

539,50 cal/g A → 540 cal/g

→ Algarismos significativos

- Os zeros à esquerda do número não são significativos. Exemplos:

1. **a medida 0,0023cm tem somente dois algarismos significativos,**
2. **a medida 0,348s tem apenas três algarismos significativos, e**
3. **a medida 0,0040000m tem cinco algarismos significativos.**

- Alguns autores não utilizam esta definição de algarismos significativos. No entanto, optou-se por ela por ser a definição adotada pela maioria dos autores consultados;

→ Algarismos significativos

(Definição e resumo das regras básicas)

- Algarismos significativos representam o número de algarismos que compõe o valor de uma grandeza, excluindo eventuais zeros à esquerda;

- Zeros à direita são significativos;

- O algarismo significativo mais à direita é denominado algarismo significativo duvidoso e é sobre ele que em geral reside a nossa incerteza;

→ Operações com algarismos significativos

(Adição)

- O resultado da adição de várias grandezas expressas com diferentes números de algarismos significativos é obtido, após efetuar a operação, arredondando-se a soma na casa decimal correspondente ao fator com o menor número de casas decimais;

Exemplos:

27,8 m + 1,326 m + 0,66 m = 29,786 m → 29,8 m;

11,45 s + 93,1 s +0,333 s = 104,883 s → 104,9 s;

→ Operações com algarismos significativos

(Subtração)

• A subtração é um caso particular da adição e, portanto, neste caso adota-se o mesmo critério apresentado no item anterior;

Exemplos:

18,2476 m - 16,72 m = 1,5276 m = → 1,53 m;

127,36 g – 68,297 g = 59,063 g → 59,06 g;

→ Operações com algarismos significativos

(Multiplicação)

- O produto de duas ou mais grandezas expressas com diferentes números de algarismos significativos deve possuir, em geral, o mesmo número de algarismos significativos da grandeza com o menor número de algarismos significativos;

Exemplos:

3,27251 cm x 1,32 cm = 4,3197132 cm² → 4,32 cm²;

0,452 A x 2671 Ω = 1207,292 V → 1,21 x 10³ V;

→ Operações com algarismos significativos (Divisão)

- A divisão é simplesmente um caso particular da multiplicação e, portanto, neste caso aplica-se a regra anterior;

Exemplos:

$$\frac{\mathbf{63,72\ cm}}{\mathbf{23,1\ s}} = 2,758441558\ \text{cm/s} = 2,76\ \text{cm/s};$$

$$\frac{\mathbf{0,451\ V}}{\mathbf{2001\Omega}} = 0,0002253873\ \text{A} = 2,25 \times 10^{-4}\ \text{A};$$

→ Operações com algarismos significativos

(Radiciação, potenciação, logaritmação, etc.)

- Nas demais operações, efetua-se a operação e <u>mantém-se o número de algarismos significativos da grandeza operada</u>;

- Em operações de uma medida direta ou indireta envolvendo constantes matemáticas (ou físicas), deve-se manter o número de <u>algarismos significativos da medida</u>;

- O critério utilizado para as operações de multiplicação e divisão foi adotado por simplicidade, havendo casos, na multiplicação, que podem aumentar em um o número de algarismos significativos do produto; na divisão, poderá ocorrer o contrário;

→ Operações com algarismos significativos

Exercícios de fixação

Efetue as operações abaixo e represente o resultado final com o número adequado de algarismos significativos:

a) $\sqrt[3]{29,69\,m^3} =$

b) $(8,75\ m/s)^2 =$

c) log 62,874 =

d) sen 27° =

→ Operações com algarismos significativos

Exercícios de fixação

Efetue as operações abaixo e represente o resultado final com o número adequado de algarismos significativos:

a) $\sqrt[3]{29,69\,m^3} =$ 3,096492738 m

b) (8,75 m/s)^2 = 76,5625 m^2/s^2

c) log 62,874 = 1,798471091

d) sen 27° = 0,453990499

→ Operações com algarismos significativos

Exercícios de fixação

Efetue as operações abaixo e represente o resultado final com o número adequado de algarismos significativos:

a) $\sqrt[3]{29,69\,m^3} =$ 3,096492738 = 3,096 m

b) $(8,75\ m/s)^2 =$ 76,5625 = $76,6\ m^2/s^2$

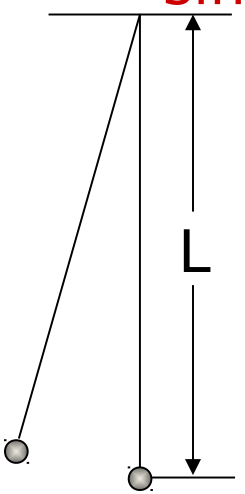
c) log 62,874 = 1,798471091 = 1,7985

d) sen 27° = 0,453990499 = 0,45

Medidas e Incertezas

→ Operações com algarismos significativos

Exemplo ilustrativo: determinação da aceleração da gravidade através da utilização de um pêndulo simples



$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$$

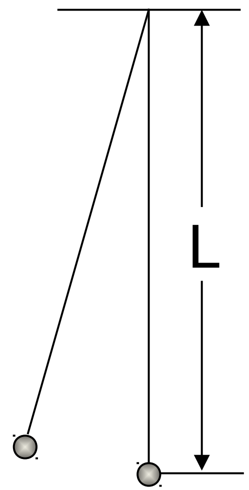
Supondo que foram feitas as seguintes medidas:
Período: T = 1,72 s
Comprimento do fio: L = 73,45 cm

E efetuando-se as operações algébricas, encontra-se:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

g = 980,1547367 cm/s^2 → Quantos desses algarismos são realmente significativos?

→ Operações com algarismos significativos



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$$

Período: T = 1,72 s

Comprimento do fio: L = 73,45 cm

$$T^2 = (1,72)^2 = 2,9\bar{5}84\, s^2$$

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} = \frac{4\pi^2 \times 73,4\bar{5}\, cm}{2,9\bar{5}84\, s^2} = 98\bar{0},1547367$$

$$g = 980\, cm/s^2$$

↳ Conclui-se, portanto, que o número correto de algarismos significativos para o valor da aceleração da gravidade neste caso é três.

→ Transformação de unidades

- Ao realizar uma transformação de unidades para uma determinada grandeza física, <u>o resultado final deve possuir o mesmo número de algarismos significativos da expressão original</u>;

- Caso seja conveniente é possível utilizar potências de dez para expressar o resultado final;

<u>Exemplo</u>:

P = 675 lb = (675 x 4,448) N = 3002,4 N (1 lb = 4,448 N)
e, finalmente:

P = 3002,4 N → 3,00 x 10^3 N (três algarismos significativos)

Incerteza

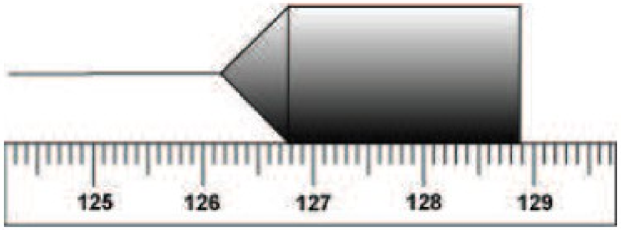
Medidas e Incertezas

Como expressar o resultado de uma medida?

Veja o seguinte exemplo:

A leitura da régua mostra 128,9 cm.
Podemos associar uma incerteza de 0.05 cm a esta medida.

Sendo assim, devemos escrever



$$L = 128{,}90 \pm 0{,}05 \text{ cm}$$

Especifica o intervalo em que se tem confiança de ser onde a quantidade se encontra, entre 128,85 e 128,95.

Especifica o valor mais plausível da medida.

Em geral:

$$\boxed{\text{Valor medido de x} = x_{médio} \pm \delta x}$$

Algarismos significativos da Incerteza

Como δx é só uma estimativa da incerteza, não faz sentido expressá-lo com muita precisão.

Exemplo
É um ABSURDO expressar a medida da aceleração da gravidade como $g = 9{,}82 \pm 0{,}02385$ m.s^{-2} .

Mesmo em trabalhos de altíssima precisão, utilizam-se no máximo DOIS algarismos significativos para expressar a incerteza de uma medida.

No nosso caso, vamos trabalhar com apenas 1 algarismo significativo na incerteza, o que resulta em

$$g = 9{,}82 \pm 0{,}02 \text{ m.s}^{-2} .$$

Algarismos significativos da Incerteza

Outro exemplo:
A velocidade medida de um foguete é 6050,78 $m.s^{-2}$.

Como expressar essa medida se a incerteza for

- $\pm$ 30 ?

- $\pm$ 3 ?

- $\pm$ 0,3 ?

Algarismos significativos da Incerteza

Outro exemplo:

A velocidade medida de um foguete é 6050,78 $m.s^{-2}$.

Como expressar essa medida se a incerteza for

- $\pm$ 30 ? $\boxed{6050 \pm 30}$

  Faixa de confiança entre 6020 e 6080 $m.s^{-2}$

- $\pm$ 3 ? $\boxed{6051 \pm 3}$

  Faixa de confiança entre 6048 e 6054 $m.s^{-2}$

- $\pm$ 0,3 ? $\boxed{6050,8 \pm 0,3}$

  Faixa de confiança entre 6050,5 e 6051,1 $m.s^{-2}$

Medidas e Incertezas

Regras práticas para apresentação de resultados

- Para expressar a incerteza, use apenas 1 algarismo significativo, conforme discutido anteriormente;

- O último algarismo significativo do valor medido deve ser da mesma ordem de grandeza (mesma casa decimal) que a incerteza;

- A notação científica pode ser usada para se evitar ambiguidades. Neste caso, deve-se usar a mesma potência de dez tanto para o valor da grandeza quanto para sua incerteza.

NOTAÇÃO ERRADA	NOTAÇÃO CORRETA
$5{,}30 \pm 0{,}0572$	$5{,}30 \pm 0{,}06$
$124{,}5 \pm 10$	120 ± 10
$0{,}00002002 \pm 0{,}0000005$	$(200 \pm 5)X10^{-7}$
$(45 \pm 2{,}6)X10^{1}$	$(45 \pm 3)X10^{1}$

Conceitos básicos

Erro

Todo processo de medição tem imperfeições que dão origem a um erro em seu resultado.

O erro é definido como a diferença entre o valor medido e o valor verdadeiro (em geral, não acessível) do mensurando.

Teoria de erros
Conceitos básicos

Tipos de erros

Podem ser basicamente de dois tipos: **aleatório** e **sistemático**:

- **Erro aleatório**
  - Origem: variações imprevisíveis no processo de medida. Não pode ser compensado, mas pode ser reduzido, aumentando-se o número de observações ou repetições da mesma medida.
- **Erro sistemático**
  - Origem: má calibração do instrumento ou de um erro de medida repetitivo. Não pode ser eliminado, mas pode ser reduzido ou corrigido. Ex: uma balança mal aferida que apresenta sempre uma leitura 50 g maior do que o valor real do objeto medido.

Teoria de erros

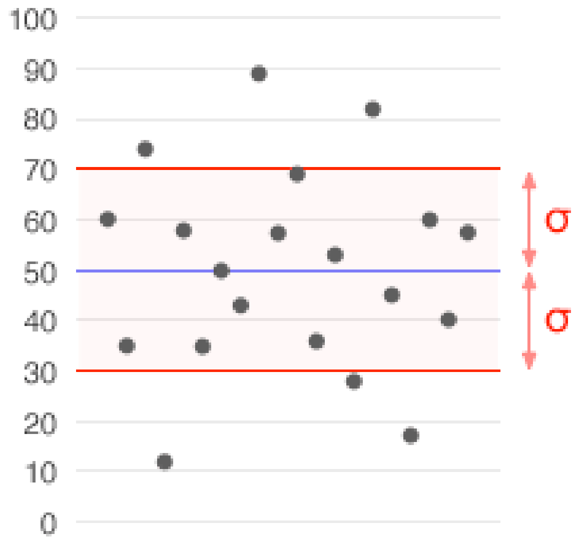
Conceitos básicos

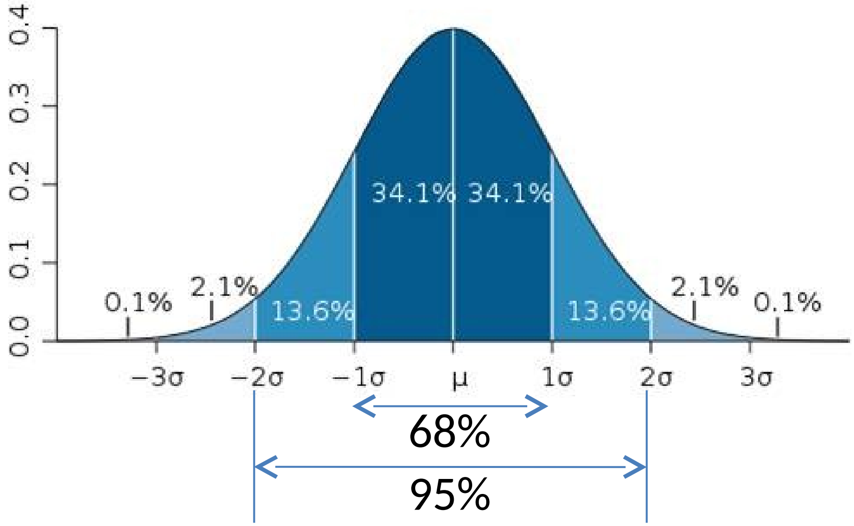
Incerteza

Parâmetro associado ao resultado de uma medição que caracteriza a <u>dispersão dos valores</u> que podem ser atribuídos ao mensurando. A incerteza reflete o desconhecimento do valor exato do mensurando.

Esse parâmetro pode ser um **desvio padrão** (ou um múltiplo dele) ou a **metade do intervalo de uma escala**.

Uma incerteza corresponde a um dado **nível de confiança**, ou seja, a probabilidade de encontrar o valor num determinado intervalo.





Teoria de erros

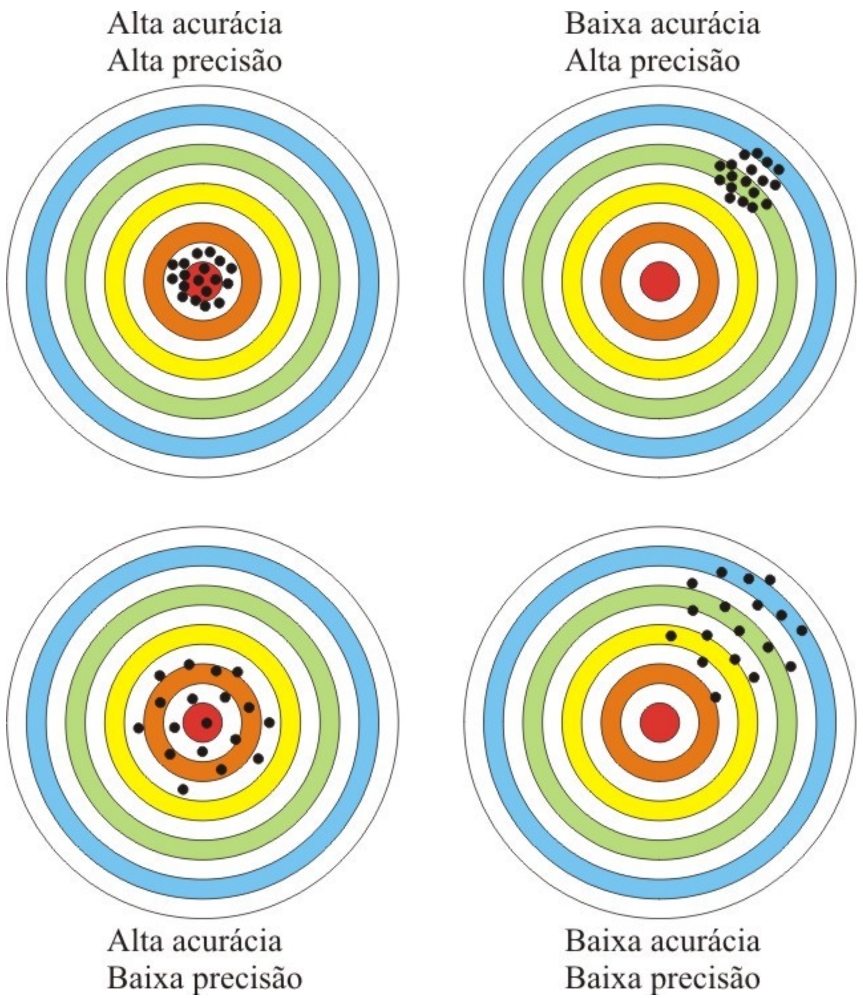
Conceitos básicos

Precisão

Medida de <u>quão bem o valor de uma medida foi determinado</u>, sem considerar se este está próximo ou não do valor real.
Também é uma medida da <u>reprodutibilidade</u> do resultado de um experimento.

Acurácia ou **exatidão**

Medida de <u>quão próximo o valor medido está do valor verdadeiro</u> da grandeza.



Como estimar incertezas

A incerteza pode ser de dois tipos, segundo o método utilizado para estimar o seu valor:

Avaliação tipo A

A incerteza é avaliada por meio de uma análise estatística de uma série de medidas.

Avaliação tipo B

A incerteza é avaliada por meio de métodos não estatísticos quando não se dispõe de observações repetidas.

Cálculo de incertezas

Avaliação tipo B

Caso em que o número de medições realizadas não é suficiente para uma análise estatística ou não é prático ou não é possível fazer esse tipo de análise.

Dependente do bom senso do operador que deve utilizar de outras fontes de informação para estimar a incerteza, tais como:

- Dados de medições anteriores
- Conhecimento sobre o instrumento utilizado
- Especificações do fabricante
- Dados de calibração

Exemplos:

- Metade da menor divisão de um instrumento
- Faixa de oscilação do ponteiro de um medidor analógico
- Faixa de variação do último algarismo de um medidor digital

Cálculo de incertezas

Avaliação tipo A

Quando efetuamos várias medidas de uma mesma grandeza e obtemos valores diferentes, a incerteza da medida certamente é MAIOR do que a menor divisão do aparelho de medição.

Exemplo:

Tempo de queda livre de uma bolinha de tênis, lançada a uma altura de $h = 2{,}00 \pm 0{,}05\ m$, medido com o cronômetro.

Medida	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
t (s)	0,63	0,61	0,67	0,66	0,61	0,68	0,59	0,63	0,58	0,61

Precisamos de um tratamento estatístico nesses casos!

Cálculo de incertezas

Definições

- Estimativa do valor correto da grandeza medida ou Valor Médio

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

- Estimativa do Desvio Padrão de cada medida

$$\Delta x = \sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} \left(x_i - \bar{x} \right)^2}$$

- Incerteza da média (de medidas independentes permitindo estatística)

$$\Delta \bar{x} = \sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Cálculo de incertezas

De volta ao exemplo...

Medida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t (s)	0,63	0,61	0,67	0,66	0,61	0,68	0,59	0,63	0,58	0,61

Valor médio $$t_m = \frac{1}{N} \sum t_i \quad = 0{,}627\, s$$

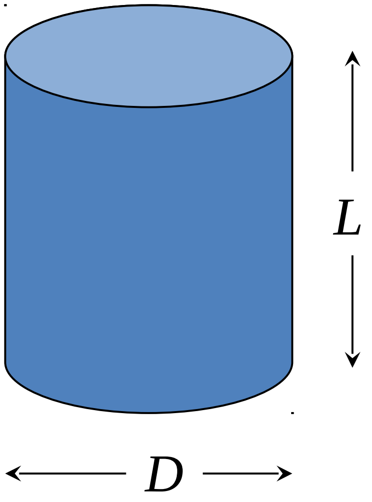
Incerteza da média $$\sigma_m = \sqrt{\frac{\sum (t_i - t_m)^2}{N(N-1)}} \quad = 0{,}010651\, s$$

Apresentação do Resultado: $$t = t_m \pm \sigma_m \quad = (0{,}63 \pm 0{,}01)\, s$$

Propagação de erros

Como determinar a incerteza de uma grandeza que é obtida por meio de um cálculo usando medidas diretas?

Exemplo: Vamos considerar um cilindro de diâmetro da base D e altura L.



Medindo D e L, o volume do cilindro será estimado por:

$$V = \pi \frac{D^2}{4} L$$

Aí vem a seguinte questão:

Qual a incerteza envolvida nessa determinação indireta do volume?

O diâmetro e a altura são determinados experimentalmente e, consequentemente essas grandezas possuem incertezas associadas a sua determinação:

$$D = \bar{D} \pm \sigma_D, \qquad L = \bar{L} \pm \sigma_L$$

Propagação de erros

Vamos considerar um caso concreto

$$D = 5,00 \pm 0,05 \text{ cm} \qquad L = 12,50 \pm 0,05 \text{ cm}$$

Considerando a expressão para a determinação do volume

$$V = \pi \frac{D^2}{4} L \quad = \pi \frac{\left(5,00 \pm 0,05\right)^2}{4} \left(12,50 \pm 0,05\right) cm^3$$

O valor médio do volume é dado simplesmente pelos valores médios do diâmetro e da altura:

$$\bar{V} = \pi \frac{\left(5,0\right)^2}{4} \left(12,5\right) cm^3 = 245,44\, cm^3$$

Mas, qual a incerteza nessa determinação do volume?

Qual o valor que obteríamos se considerássemos os valores máximos do diâmetro, 5,05 cm, e da altura, 12,55 cm?
E se considerássemos os valores mínimos?

Assim, com esses dados de diâmetro e altura, podemos concluir que

$$V = \left(245 \pm 6\right) \text{ cm}^3$$

Propagação de erros

Esse procedimento de considerar “valores máximos e mínimos” nos dá uma ideia grosseira da incerteza na variável determinada indiretamente.

Existe um método mais rigoroso e apropriado para se encontrar a incerteza de uma variável determinada indiretamente.

Esse método é denominado PROPAGAÇÃO DE ERROS

Vamos considerar o caso de uma variável dependente geral

$$F(x, y, z, \ldots)$$

A incerteza em F é determinada indiretamente pela propagação dos erros das outras variáveis

$$\sigma_F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 (\sigma_x)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 (\sigma_y)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 (\sigma_z)^2 + \ldots}$$

Propagação de erros

Voltando ao exemplo anterior do volume de um cilindro:

$$\sigma_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)^2 \left(\sigma_D\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial L}\right)^2 \left(\sigma_L\right)^2} \quad = \bar{V}\sqrt{4\left(\frac{\sigma_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2}$$

$$= 245\sqrt{4\left(\frac{0,05}{5,00}\right)^2 + \left(\frac{0,05}{12,5}\right)^2}$$

Resultando num erro propagado de **5 cm³**

$$V = \left(245 \pm 5\right)\ \mathrm{cm}^3$$

Exercício

Determine a aceleração gravitacional *g* considerando o exemplo do experimento de queda livre caseiro:

O tempo de queda livre de uma bolinha de tênis, lançada a uma altura de *h = 2,00 ± 0,05 m,* foi medido com o cronômetro do meu telefone celular.

Medida	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
t (s)	0,63	0,61	0,67	0,66	0,61	0,68	0,59	0,63	0,58	0,61

Tratando os dados: $t = t_m \pm \sigma_m \quad D = \bar{D} \pm \sigma_D, \quad L = \bar{L} \pm \sigma_L$

Cálculo de g: $g = 2\frac{h}{t^2}$ $\quad \bar{g} = 2\frac{\bar{h}}{\bar{t}^2} = 10{,}406\, m/s^2$

$$\sigma_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial h}\right)^2 (\sigma_h)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)^2 (\sigma_t)^2} = \bar{g}\sqrt{\left(\frac{\sigma_h}{\bar{h}}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_t}{\bar{t}}\right)^2} = 0{,}425\, m/s^2$$

Apresentação do Resultado: $g = 10{,}4 \pm 0{,}4\ m/s^2$

Como fazer a propagação de erro “sem usar” derivada?

Regra prática

•Na prática operações como a **soma ou subtração, multiplicação ou divisão, etc.** a propagação das incertezas resume-se a operações matemáticas simples, ou regras práticas, dos operandos.

No quadro a seguir, estão resumidos os principais casos de propagação de incertezas.

Quadro resumo

w = w (x, y, ...)	Expressões para σ_w
w = x ± y soma e subtração	$\sigma_w^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$ somar as incertezas absolutas em quadratura
w = axy multiplicação	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$ somar as incertezas relativas em quadratura
w = a (y / x) divisão	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$ somar as incertezas relativas em quadratura
w = x^m potência simples	$\left\lvert\frac{\sigma_w}{w}\right\rvert = \left\lvert m\frac{\sigma_x}{x}\right\rvert$
w = ax multiplicação por constante	$\left\lvert\frac{\sigma_w}{w}\right\rvert = \left\lvert\frac{\sigma_x}{x}\right\rvert$ **ou** $\sigma_w = \lvert a\rvert\sigma_x$
w = ax + b	$\left\lvert\frac{\sigma_w}{w}\right\rvert = \left\lvert\frac{\sigma_x}{x}\right\rvert$ **ou** $\sigma_w = \lvert a\rvert\sigma_x$
w = $ax^p y^q$	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(p\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(q\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
w = a sen(bx) função qualquer aplicar a definição	$\sigma_w = \lvert ab\cos(bx)\rvert\sigma_x \quad b\sigma_x$ em radianos

Identifique o tipo de expressão que você precisa para determinar a incerteza.

Exemplo: Um objeto percorreu a distância de D = (2,4 ± 0,2) m em um tempo de t = (1,2 ± 0,1)s. Determine a velocidade média do objeto e sua incerteza.

$$v = \frac{D}{t} = \frac{2,4}{1,2} = 2$$

Para o cálculo da incerteza, observamos na tabela que:

$$\left(\frac{\sigma_v}{v}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$$

$$\sigma_v = v\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2} = 0,23$$

Logo: ***v* = (2,0 ± 0,2) m/s**