

BC0208 - Fenômenos Mecânicos

Laboratório

Medidas e Erros

Profs. do curso de Fenômenos Mecânicos - UFABC

2013.1

Texto adaptado do livro “Introdução ao laboratório de física”, João J. Piacentini *et al.*, 3a. ed. rev. - Florianópolis: Ed. da UFSC, 2008.

1 Medidas

Toda medida M feita experimentalmente deve conter três itens:

1. O valor esperado da medida, E_m ;
2. uma expectativa do erro cometido, σ_m ;
3. e a unidade de medida, u .

Convencionalmente escrevemos:

$$M = (E_m \pm \sigma_m)u.$$

Por exemplo, o comprimento de um objeto é $(20,3 \pm 0,5)\text{cm}$, onde 20,3 cm é o valor esperado de uma medida deste objeto, 0,5 cm é uma expectativa do erro nesse valor e a unidade de medida utilizada foi o centímetro.

1.1 Algarismos significativos

Os algarismos significativos no valor de uma medida são todos os algarismos dos quais temos certeza de seu valor mais um algarismo para o qual não temos precisão suficiente para conhecer o seu valor exato.

Imagine que você queira medir o tamanho de um objeto, mas disponha somente de uma régua cuja menor divisão é de 1 cm. Esta medida está representada na figura 1.

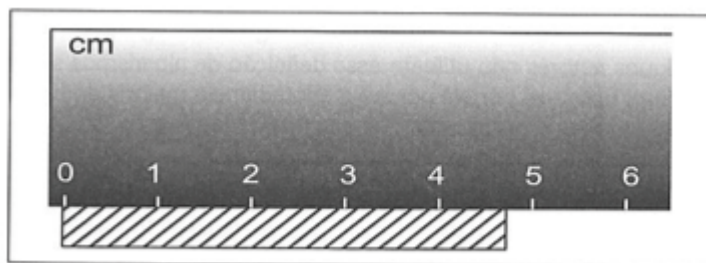


Figura 1: Medida de um objeto com uma régua graduada em centímetros.

O comprimento da barra está certamente compreendido entre 4 e 5 cm. Pode-se dizer também que o comprimento é maior do que 4,5 cm, mas não sabemos ao certo se será 4,7 cm ou 4,8 cm. Poderia ser 4,65 cm?

Como regra geral, apresentamos o valor esperado de uma medida com os algarismos de que se tem certeza mais um único algarismo duvidoso. Esses algarismos são denominados algarismos significativos da medida. No caso acima temos 2 algarismo significativos, portanto, 4,65 cm não é uma boa apresentação do valor esperado nesse caso.

Agora, tomemos outro objeto com seu comprimento medido por uma régua milimetrada. Pela figura 2, podemos expressar o comprimento do objeto como 16,45 cm. Nesse caso, o algarismo 5 foi avaliado; não temos certeza absoluta sobre esse valor. A medida é feita com 4 algarismos significativos, ou seja, 3 algarismos dos quais temos certeza mais o primeiro algarismo duvidoso.

Como a posição da vírgula em um número que expressa uma medida depende da unidade utilizada, os zeros que ficam à esquerda do primeiro número representando a medida não são significativos. Por exemplo, a medida 0,023 m

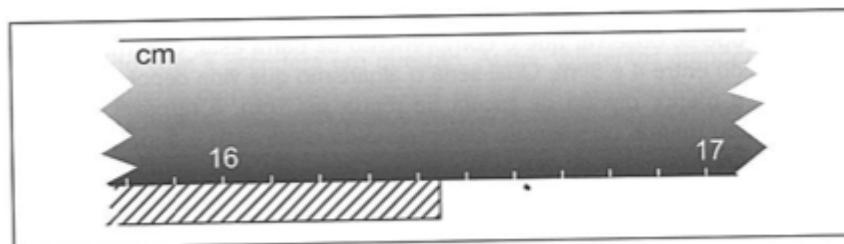


Figura 2: Medida de um objeto com uma régua graduada em milímetros.

tem somente dois algarismos significativos; e a medida 0,348 s tem três algarismos significativos.

Zeros à direita do último número diferente de zero podem ser significativos. Por exemplo, a medida 0,0040000 km pode ter 5 algarismos significativos, desde que os 3 primeiros zeros à direita do 4 sejam seguramente zeros e o quarto zero à direita do 4 seja o primeiro algarismo duvidoso.

1.2 Operações com algarismos significativos

Quando queremos obter o valor de uma grandeza indiretamente através de outras, por exemplo, a velocidade média de um objeto através das medidas de distância e tempo, precisamos encontrar a incerteza na velocidade com base nos erros cometidos nas medidas de distância e de tempo. Além disso, precisamos determinar quantos algarismos são significativos no resultado obtido. Apresentamos a seguir algumas regras que devem ser seguidas ao se fazer operações básicas com grandezas contendo diferentes números de algarismos significativos.

1.2.1 Adição e Subtração:

O resultado deve ter o mesmo número de casas decimais que a parcela com o menor número dessas. Exemplos:

$$1. 27,8 \text{ u} + 1,326 \text{ u} + 0,66 \text{ u} = 29,786 \text{ u} \rightarrow 29,8 \text{ u} ;$$

$$2. 127,36 \text{ u} - 68,287 \text{ u} = 59,073 \text{ u} \rightarrow 59,06 \text{ u} ,$$

onde u é uma unidade de medida qualquer.

1.2.2 Multiplicação e divisão:

O resultado deve ter o mesmo número de algarismos significativos da medida com o menor número desses. Exemplos:

1. $3,27251 \text{ u} \times 1,32 \text{ u} = 4,3197132 \text{ u}^2 \rightarrow 4,32 \text{ u}^2$;
2. $\frac{63,72 \text{ u}}{23,1 \text{ v}} = 2,758441558 \text{ u/v} \rightarrow 2,76 \text{ u/v}$,

onde u e v são unidades de medida.

Observações:

1. Em outras operações, como radiciação e potenciação, mantém-se no resultado o mesmo número de algarismo significativos da grandeza operada. Exemplos: $(8,75 \text{ m/s})^2 = 76,5625 = 76,6 \text{ m}^2/\text{s}^2$. $\text{sen } 27^\circ = 0,453990499 = 0,45$.
2. A multiplicação ou divisão por constantes não alteram o número de algarismos significativos da medida. Exemplo: A área de um triângulo é $\frac{b \cdot h}{2} = (3,10 \text{ cm} \times 2,50 \text{ cm})/2 = 3,8750 \text{ cm}^2 \rightarrow 3,88 \text{ cm}^2$.
3. Pode haver alguma variação nos critérios estabelecidos acima dependendo do autor e do rigor com que se deseja obter os resultados e incertezas.

1.3 Erros em medidas experimentais

Para se conhecer a incerteza de uma grandeza obtida indiretamente, precisamos considerar a teoria de propagação de erros, que nos diz como os erros de diferentes variáveis que, relacionadas nos dão uma medida indiretamente, se refletem na incerteza da medida indireta. Representaremos os erros por σ_α , onde α é a variável a ser medida.

Na soma ou subtração, $C = A \pm B$, temos:

$$\sigma_C = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}.$$

Na multiplicação $C = AB$ e divisão $C = A/B$, temos:

$$\frac{\sigma_C}{C} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_B}{B}\right)^2}.$$

Observação: Poderíamos imaginar que para uma potência como no caso da equação para um movimento uniformemente acelerado, ou seja, $\Delta x = \frac{1}{2}at^2$, poderíamos calcular o erro em Δx da seguinte forma: $\frac{\sigma_{\Delta x}}{\Delta x} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_t}{t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_t}{t}\right)^2} = \sqrt{2}\frac{\sigma_t}{t} \Rightarrow \sigma_{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{2}}at\sigma_t$. Porém, neste caso a fórmula acima não é válida. É preciso estudar como a variável tempo se comporta quadraticamente, influenciando a incerteza, através de um ponto de vista do Cálculo Diferencial. Neste caso, para uma potência, obtemos o seguinte resultado:

$$\text{Se } f = x^n \Rightarrow \sigma_f = nx^{n-1}\sigma_x.$$

Além disso, temos que se

$$g = cy \Rightarrow \sigma_g = |c|\sigma_y,$$

onde c é uma constante. Portanto, no caso do movimento acelerado acima, onde $\Delta x = \frac{1}{2}at^2$, temos:

$$\sigma_{\Delta x} = \frac{1}{2}|a|\sigma_{t^2} = \frac{1}{2}|a|2t\sigma_t = |a|t\sigma_t.$$

1.3.1 Erros sistemáticos

Primeiramente consideraremos os erros não estatísticos, como erros provenientes da limitação na escala de medida.

Neste caso, se medimos a velocidade média \bar{v} de um objeto com velocidade constante através da distância Δx média percorrida em intervalos de tempos Δt iguais, temos:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

$$\sigma_v = \bar{v} \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\Delta x}}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta t}}{\Delta t}\right)^2},$$

onde σ_v , σ_x e σ_t são as incertezas na velocidade média obtida, na distância e no tempo medidos, provenientes somente de limitações sistemáticas como as limitações das escalas de medida nos aparelhos utilizados para tais medidas.

Exercício: Calcule o volume com a respectiva incerteza de uma esfera cujo diâmetro é de $(2,0 \pm 0,3)$ cm.