Notas de Aula de Física Quântica (BCK0103)

Prof. Dr. Marcelo Augusto Leigui de Oliveira

Radiação de Corpo Negro

I. LEIS DA RADIAÇÃO TÉRMICA

Todos os corpos com temperatura acima do zero absoluto emitem radiação térmica. A irradiação é causada pelo movimento das partículas carregadas da matéria que, ao serem aceleradas, emitem radiação eletromagnética. Quanto maior a temperatura do material, maior é a energia cinética média de vibração dos átomos e maior é a intensidade da radiação emitida. Além disso, o máximo das emissões ocorre em frequências que variam com a temperatura.

Figura 1: Um objeto opaco emite radiação quando aquecido. O brilho e a cor da irradiação variam com a temperatura.

- (1860) Kirchhoff[1] formulou a lei da radiação térmica:

Para um corpo qualquer, em equilíbrio térmico, a taxa de radiação eletromagnética absorvida é igual à emitida em cada comprimento de onda:

$$\delta\epsilon_\lambda^{abs} = \delta\epsilon_\lambda^{emit}.$$

Se para cada comprimento de onda a taxa de radiação absorvida for maior que a emitida, o corpo estará em aquecimento; caso contrário, em resfriamento.

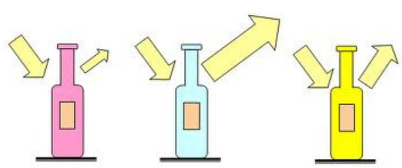

Figura 2: Balanço de radiações para um objeto, respectivamente: sendo aquecido, resfriado ou em equilíbrio térmico.

[1]Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887), físico alemão.

- **Corpo negro**: um corpo negro ideal é um objeto que absorve toda a radiação incidente, sem refletir nada, e qualquer radiação emitida por ele é resultado das vibrações térmicas de seus átomos.

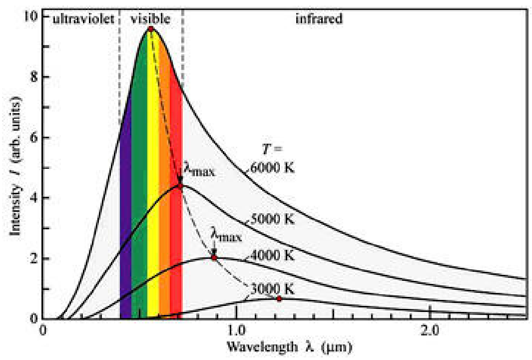

Figura 3: Espectro em função do comprimento de onda da intensidade da radiação térmica de corpos negros com diferentes temperaturas.

O espectro das emissões de um corpo negro é contínuo, isto é, ocorre em todos os comprimentos de onda (ou frequências). O comprimento de onda do máximo das emissões (λ_{max}) varia inversamente proporcional à temperatura:

$$T^a > T^b > T^c \Rightarrow \lambda^a_{max} < \lambda^b_{max} < \lambda^c_{max}$$

O *deslocamento do comprimento de onda do máximo* dá origem à cor predominante que brilha do material incandescente:

aumentando-se a temperatura: infravermelho $\rightarrow$ vermelho $\rightarrow$ laranja $\rightarrow$ amarelo $\rightarrow$ branco azulado

- Lei de Stefan[2] e Boltzmann[3]:

Definindo-se:

A *radiância espectral*: $R(\lambda) \equiv$ potência emitida por unidade de área entre λ e $\lambda + d\lambda$.

A *radiância*: $R \equiv$ potência emitida por unidade de área para todos os λ, vem:

$$R = \int_0^\infty R(\lambda) d\lambda. \tag{1}$$

(1879) Stefan concluiu após examinar as perdas térmicas de um fio de platina e (1884) seu estudante Boltzmann deduziu teoricamente que a radiância varia com a quarta potência da temperatura:

$$\boxed{R = \sigma T^4}, \tag{2}$$

onde $\sigma = 5,67 \times 10^{-8}$ W/m^{2}K^4.

[2] Joseph Stefan (1835-1839), físico austríaco.
[3] Ludwig Eduard Boltzmann (1844-1906), físico austríaco.

- (1893) Lei do deslocamento de Wien[4]:

O comprimento de onda do máximo das emissões varia inversamente com a temperatura:

$$\boxed{\lambda_{max} = \frac{b}{T}}, \tag{3}$$

onde $b = 2,898$ mm·K.

II. Cálculo da radiância pela física clássica

(1860) Kirchhoff sugere que uma cavidade com um orifício comporta-se como um corpo negro, pois absorve toda a radiação que incide sobre ela através do orifício. Qualquer radiação é emitida através do orifício e originada no interior da cavidade.

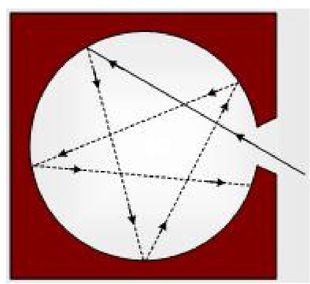

Figura 4: Cavidade com um orifício absorvendo uma radiação incidente.

Seja a radiação emitida pelo orifício através de uma janela de área infinitesimal dA toda direcionada para fora desta janela. Durante um intervalo de tempo muito pequeno dt, a radiação percorre a distância $dx = c\,dt$, definindo um cubo de volume infinitesimal $dV = dx\,dA = c\,dt\,dA$. Então, a radiância é:

$$R = \frac{dE}{dt\,dA} = \frac{dE}{c\,dt\,dA}c = \frac{dE}{dV}c = u\,c,$$

onde u é a densidade volumétrica de energia contida no cubo infinitesimal de volume dV.

Contudo, as radiações na vizinhança do orifício não estão todas dirigidas na direção da janela dA, mas distribuídas isotropicamente, em todas as direções com iguais probabilidades. Então, na vizinhança da janela dA, a probabilidade das radiações estarem dirigidas para fora da cavidade é de $1/4$. Multiplicando-se o resultado acima por esta probabilidade, encontramos a relação entre a radiância e a densidade volumétrica de energia:

$$R = \frac{c}{4}u, \tag{4}$$

que vale também para a radiância espectral:

$$R(\lambda) = \frac{c}{4}u(\lambda), \tag{5}$$

onde $u(\lambda) = n(\lambda)E(\lambda)$, sendo $n(\lambda)$ o número por unidade de volume de emissões com energia $E(\lambda)$ entre λ e $\lambda + d\lambda$.

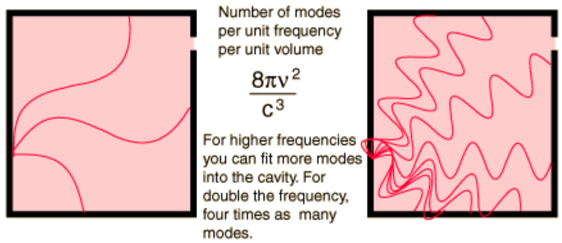

Figura 5: Contagem dos modos normais estacionários de oscilação no interior de uma cavidade ressonante.

No interior da cavidade, cabem apenas modos estacionários de oscilação. O número por unidade de volume dos modos estacionários de oscilação no interior da cavidade é dado por:

$$n(\lambda) = \frac{8\pi}{\lambda^4}. \tag{6}$$

Agora, cada modo de oscilação tem uma energia média associada que pode ser calculada por:

$$< E >= \frac{\int_0^\infty E\, f(E)\, dE}{\int_0^\infty f(E)\, dE},$$

onde $f(E)$ é uma função de distribuição de energia, com a qual calcula-se a fração dos osciladores com energias entre E e $E+dE$.

A função de distribuição foi obtida por Maxwell[5] e Boltzmann:

$$f(E) = Ae^{-E/kT},$$

onde $k = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K é a constante de Boltzmann.

A função de distribuição é normalizada, ou seja, tal que:

$$\int_0^\infty f(E)\, dE = 1.$$

Definindo-se a variável $\alpha = 1/kT$, vem:

$$\int_0^\infty Ae^{-\alpha E}\, dE = \left.\frac{Ae^{-\alpha E}}{-\alpha}\right|_0^\infty = \frac{A}{\alpha} = 1 \Rightarrow A = \alpha \Rightarrow$$

E a energia média é:

$$< E >= \int_0^\infty E\, Ae^{-\alpha E}\, dE = \cancel{\left.\frac{AEe^{-\alpha E}}{-\alpha}\right|_0^\infty} + \frac{A}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha E}\, dE = \left.\frac{Ae^{-\alpha E}}{-\alpha^2}\right|_0^\infty = \frac{A}{\alpha^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2} = kT$$

e podemos associar a cada modo de oscilação a energia média $< E >= kT$.

[4] Wilhelm Carl Werner Otto Fritz Franz Wien (1864-1928), físico alemão; Nobel de Física (1925).

[5] James Clerk Maxwell (1831-1879), físico escocês.

Assim, a densidade volumétrica de energia fica:

$$u(\lambda) = n(\lambda)kT = \frac{8\pi kT}{\lambda^4}. \tag{7}$$

Esta é a lei de Rayleigh[6]-Jeans[7], que descreve o espectro de corpo negro apenas para grandes comprimentos de onda ($\lambda \to \infty$). Para pequenos comprimentos de onda ($\lambda \to 0$), ela prevê uma radiância infinita:

$$\lim_{\lambda \to 0} R(\lambda) = \infty \quad \text{ou} \quad \int_0^\infty R(\lambda) d\lambda = \infty.$$

Tal discrepância ficou conhecida como a catástrofe do ultravioleta:

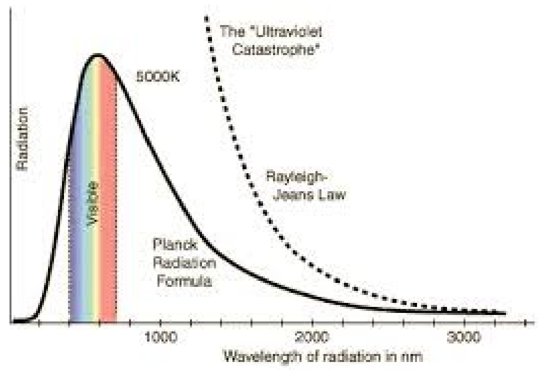

Figura 6: A catástrofe do ultravioleta.

III. A HIPÓTESE DO QUANTUM DE ENERGIA

Para que $u(\lambda)$ tenda a zero também os pequenos comprimentos de onda, a energia média por modo de oscilação não pode ser constante (kT), como no resultado clássico, mas deve depender de λ e $\lim_{\lambda\to 0} < E >= 0$.

Planck[8] propôs que os osciladores na cavidade podem assumir somente valores de energia discretos, múltiplos de um valor fundamental que, por sua vez, é proporcional à frequência da oscilação:

$$\text{quantização da energia: } \boxed{E_n = n\epsilon = nhf}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{8}$$

onde $h = 6,626 \times 10^{-34}$ J $\cdot$ s é a constante de Planck.

Vejamos, então, como fica o cálculo da energia média, se a considerarmos discreta. Neste caso, a fração dos estados no nível n, com energia E_n, pela distribuição de Maxwell-Boltzmann, é $p_n(E) = e^{-n\epsilon/kT} \equiv e^{-\alpha n\epsilon}$, onde definimos também $\alpha = 1/kT$.

[6]John William Strutt, Lord Rayleigh (1842-1919), físico britânico; Nobel de Física (1904).
[7]Sir James Hopwood Jeans (1877-1946), físico britânico.
[8]Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858-1947), físico alemão; Nobel de Física (1918).

Agora, a integral deve ser substituída por uma soma:

$$< E >= \frac{\sum_n E_n \cdot p_n(E)}{\sum_n p_n(E)} = \frac{\sum_n (n\epsilon) e^{-\alpha n\epsilon}}{\sum_n e^{-\alpha n\epsilon}} = \frac{-\frac{d}{d\alpha}(\sum_n e^{-\alpha n\epsilon})}{\sum_n e^{-\alpha n\epsilon}}.$$

Note que o denominador é uma progressão geométrica de razão $e^{-\alpha\epsilon} < 1$:

$$\sum_n e^{-\alpha n\epsilon} = 1 + e^{-\alpha\epsilon} + e^{-2\alpha\epsilon} + \cdots = \frac{1}{1 - e^{-\alpha\epsilon}}$$

e o numerador é menos a derivada do denominador com respeito a α:

$$-\frac{d}{d\alpha}\sum_n e^{-\alpha n\epsilon} = -\frac{d}{d\alpha}(1 - e^{-\alpha\epsilon})^{-1} = \frac{\epsilon e^{-\alpha\epsilon}}{(1 - e^{-\alpha\epsilon})^2}.$$

Assim, a energia média fica:

$$< E >= \frac{\epsilon e^{-\alpha\epsilon}}{1 - e^{-\alpha\epsilon}} = \frac{\epsilon}{e^{\alpha\epsilon} - 1} = \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1} \Rightarrow \boxed{< E >= \frac{hc/\lambda}{e^{hc/\lambda kT} - 1}}. \tag{9}$$

Multiplicando-se pelo número de modos de oscilação $n(\lambda)$, vem:

$$\boxed{u(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\left(\frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}\right)}. \tag{10}$$

Esta é a lei de distribuição de Planck, que descreve o espectro de corpo negro com excelente concordância com os dados experimentais.

Além disso, pode-se demonstrar a partir da lei de Planck a fórmula de Rayleigh-Jeans, a lei de Stefan-Boltzmann e a lei do deslocamento de Wien (vide Apêndice).

IV. EXERCÍCIOS

1. A temperatura da pele humana é de aproximadamente 35°C.
   (a) Considerando a pele um corpo negro, qual é o comprimento de onda correspondente ao pico de emissão de radiação?
   (b) Sabendo que a área superficial total da pele é de 2 m^2, qual é a potência total emitida pela pele?
   (c) Por quê as pessoas não brilham com a intensidade de uma lâmpada incandescente de mesma potência?
2. Uma cavidade que é mantida à temperatura de 2000 K possui um pequeno orifício por onde a radiação eletromagnética pode escapar de seu interior. Em qual comprimento de onda a cavidade irradia com maior intensidade?
3. Considere o Sol como um corpo negro de temperatura 5800 K. Sabendo que o raio do Sol é de 700 mil km e que sua massa é de 2×10^{30} kg:
   (a) Use a lei de Stefan e Boltzmann para calcular a energia total irradiada pelo Sol em um ano;
   (b) O Sol gera energia através de fusões termonucleares que ocorrem em seu interior, calcule utilizando-se da expressão $E = mc^2$, onde $c = 3 \times 10^8$ m/s, a massa perdida pelo Sol durante um ano na sua geração de energia;
   (c) Qual é a fração de massa perdida pelo Sol a cada ano no processo de fusão?
4. O máximo da distribuição espectral de potência irradiada por uma certa cavidade ocorre para o comprimento de onda de $24,0$ μm, na região do infravermelho. A temperatura da cavidade é aumentada até que a potência total torne-se duas vezes maior.
   (a) Determine a nova temperatura da cavidade;
   (b) Determine o novo comprimento de onda do máximo das emissões.
5. A temperatura de um corpo negro diminui de 800 K para 650 K. Calcule a variação percentual do comprimento de onda correspondente ao máximo do espectro de radiação térmica deste corpo.

Respostas:

1. (a) $9,41$ μm;
   (b) 1,02 kW.
2. 1449 nm;
3. (a) $1,25 \times 10^{34}$ J;
   (b) $1,38 \times 10^{17}$ kg;
   (c) $6,92 \times 10^{-14}$.
4. (a) 146,3 K;
   (b) 20,2 μm.
5. 23%.

V. APÊNDICE

- Dedução da fórmula de Rayleigh-Jeans:

Tomando-se a expansão: $e^x \approx 1 + x + ...$, onde $x = hc/\lambda kT$, vem:

$$u(\lambda) \approx \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\left(\frac{1}{1 + (hc/\lambda kT) - 1}\right) = 8\pi\lambda^{-4}kT,$$

que é a fórmula de Rayleigh-Jeans.

- Dedução da lei de Stefan-Boltzmann:

$$R = \int_0^\infty R(\lambda)d\lambda = \frac{c}{4}\int_0^\infty u(\lambda)d\lambda$$

Como $c = \lambda f \Rightarrow d\lambda/df = -c/f^2 = -\lambda^2/c$, podemos fazer uma mudança de variáveis na integral acima:

$$R = \frac{c}{4}\int_\infty^0 u(f)\left(-\frac{\lambda^2}{c}\,df\right) = \frac{c^2}{4}\int_0^\infty \frac{u(f)}{f^2}\,df$$

E como:

$$u(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\left(\frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}\right) \Rightarrow u(f) = \frac{8\pi hf^5}{c^4}\left(\frac{1}{e^{hf/kT} - 1}\right),$$

de onde:

$$R = \frac{2\pi h}{c^2}\int_0^\infty \frac{f^3}{e^{hf/kT} - 1}\,df$$

Definindo-se $x = hf/kT \Rightarrow dx = (h/kT)df$ e fazendo-se uma nova mudança de variáveis, vem:

$$R = \frac{2\pi h}{c^2}\left(\frac{kT}{h}\right)^4\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\,dx$$

Agora, a integral acima não tem solução analítica trivial. Porém, consultando-se uma tabela de integrais:

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\,dx = \frac{\pi^4}{15},$$

daí:

$$R = \left(\frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3}\right)T^4 \equiv \sigma T^4.$$

Note que encontramos, assim, uma expressão para a constante de Stefan-Boltzmann em termos de constantes fundamentais:

$$\sigma = \left(\frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3}\right) = 5,67\cdot 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2K^4}$$

e em concordância com o seu resultado experimental.

- Dedução da lei do deslocamento de Wien:

Partindo da lei de distribuição de Planck:

$$u(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5(e^{hc/\lambda kT} - 1)}$$

e definindo-se a variável $x = hc/\lambda kT \Rightarrow dx/d\lambda = -hc/\lambda^2 kT$.

O máximo de emissão ocorre quando:

$$\frac{d}{d\lambda}u(\lambda) = 0 \Rightarrow \frac{dx}{d\lambda}\frac{d}{dx}u(\lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{-hc}{\lambda^2 kT}\frac{d}{dx}\left[8\pi hc\left(\frac{kT}{hc}\right)^5 \frac{x^5}{e^x - 1}\right] = \frac{-8\pi hc}{\lambda^2}\left(\frac{kT}{hc}\right)^4 \frac{d}{dx}\left[\frac{x^5}{e^x - 1}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^5}{e^x - 1}\right] = \frac{5x^4}{e^x - 1} - \frac{x^5 e^x}{(e^x - 1)^2} = 0 \Rightarrow 5x^4(e^x - 1) - x^5 e^x = 0 \Rightarrow e^x(5x^4 - x^5) = 5x^4 \Rightarrow$$

$$e^x(1 - x/5) = 1$$

No entanto, a equação acima é transcendental, cuja solução só pode ser obtida numericamente: $x \approx 4,965$.

Assim:

$$x = \frac{hc}{\lambda_{max} kT} = 4,965 \Rightarrow \lambda_{max} T = \frac{hc}{4,965 \cdot k} \Rightarrow \lambda_{max} T = 2,898 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot K}$$

e obtemos a lei do deslocamento de Wien, com a constante dada em termos de constantes fundamentais e um valor numérico, novamente, em concordância com o resultado experimental.