Notas de Aula de Física Quântica (BCK0103)

Prof. Dr. Marcelo Augusto Leigui de Oliveira

Raios X e efeito Compton

I. RAIOS X

Em 1895, Roentgen[1] descobriu os raios X enquanto trabalhava com um tubo de raios catódicos.

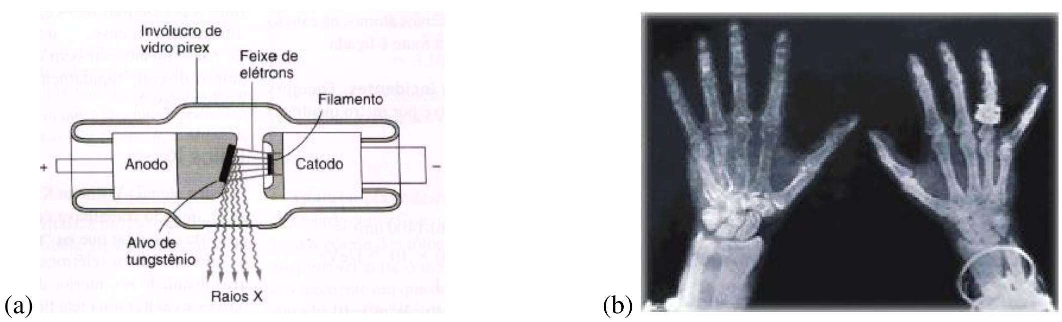


Figura 1: (a) tubo de raios X; (b) radiografia das mãos da Sra. Roentgen.

Raios X são ondas eletromagnéticas com comprimentos de onda no intervalo $10\ \text{nm} \lesssim \lambda \lesssim 1\ \text{pm}$.

Em 1912, von Laue[2] sugere que o comprimento de onda é da ordem do espaçamento atômico num cristal e, no mesmo ano, Bragg[3] sugere um método:

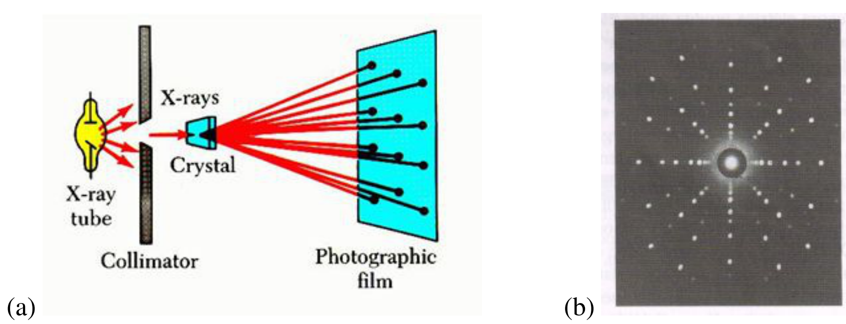
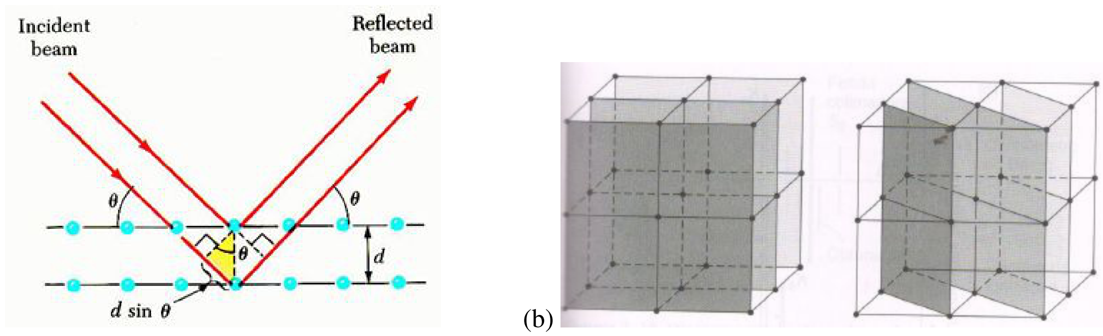


Figura 2: (a) experimento de von Laue; (b) figura de Laue.

[1]Wilhelm Conrad Röntgen (1845-1923), físico alemão; Nobel de Física (1901).
[2]Max Theodor Felix von Laue (1879-1960), físico alemão; Nobel de Física (1914).
[3]William Lawrence Bragg (1890-1971), físico australiano; Nobel de Física (1915).



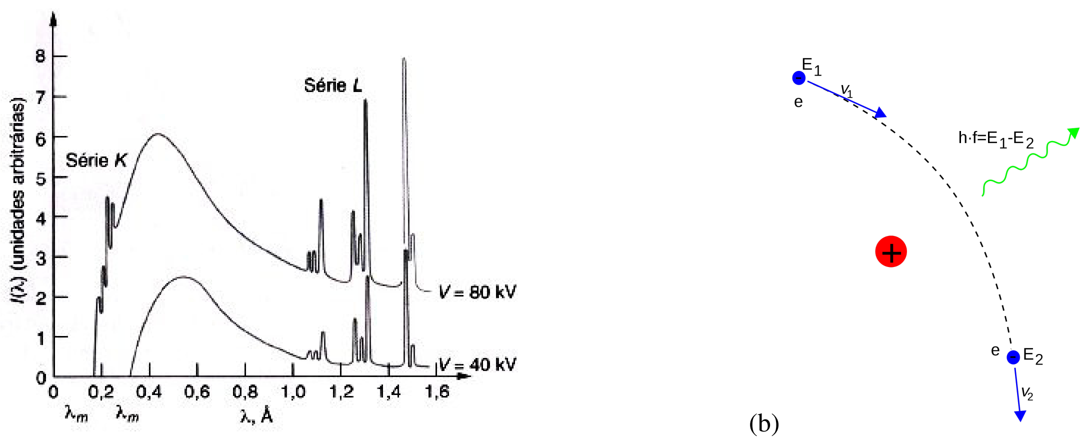
(a) (b)

Figura 3: (a) método de Bragg; (b) planos de Bragg.

A *condição de Bragg* para a interferência construtiva é:

$$\boxed{2d \text{ sen } \theta = m\lambda}, \tag{1}$$

onde m é um número inteiro.



(a) (b)

Figura 4: (a) Espectro de raios X do tungstênio; (b) Raio X produzido através de bremsstrahlung por um elétron de alta energia sendo acelerado no campo elétrico de um núcleo atômico.

O espectro de raios X possui duas componentes: uma **contínua** e uma **discreta**. Veremos mais sobre o espectro discreto (linhas de emissão) futuramente. Vamos nos concentrar agora no espectro contínuo. Primeiramente, note que as emissões se distribuem numa larga faixa de comprimentos de onda e que existe um corte em λ_m, o *comprimento de onda de corte*. E note ainda que λ_m depende somente do potencial V aplicado entre os eletrodos. Da teoria do eletromagnetismo, sabe-se que partículas carregadas, quando aceleradas, emitem radiação pelo processo denominado *bremsstrahlung* — ou "radiação de frenagem", em alemão.

Suponha um elétron perdendo energia ao ser espalhado no campo de um núcleo, a energia do raio X emitido será dada pela diferença entre as energias cinéticas inicial e final do elétron:

$$\Delta E = E_i - E_f = hf = hc/\lambda$$

e podemos calcular o seu comprimento de onda λ para este processo individual.

Como, em princípio, este processo ocorre múltiplas vezes, vários raios X são produzidos, com um **espectro contínuo** de comprimentos de onda: $\lambda_m < \lambda < \infty$, com os limites:

- $\lambda \to \infty$, se o elétron quase não perder energia ($E_i \approx E_f$);
- $\lambda \to \lambda_m$, se o elétron perder toda a sua energia ($E_f \approx 0$) e neste caso: $\lambda_m = hc/E_i$.

Agora, como a energia cinética do elétron é a sua carga multiplicada pelo potencial acelerador ($E = eV$) e lembrando que $hc = 1240$ eV · nm, vem uma relação empírica, conhecida como *regra de Duane*[4]*-Hunt*[5]:

$$\lambda_m = \frac{hc}{eV} = \left(\frac{1240\, \cancel{e}V \cdot \text{nm}}{\cancel{e}V}\right) \Rightarrow \boxed{\lambda_m = \left(\frac{1240}{V}\right) \text{nm}}. \tag{2}$$

Exemplo 1

A tensão de aceleração no tubo de imagens de uma TV é de aproximadamente 25 kV, qual é o menor comprimento de onda dos raios X produzidos?

$$\lambda_m = \left(\frac{1240}{V}\right) \text{nm} = \left(\frac{1,24 \cdot 10^3}{25 \cdot 10^3}\right) \text{nm} = 0,0496 \text{ nm} \approx 0,05 \text{ nm} = 0,5 \text{ Å}.$$

II. Efeito Compton

Em 1923, Compton[6] descobre o efeito:

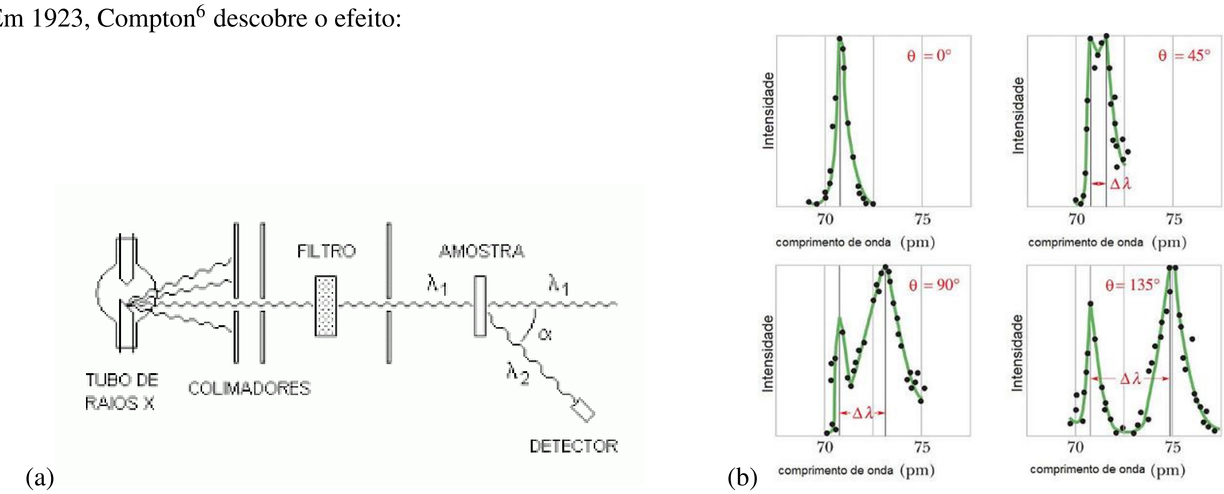


Figura 5: O efeito Compton: (a) aparato; (b) intensidade em função do ângulo de espalhamento.

e determina que há um segundo comprimento de onda emitido com *deslocamento de Compton*: $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$.

[4] William Duane (1872-1935), físico americano.

[5] Franklin Hunt.

[6] Arthur Holly Compton (1892-1962), físico americano; Nobel de Física (1927).

Aplicando as leis de conservação do momento linear e da energia relativísticos para o *fóton*[7]espalhado e o elétron acelerado, Compton demonstrou (vide apêndice) que:

$$\boxed{\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_C(1 - \cos\theta)}, \tag{3}$$

onde $\lambda_C = h/m_e c = 0,0243$ Å é o *comprimento de onda de Compton*:

$$\lambda_C = \frac{h}{m_e c} = \frac{hc}{m_e c^2} = \frac{1240\,\cancel{eV}\cdot \text{nm}}{511\cdot 10^3\,\cancel{eV}} = 0,00243\,\text{nm}.$$

Exemplo 2

Observa-se, no efeito Compton, que o comprimento de onda da radiação incidente sofre um aumento de 1,5% para um ângulo de espalhamento de $120°$. (a) Qual é o valor do o comprimento de onda da radiação incidente? (b) Qual será o comprimento de onda da radiação espalhada para um ângulo de espalhamento de $75°$?

(a)

$$\Delta\lambda = \lambda_C(1 - \cos\theta) = 0,00243(1 + 0,5) = 0,00365\,\text{nm}$$

como $\Delta\lambda/\lambda_1 = 1,5\%$:

$$\lambda_1 = \frac{\Delta\lambda}{0,015} = \frac{0,00365}{0,015} = 0,243\,\text{nm};$$

(b) para $\theta = 75°$:

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_C(1 - \cos\theta) = 0,243 + 0,00243(1 - \cos\ 75°) = 0,2448\,\text{nm} \approx 0,245\,\text{nm}.$$

Exemplo 3

Calcule o deslocamento Compton para um fóton espalhado a um ângulo de $60°$, emitindo: (a) um elétron livre; (b) um próton livre e (c) uma molécula atmosférica de nitrogênio. Dados: $m_p = 938,3$ MeV/c^2, $m_e = 0,511$ MeV/c^2, unidade de massa atômica: $u = 931,5$ MeV/c^2.

Temos que saber o comprimento de onda de Compton para cada partícula emitida:

(a) próton:

$$\lambda_C^p = \frac{h}{m_p c} = \frac{hc}{m_p c^2} = \frac{1240}{938,3\cdot 10^6} = 1,32\cdot 10^{-6}\,\text{nm} = 1,32\cdot 10^{-15}\,\text{m} \quad (\lambda \sim \text{raios-}\gamma)$$

$$\Rightarrow \Delta\lambda = \lambda_C^p(1 - cos\theta) = 6,61\cdot 10^{-16}\,\text{m};$$

(b) elétron:

$$\lambda_C^e = \frac{h}{m_e c} = \frac{hc}{m_e c^2} = \frac{1240}{0,511\cdot 10^6} = 2,43\cdot 10^{-3}\,\text{nm} = 2,43\cdot 10^{-12}\,\text{m} \quad (\lambda \sim \text{raios-}X)$$

$$\Rightarrow \Delta\lambda = \lambda_C^e(1 - cos\theta) = 1,22\cdot 10^{-12}\,\text{m};$$

(c) molécula de N_2:

$$\lambda_C^{N_2} = \frac{h}{m_{N_2} c} = \frac{hc}{m_{N_2} c^2} = \frac{1240}{2\cdot 14\cdot 931,5\cdot 10^6} = 4,75\cdot 10^{-8}\,\text{nm} = 4,75\cdot 10^{-17}\,\text{m} \quad (\lambda \sim \text{raios-}\gamma)$$

$$\Rightarrow \Delta\lambda = \lambda_C^{N_2}(1 - cos\theta) = 2,38\cdot 10^{-17}\,\text{m}.$$

[7] A propósito, o termo *fóton* para o quantum de radiação eletromagnética foi cunhado por Compton.

III. EXERCÍCIOS

1. Um aparelho de raios X funciona com uma tensão de 95 kV para aceleração de elétrons emitidos por um cátodo. Suponha que os elétrons são emitidos com energia cinética final desprezível. Determine o comprimento de onda mínimo dos raios X emitidos por esse aparelho.
2. Raios X de comprimento de onda 0,25 nm realizam espalhamento Compton com elétrons, que podem ser considerados no estado inicial de repouso numa folha metálica. Para o feixe observado de raios X espalhados a um ângulo de 60° em relação ao feixe incidente, detemine:
   (a) O comprimento de onda dos raios X espalhados;
   (b) A energia dos raios X espalhados;
   (c) A energia cinética dos elétrons espalhados;
   (d) A direção de propagação dos elétrons espalhados.
3. Fótons com $\lambda = 0{,}024$ Å incidem sobre elétrons livres, sofrendo espalhamento Compton. Encontre o comprimento de onda do fóton espalhado e a energia cinética transferida ao elétron nos casos:
   (a) De um fóton espalhado a 30° em relação à direção de incidência;
   (b) De um fóton espalhado a 120° em relação à direção de incidência.

Respostas:

1. 0,13 Å.
2. (a) 0,2512 nm;
   (b) 4936 eV;
   (c) 24 eV;
   (d) 59,7°.
3. (a) $\lambda = 0{,}0272$Å e E = 61,6 keV;
   (b) $\lambda = 0{,}0604$Å e E = 312 keV.

IV. APÊNDICE

Dedução da fórmula do deslocamento Compton:

Seja um fóton com energia inicial E_γ e momento linear inicial p_γ, arrancando um elétron com energia cinética K e momento linear p_e e sendo espalhado com energia final E'_γ e momento linear final p'_γ, conforme ilustrado na figura 6. Os princípios de conservação da energia e do momento linear exigem que:

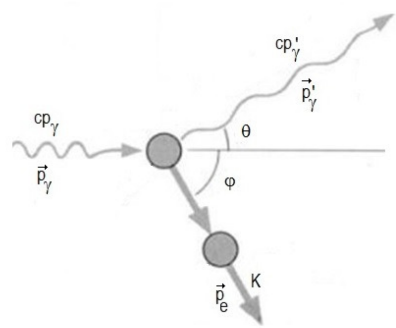


Figura 6: Variáveis dinâmicas no espalhamento Compton.

$$\text{conserv. } \vec{p}: \begin{cases} p_\gamma = p'_\gamma cos\theta + p_e cos\varphi \\ p'_\gamma sen\theta = p_e sen\varphi \end{cases}$$

$$\text{conserv. } E: \; cp_\gamma + m_e c^2 = cp'_\gamma + K + m_e c^2$$

Partindo da conservação de momento, somando-se os quadrados das duas equações, vem:

$$p_\gamma^2 + p_\gamma'^2 - 2p_\gamma p'_\gamma cos\theta = p_e^2 \tag{4}$$

E da conservação de energia:

$$K = c(p_\gamma - p'_\gamma) \tag{5}$$

Como:

$$E = K + m_e c^2 \Rightarrow E^2 = K^2 + 2Km_e c^2 + \cancel{m_e^2 c^4} = c^2 p_e^2 + \cancel{m_e^2 c^4} \Rightarrow$$

$$p_e^2 = \frac{K^2}{c^2} + 2Km_e \tag{6}$$

Substituindo 4 e 5 em 6:

$$p_\gamma^2 + p_\gamma'^2 - 2p_\gamma p'_\gamma cos\theta = \frac{K^2}{c^2} + 2Km_e = (p_\gamma - p'_\gamma)^2 + 2m_e c(p_\gamma - p'_\gamma) \Rightarrow$$

$$\cancel{p_\gamma^2} + \cancel{p_\gamma'^2} - 2p_\gamma p'_\gamma cos\theta = \cancel{p_\gamma^2} + \cancel{p_\gamma'^2} - 2p_\gamma p'_\gamma + 2m_e cp_\gamma - 2m_e cp'_\gamma \Rightarrow$$

$$cos\theta = 1 - \frac{m_e c}{p'_\gamma} + \frac{m_e c}{p_\gamma} \Rightarrow \frac{h}{p'_\gamma} - \frac{h}{p_\gamma} = \frac{h}{m_e c}(1 - cos\theta)$$

E, usando a relação de de Broglie: $\lambda = h/p$, vem:

$$\Rightarrow \lambda' = \lambda + \lambda_C(1 - cos\theta),$$

onde define-se o *comprimento de onda de Compton* por $\lambda_C = \frac{h}{m_e c} = 0,0243$ Å.