

Notas de Aula de Física Quântica (BCK0103)

Prof. Dr. Marcelo Augusto Leigui de Oliveira

Ondas de matéria e o princípio da incerteza

I. A DUALIDADE ONDA-PARTÍCULA

- Em seu livro *Optiks* (1704), Newton havia proposto que a luz se comportaria como partículas.

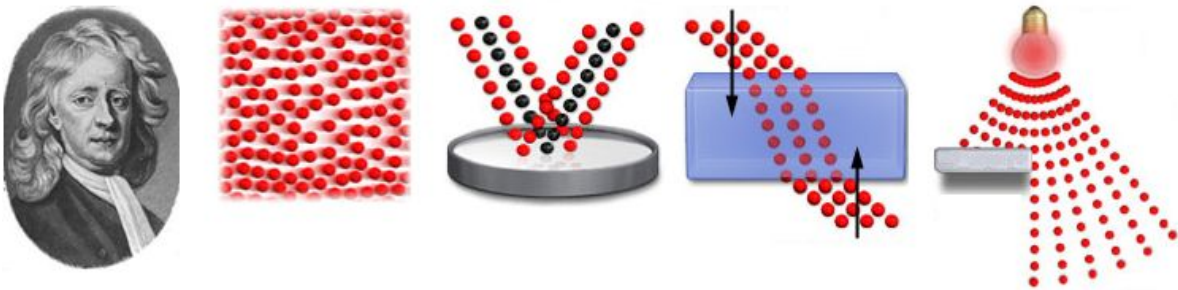


Figura 1: Newton e a teoria corpuscular da luz.

- Enquanto que Huygens¹, em seu livro *Traté de la lumière* (1690), propôs o comportamento ondulatório para a luz.

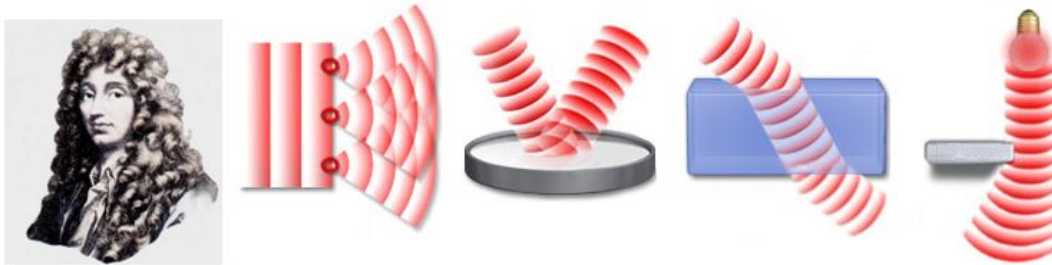


Figura 2: Huygens e a teoria ondulatória da luz.

¹Christiaan Huygens (1629-1695), físico, matemático, astrônomo e horologista holandês.

- Em 1801, Young² realizou o experimento da dupla fenda:

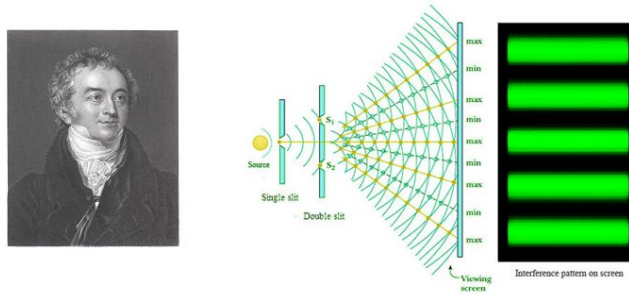


Figura 3: Young e o experimento de interferência da luz na dupla fenda.

- No decorrer do século XIX, a teoria ondulatória da luz se consolidou, tendo o seu ápice com a teoria eletromagnética de Maxwell³:

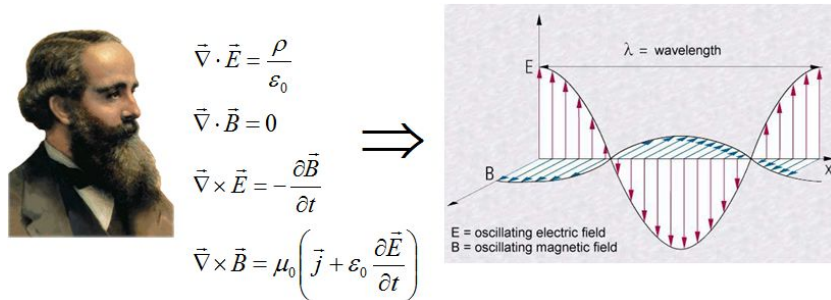


Figura 4: Maxwell e a teoria eletromagnética.

Entretanto, no início do século XX, começaram a surgir evidências para o comportamento corpuscular da luz:

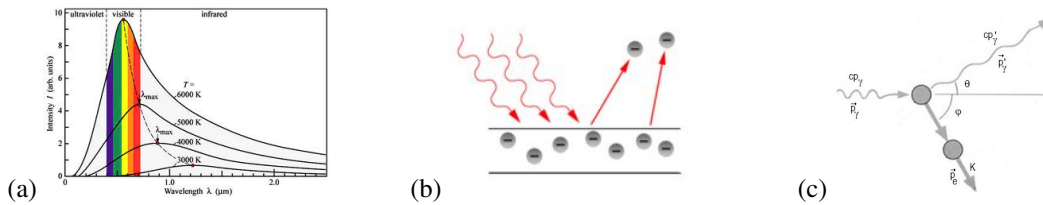


Figura 5: Evidências para o comportamento corpuscular da luz: (a) radiação de corpo negro; (b) efeito fotoelétrico; (c) efeito Compton.

²Thomas Young (1773-1829), físico, médico e egiptólogo britânico.

³James Clerk Maxwell (1831-1879), físico e matemático escocês.

A. A hipótese de de Broglie



Em 1924, Louis de Broglie⁴ propõe que as partículas da matéria (elétrons) também se comportam como ondas e introduz a *relação de de Broglie*:

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad (1)$$

onde λ é o comprimento de onda associado e $p = mv$ é o momento linear do elétron h é a constante de Planck.

Figura 6: Louis de Broglie.

Note que, se substituirmos a relação de de Broglie na fórmula de Einstein para o quantum de luz:

$$E = hf = p\lambda f = pc \Rightarrow p = E/c,$$

ou seja, o momento do fóton pelo eletromagnetismo.

E se substituirmos no postulado da quantização do momento angular de Bohr:

$$L = n\hbar \Rightarrow mvr = n\frac{h}{2\pi} \Rightarrow 2\pi r = \frac{nh}{mv} = n\left(\frac{h}{p}\right) = n\lambda \Rightarrow$$

$$2\pi r = n\lambda, \quad (2)$$

ou seja, dentro do perímetro de uma órbita de Bohr cabem números inteiros de comprimentos de onda:

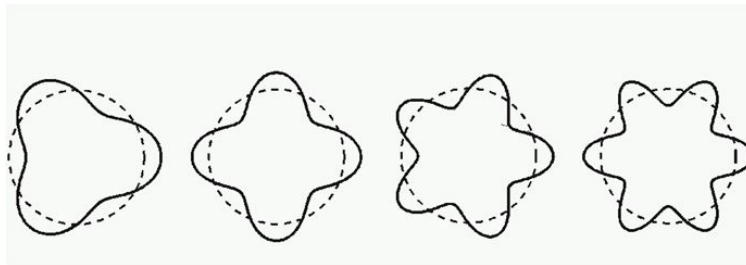


Figura 7: Ondas de de Broglie em órbitas estacionárias para $n = 3, 4, 5, 6, \dots$

Exemplo 1: elétron lento, com $E_c = 10 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-18} \text{ J}$:

$$E_c = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p = \sqrt{2mE} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-18}}} = 3,88 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0,388 \text{ nm}$$

⁴Louis-Victor-Pierre-Raymond, 7^o duque de Broglie (1892-1987), físico francês; Nobel de física (1929).

Exemplo 2: bola de pingue-pongue de $m = 2 \text{ g}$ e com $v = 5 \text{ m/s}$:

$$p = mv = 0,02 \cdot 5 = 0,10 \text{ kg m/s}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{0,10} = 6,63 \cdot 10^{-32} \text{ m}$$

Seja um elétron sujeito a uma diferença de potencial V_0 , a energia cinética ganha por ele será:

$$E_c = \frac{p^2}{2m} = eV_0 \Rightarrow p = \sqrt{2meV_0} \Rightarrow pc = \sqrt{2mc^2eV_0},$$

agora $E_0 = mc^2$ é a *energia de repouso* do elétron que, em unidades de eV, é $mc^2 = 0,511 \text{ MeV}$. Podemos calcular o comprimento de onda de de Broglie deste elétron por:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{pc} = \frac{hc}{\sqrt{2mc^2eV_0}} = \frac{1240 [\text{eV} \cdot \text{nm}]}{\sqrt{2 \cdot 0,511 \cdot 10^6 \sqrt{eV_0} [\text{eV}]}} \Rightarrow \lambda = \left(\frac{1,226}{\sqrt{eV_0}} \right) \text{ nm}$$

da teoria da relatividade, a energia total de uma partícula livre é:

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 \Rightarrow E^2 = (pc)^2 + E_0^2,$$

que para altas velocidades, isto é, quando a energia cinética for muito maior que a energia de repouso:

$$\text{se } p \gg E_0/c : E^2 \approx (pc)^2 \Rightarrow E \approx pc$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{h}{p} \approx \frac{hc}{E}$$

Exemplo 3: elétron rápido, com 100 MeV.

Primeiramente, verificamos que $100 \text{ MeV} \gg 0,511 \text{ MeV}$, daí:

$$\lambda = \frac{h}{p} \approx \frac{hc}{E} = \frac{1240}{100 \cdot 10^6} = 12,4 \cdot 10^{-15} \text{ m} = 12,4 \text{ fm} = 12,4 \text{ F}$$

Por outro lado, a energia total de uma partícula livre é a soma da energia cinética com a de repouso. Elevando-se ao quadrado, ela pode ser igualada à energia relativística:

$$E = E_c + E_0 \Rightarrow E^2 = (E_c + E_0)^2 = (pc)^2 + E_0^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_c^2 + 2E_cE_0 + \cancel{E_0^2} = p^2c^2 + \cancel{E_0^2} \Rightarrow p = \frac{\sqrt{E_c^2 + 2E_cE_0}}{c}$$

que combinada com a relação de de Broglie, vem:

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{E_c^2 + 2E_cE_0}} \quad (3)$$

Dividindo-se esta equação por $E_0 = mc^2$:

$$\lambda = \frac{hc/mc^2}{\sqrt{E_c^2 + 2E_cE_0}/E_0} = \frac{h/mc}{\sqrt{(E_c/E_0)^2 + 2E_c/E_0}},$$

mas, como $\lambda_C = h/mc$ é o comprimento de onda de Compton, vem:

$$\lambda/\lambda_C = \frac{1}{\sqrt{(E_c/E_0)^2 + 2E_c/E_0}} \tag{4}$$

Exemplo 4: próton com $E_c = 150$ GeV, como a energia de repouso do próton é $E_0 = 938$ MeV:

$$E_c/E_0 = \frac{150 \text{ [GeV]}}{0,938 \text{ [GeV]}} \approx 160 \Rightarrow \lambda/\lambda_C = 6 \cdot 10^{-3}$$

mas o comprimento de onda de Compton do próton é:

$$\lambda_C = \frac{h}{m_p c} = \frac{hc}{m_p c^2} = \frac{1240 \text{ [eV} \cdot \text{nm]}}{938 \cdot 10^6 \text{ [eV]}} = 1,32 \cdot 10^{-6} \text{ nm} = 1,32 \cdot 10^{-15} \text{ m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = 6 \cdot 10^{-3} \lambda_C = 6 \cdot 10^{-3} \cdot 1,32 \cdot 10^{-15} \text{ m} = 7,93 \cdot 10^{-18} \text{ m} \Rightarrow \lambda = 8 \text{ am}$$

- Em 1925, Elsasser⁵ propõe que os efeitos ondulatórios dos elétrons pudessem ser observados em monocristais;
- Em 1927, Davisson⁶ e Germer⁷ realizam o experimento da interferência de elétrons:

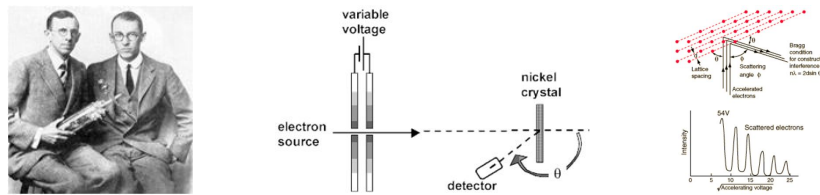


Figura 8: Davisson e Germer e o experimento de interferência com elétrons.

- Em 1927, G.P. Thomson⁸ realiza o experimento da difração de elétrons:

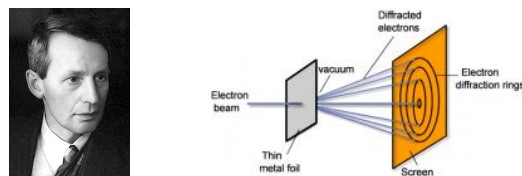


Figura 9: Thomson (filho) e a difração de elétrons.

⁵Walter Maurice Elsasser (1904-1991), físico alemão, naturalizado americano.
⁶Clinton Joseph Davisson (1881-1958), físico americano; Nobel de física (1937).
⁷Lester Germer (1896-1971), físico americano.
⁸Sir George Paget Thomson (1892-1975), físico inglês; Nobel de física (1937).

II. O PRINCÍPIO DA INCERTEZA



Figura 10: Werner Heisenberg.

Em 1927, Heisenberg⁹ formula o princípio da incerteza: "é impossível de medir-se a posição e o momento de uma partícula simultaneamente e com qualquer precisão".

Para demonstrá-lo observemos, primeiramente, o fenômeno da difração por uma fenda extensa; a precisão na localização da imagem central é da ordem do comprimento de onda:

$$\Delta x \sim \lambda,$$

que é a precisão para a localização de uma partícula com comprimento de onda de de Broglie λ . Agora,

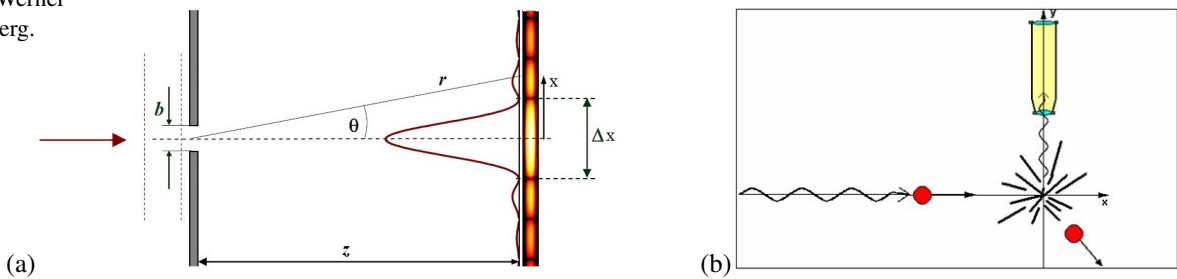


Figura 11: (a) difração por uma fenda extensa; (b) microscópio de Bohr.

tomemos o chamado *microscópio de Bohr*: ao jogar-se luz sobre uma partícula, damos-lhe um recuo Δp que é da ordem da relação de de Broglie:

$$\Delta p \sim \frac{h}{\lambda}.$$

Assim:

$$\Delta p \cdot \Delta x \sim \frac{h}{\lambda} \cdot \lambda = h > \frac{h}{4\pi} = \frac{\hbar}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}} \tag{5}$$

Por outro lado:

$$E = hf = \hbar\omega \Rightarrow \Delta E \sim \hbar\Delta\omega = \hbar \frac{2\pi}{\Delta t} \Rightarrow \Delta E \Delta t \sim \frac{\hbar}{(2\pi)} (2\pi) = h > \frac{h}{4\pi} = \frac{\hbar}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}} \tag{6}$$

⁹Werner Karl Heisenberg (1901-1976), físico alemão; Nobel de física (1932).

III. EXERCÍCIOS

1. Num aparelho de televisão os elétrons são acelerados por um potencial de 20 kV. Qual é o comprimento de onda de de Broglie desses elétrons? Se o potencial for duplicado, qual será o novo comprimento de onda?
2. Quais são os tamanhos dos objetos necessários para observarem-se os efeitos difrativos de nêutrons com energia cinética de 10 MeV? Dado: $m_n = 939,3 \text{ MeV}/c^2$
3. (a) Qual o comprimento de onda de de Broglie para uma bola de massa $m = 0,3 \text{ kg}$ movimentando-se com uma velocidade de 5 m/s?
(b) Qual o comprimento de onda de de Broglie para um pequeno objeto (porém ainda macroscópico) com massa $m = 2,0 \times 10^{-9} \text{ g}$ que move-se com velocidade 10^{-3} m/s ?
(c) Qual o comprimento de onda de de Broglie para um elétron com energia cinética de 50 eV?
4. Considere um elétron livre com com energia 0,5 keV que terá sua posição e momento determinados no mesmo instante. Se a posição for determinada com uma precisão de 4 Å, qual será a porcentagem de incerteza em seu momento?

Respostas:

1. 8,7 pm e 6,1 pm.
2. 9 fm.
(a) $4,4 \times 10^{-34} \text{ m}$;
(b) $3,3 \times 10^{-19} \text{ m}$;
(c) 0,17 nm.
3. 1,1%.
4. $1,6 \times 10^8 \text{ s}^{-1}$ e $5,3 \times 10^{-12}$.

IV. APÊNDICE: ONDAS

Ondas progressivas são descritas pela função: $y(x, t) = y_0 \cos(kx - \omega t)$, onde o argumento da função cosseno é a chamada *fase* da onda: $\Phi = kx - \omega t$.

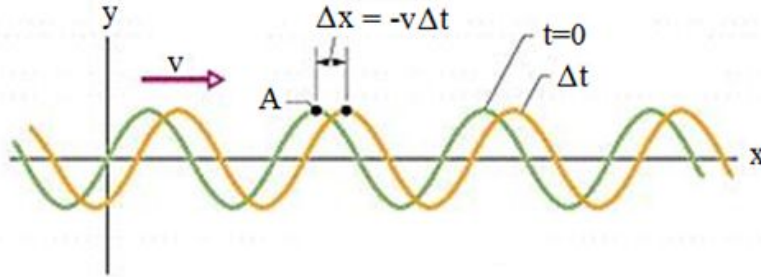


Figura 12: Ondas progressivas.

onde:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \text{ é a frequência angular, medida em } [\omega] = \text{rad/s} \quad (7)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ é número de onda angular, medido em } [\lambda] = \text{rad/m (ou, simplesmente, } [\lambda] = \text{m}^{-1}) \quad (8)$$

Nas ondas progressivas, a fase é constante:

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0 \Rightarrow k \frac{dx}{dt} - \omega = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow v_f \equiv \frac{\omega}{k}, \quad (9)$$

onde definimos a *velocidade de fase*. Ademais:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} \Rightarrow v_f = \lambda f \quad (10)$$

Agora, derivando-se a função de onda, parcialmente, duas vezes na coordenada x e no tempo t :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -k y_0 \text{ sen}(kx - \omega t) \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 y_0 \cos(kx - \omega t) = -k^2 y(x, t)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = +\omega y_0 \text{ sen}(kx - \omega t) \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y_0 \cos(kx - \omega t) = -\omega^2 y(x, t)$$

Dividindo-se os dois resultados acima, vem:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} / \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{k^2}{\omega^2} = \frac{1}{v_f^2}$$

Assim, chegamos à equação diferencial de onda:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v_f^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (11)$$

A. Pacotes de onda

A interferência entre duas ondas é calculada pela soma de suas funções de onda:

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

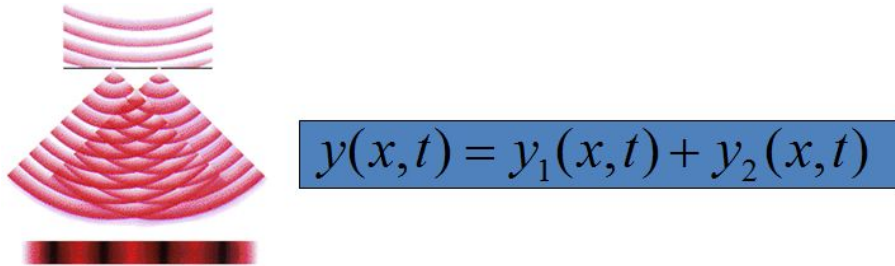


Figura 13: Interferência de duas ondas.

Sejam duas ondas:

$$y_1(x, t) = y_0 \cos(k_1x - \omega_1t)$$

$$y_2(x, t) = y_0 \cos(k_2x - \omega_2t)$$

com uma pequena diferença de frequência entre elas:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1, \Delta k = k_2 - k_1$$

A interferência entre elas produz o fenômeno do *batimento*:

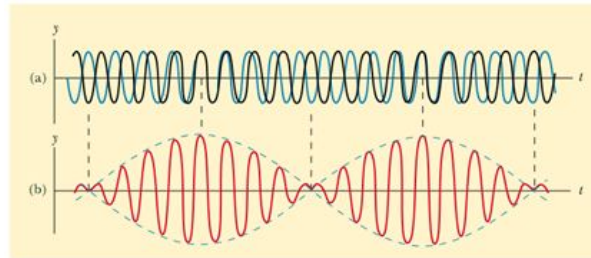


Figura 14: Frequência de batimento.

Pois:

$$y(x, t) = y_0 \cos(k_1 x - \omega_1 t) + y_0 \cos(k_2 x - \omega_2 t) = 2y_0 \cos\left(\frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta \omega}{2} t\right) \cos(\bar{k} x - \bar{\omega} t),$$

onde definimos os valores médios:

$$\bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

e usamos que:

$$\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 = \cos\left(\bar{\alpha} + \frac{\Delta \alpha}{2}\right) + \cos\left(\bar{\alpha} - \frac{\Delta \alpha}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{\Delta \alpha}{2}\right) \cos \bar{\alpha}$$

Estendendo-se este procedimento para várias ondas, produz-se um *pacote de ondas*:

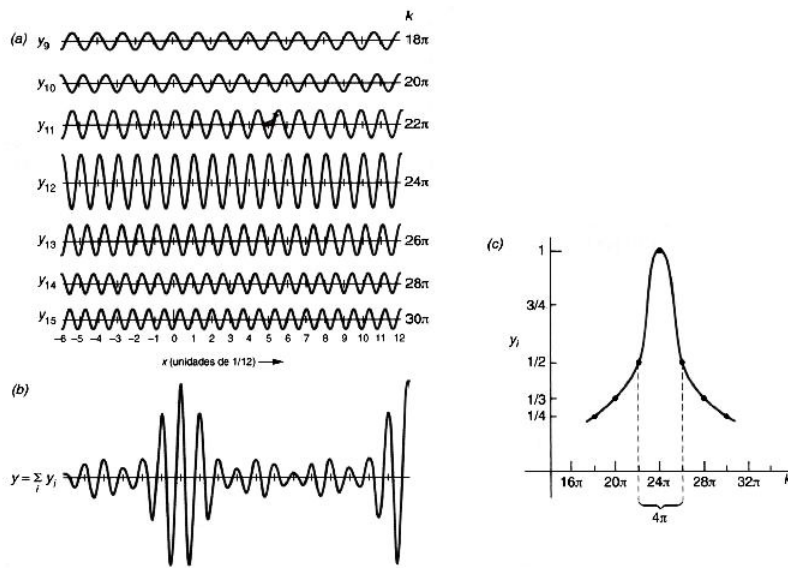


Figura 15: Pacote de ondas.

com *velocidade de grupo*:

$$v_g = \frac{\Delta \omega}{\Delta k}$$

no limite $\Delta \omega \rightarrow 0, \Delta k \rightarrow 0$:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

(12)

- se o meio for não-dispersivo:

$$\omega = v_f \cdot k \Rightarrow \frac{d\omega}{dk} = v_g = v_f$$

- se o meio for dispersivo:

$$\omega = v_f(k) \cdot k \Rightarrow \frac{d\omega}{dk} = v_g = v_f + k \frac{dv_f}{dk}$$

B. Relações de indeterminação clássicas

Na figura 15, fizemos a superposição de sete funções com amplitudes comprimento de onda ligeiramente diferentes entre si. A distribuição de amplitudes da figura (c) indica que $\Delta k \sim 4\pi \sim 12$ e largura do pacote obtido na figura (b) é ligeiramente maior que a escala em x , ou seja, $\Delta x \sim 1/12$. Assim:

$$\boxed{\Delta k \Delta x \sim 1} \quad (13)$$

ademais:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \boxed{\frac{dk}{d\lambda} = -\frac{2\pi}{\lambda^2}} \Rightarrow \quad (14)$$

$$\Rightarrow \Delta k = \frac{2\pi}{\lambda^2} \Delta \lambda \Rightarrow \Delta k \Delta x = \frac{2\pi}{\lambda^2} \Delta \lambda \Delta x \sim 1 \Rightarrow \boxed{\Delta \lambda \Delta x \sim \frac{\lambda^2}{2\pi}} \quad (15)$$

C. Pacotes de ondas de matéria

Usando as relações de de Broglie e de Einstein, calculamos a velocidade de fase:

$$v_f = \lambda f = \frac{\hbar E}{p \hbar} = \frac{E}{p},$$

então, para uma partícula livre de energia cinética:

$$E = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow v_f = \frac{E}{p} = \frac{p}{2m} = \frac{\cancel{p} v}{2 \cancel{p}} = \frac{v}{2},$$

portanto, a velocidade de fase não é a velocidade da partícula, mas a sua metade. Agora, para a velocidade de grupo, temos:

$$E = hf = \hbar\omega \Rightarrow \omega = E/\hbar \Rightarrow d\omega = dE/\hbar$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \Rightarrow k = p/\hbar \Rightarrow dk = dp/\hbar$$

$$\Rightarrow v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp},$$

mas de:

$$E = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow \frac{dE}{dp} = \frac{p}{m} = v \Rightarrow \boxed{v_g = v}.$$

Portanto, **a velocidade da partícula coincide com a velocidade de grupo da onda associada.**