Notas de Aula de Física Quântica (BCK0103)

Prof. Dr. Marcelo Augusto Leigui de Oliveira
Universidade Federal do ABC

A equação de Schrödinger

I. A FUNÇÃO DE ONDA

O experimento da dupla fenda com elétrons:

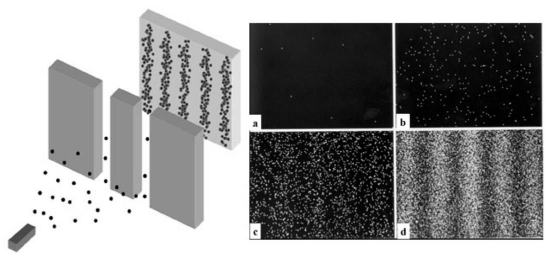

Figura 1: Experimento de interferência com elétrons.

Em 1924, Born[1] propõe a **função de onda** $\Psi(x,t)$, uma função complexa da posição da partícula em função do tempo, tal que:

$$|\Psi(x,t)|^2 = \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)$$

mede a distribuição de **densidade de probabilidade** de encontrar a partícula na posição x e no instante de tempo t e

$$P(x,t)dx = |\Psi(x,t)|^2 dx$$

é a **probabilidade** de encontrar o elétron em dx.

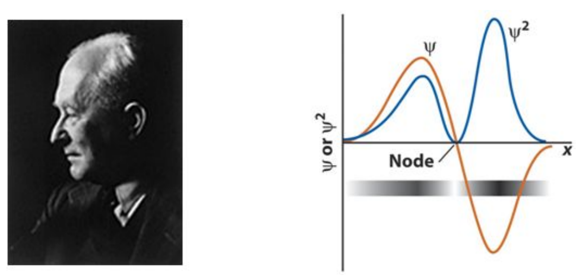

Figura 2: Max Born e o módulo quadrado da função de onda.

[1]Max Born (1882-1970), físico e matemático alemão; Nobel de física (1954).

Exemplo 1:

$$\psi(x) = \cos x \Rightarrow |\psi(x)|^2 = (\cos x)^*(\cos x) = \cos^2 x$$

Exemplo 2: a relação de Euler

$$\psi(x) = e^{ix} = \cos x + i\ \text{sen} x \Rightarrow$$

$$|\psi(x)|^2 = (\cos x + i\ \text{sen} x)^*(\cos x + i\ \text{sen} x) = (\cos x - i\ \text{sen} x)(\cos x + i\ \text{sen} x) =$$

$$= \cos^2 x + \cancel{i \cos x\ \text{sen} x} - \cancel{i \cos x\ \text{sen} x} - i^2\ \text{sen}^2 x = \cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1,$$

ou seja, 100% de probabilidade da partícula estar em qualquer lugar!

II. A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER

Figura 3: Erwin Schrödinger.

Em 1926, Schrödinger[2] publicou a equação de onda que governa a propogação das ondas de matéria (elétrons, prótons, nêutrons, átomos, ...).

A energia total de uma partícula de massa m é dada por:

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x,t), \tag{1}$$

onde $V(x,t)$ é um potencial dependente da posição e do tempo.

Por de Broglie sabemos que:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$

e por Einstein sabemos que:

$$E = hf = \hbar\omega.$$

Substituindo na equação 1, vem:

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V(x,t). \tag{2}$$

Agora vamos introduzir a função de onda $\psi(x,t)$ como incógnita, portanto, a equação que procuramos é uma equação diferencial. Ademais, para garantir o fenômeno da interferência, a equação diferencial deve ser linear:

$\rightarrow$ se $\Psi_1(x,t)$ e $\Psi_2(x,t)$ são soluções da equação, então a combinação linear: $\Psi(x,t) = a_1\Psi_1(x,t) + a_2\Psi_2(x,t)$ também é solução.

A. *Partícula livre*

Uma partícula livre da ação de forças está em uma região do espaço em que o potencial é constante: $V(x,t) = V$. Então, a equação 2 se reduz a:

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V. \tag{3}$$

[2]Erwin Schrödinger (1887-1961), físico austríaco. Nobel de física (1933).

A função da onda plana progressiva: $\Psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$ pode satisfazê-la, se notarmos que:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i\omega A e^{i(kx-\omega t)} = -i\omega \Psi,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = ikAe^{i(kx-\omega t)} \Rightarrow \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = (ik)^2 A e^{i(kx-\omega t)} = -k^2\Psi.$$

Assim, multiplicando-se a equação 3 pela função Ψ, vem:

$$\hbar(\omega\Psi) = \frac{\hbar^2(k^2\Psi)}{2m} + V\Psi \Rightarrow \hbar(i\frac{\partial \Psi}{\partial t}) = \frac{\hbar^2}{2m}(-\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}) + V\Psi \Rightarrow \boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V\Psi = i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t}},$$

que é a equação de Schrödinger da partícula livre. Esta equação é válidada sob duas hipóteses:

1. Uma solução de onda plana: $\Psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$;
2. Um potencial constante $V(x,t) = V$ (partícula livre).

B. *Potenciais dependentes da posição e do tempo*

A equação de Schrödinger para outros potenciais $V(x,t)$ (dependentes da posição e do tempo) toma a mesma forma e sua validade é postulada:

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}}. \tag{4}$$

A função de onda tem a mesma interpretação: por si só, ela não tem interpretação física, mas o seu módulo quadrado tem a interpretação probabilística, isto é:

$$P(x,t)dx = |\Psi(x,t)|^2 dx = \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)dx$$

representa a probabilidade de encontrar-se a partícula entre x e $x+dx$ no instante t. Assim, a probabilidade da partícula estar entre dois pontos x_1 e x_2 no instante t:

$$P(x,t)dx = \int_{x_1}^{x_2} \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)dx.$$

E, em todo o espaço, vem a *condição de normalização*:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)dx = 1}. \tag{5}$$

C. *Separação de variáveis*

Seja um potencial independente do tempo: $V(x,t) = V(x)$. Neste caso, podemos propor, para a função de onda, uma solução na forma $\Psi(x,t) = \psi(x)\phi(t)$ de tal forma que é possível resolver a equação de Schrödinger (diferencial parcial) pelo método da separação de variáveis. Substituindo-se a solução proposta na equação de Schrödinger, vem:

$$\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\psi(x)\phi(t)] + V(x)[\psi(x)\phi(t)] = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}[\psi(x)\phi(t)] \Rightarrow \\
-\frac{\hbar^2}{2m}\phi(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) + V(x)\psi(x)\phi(t) = i\hbar\psi(x)\frac{\partial}{\partial t}\phi(t) \stackrel{\div\psi(x)\phi(t)}{\Longrightarrow} \\
-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi(x)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) + V(x) = i\hbar\frac{1}{\phi(t)}\frac{\partial}{\partial t}\phi(t) = \text{const.}
\end{aligned}$$

Note que, na última equação, temos funções que dependem somente de uma variável em cada lado da igualdade, ou seja, somente da variável espacial x à esquerda e somente da variável temporal t à direita. Isto só é possível se cada lado for constante separadamente. Definindo-se uma *constante de separação* E, podemos tratar separadamente as variáveis em 2 equações:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi(x)}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + V(x) = E \Rightarrow \boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)}, \tag{6}$$

$$i\hbar\frac{1}{\phi(t)}\frac{d}{dt}\phi(t) = E \Rightarrow \boxed{i\hbar\frac{d\phi(t)}{dt} = E\phi(t)}. \tag{7}$$

Note, ainda, que substituimos o símbolo da derivada parcial pelo da derivada ordinária ($\partial \to d$), uma vez que, agora, estamos tratando de funções de uma única variável em cada equação.

1) Solução da parte temporal

Podemos encontrar a solução da equação 7, válida para todos os potenciais independentes do tempo:

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{d\phi}{dt} = E\phi \Rightarrow \frac{d\phi}{\phi} = \frac{E}{i\hbar}dt \Rightarrow \int_{\phi_0}^{\phi(t)}\frac{d\phi}{\phi} = \frac{E}{i\hbar}\int_0^t dt \Rightarrow \\
\ln\ \phi(t) - \ln\ \phi_0 = \frac{-iE}{\hbar}(t-0) \Rightarrow \ln\ \frac{\phi(t)}{\phi_0} = \frac{-iEt}{\hbar} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\boxed{\phi(t) = \phi_0 e^{-iEt/\hbar}}. \tag{8}$$

Tomando a primeira derivada da solução acima e lembrando que as funções de onda devem satisfazer à derivada temporal:

$$\frac{d\phi}{dt} = -i\omega\phi,$$

$$\frac{d\phi}{dt} = -i\frac{E}{\hbar}(\phi_0 e^{-iEt/\hbar}) = -i\left(\frac{E}{\hbar}\right)\phi,$$

vem que a constante de separação é a energia total da partícula: $E = \hbar\omega$.

2) A parte espacial

A parte espacial da equação de Schrödinger foi dada na equação 6:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x),$$

que é denominada *equação de Schrödinger independente do tempo*. Suas soluções devem ser encontradas, em cada caso, para cada função potencial $V(x)$ a que a partícula estiver sujeita, respeitando-se as seguintes *condições de contorno* em todo o espaço:

1. $\psi(x)$ e $\frac{d}{dx}\psi(x)$ devem ser contínuas;
2. $\psi(x)$ e $\frac{d}{dx}\psi(x)$ devem ser unívocas;
3. $\psi(x)$ e $\frac{d}{dx}\psi(x)$ devem ser finitas.

A última condição aliada à condição de normalização, da equação 5, impõe que a função deve ir a zero no infinito, caso contrário a condição de normalização não poderia ser satisfeita:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\psi(x) = 0.$$

Note, ademais, que introduzindo-se a solução da parte temporal 8, a condição de normalização pode reduzir-se a:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*(x,t)\Psi(x,t)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)e^{+iEt/\hbar}\psi(x)e^{-iEt/\hbar}dx = \boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\psi(x)dx = 1}. \tag{9}$$

III. VALORES ESPERADOS (MÉDIOS) E OPERADORES

A. Densidade de probabilidade e valores médios

Uma vez que a integral:

$$P(x,t) = \int_{x_1}^{x_2}\Psi^*(x,t)\ \Psi(x,t)\ dx$$

mede a probabilidade de se encontrar a partícula entre x_1 e x_2 no instante t, então o integrando $\Psi^*(x,t)\ \Psi(x,t)$ é a *densidade de probabilidade* de encontrar a partícula em x no instante t:

$$\boxed{\rho(x,t) = \Psi^*(x,t)\ \Psi(x,t)} \tag{10}$$

e, como decorrência da condição de normalização, temos, em todo o espaço:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x,t)\ dx = 1.$$

Assim, podemos calcular o valor esperado (ou a média) de uma função qualquer por:

$$< f(x,t) >= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \rho(x,t)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^*(x,t)\ f(x)\ \Psi(x,t)\ dx, \tag{11}$$

já que $\rho(x,t)$ é o **peso** na distribuição da função $f(x,t)$ em torno da posição x e no instante t.

Ou, no caso independente do tempo, por:

$$< f(x) >= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x)\, f(x)\, \psi(x)\, dx. \tag{12}$$

Por exemplo, o valor esperado da posição é dado por:

$$< x >= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x,t)\, x\, \Psi(x,t)\, dx, \tag{13}$$

ou, no caso independente do tempo, por:

$$< x >= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x)\, x\, \psi(x)\, dx. \tag{14}$$

Agora, vimos que a derivada segunda da função de onda é proporcional a menos ela mesma:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) = -k^2\Psi(x,t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) = (ik)^2\Psi(x,t) = \left(\frac{i\hbar k}{\hbar}\right)^2 \Psi(x,t) = \left(\frac{ip}{\hbar}\right)^2 \Psi(x,t),$$

de maneira que podemos associar ao momento linear um **operador**:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{ip}{\hbar}\right)^2 \Rightarrow \boxed{\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}}. \tag{15}$$

Assim, a partir da equação 12, definimos os valores médios:

$$< p >= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x)\, \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\, \psi(x)\, dx = -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x)\, \left[\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}\right]\, dx, \tag{16}$$

$$< p^2 >= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x)\, \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\, \psi(x)\, dx = -\hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x)\, \left[\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}\right]\, dx. \tag{17}$$

Analogamente, de:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = -i\omega\Psi(x,t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = \frac{-i\hbar\omega}{\hbar}\Psi(x,t) = \frac{-iE}{\hbar}\Psi(x,t)$$

e podemos associar à energia total um **operador**:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{-iE}{\hbar} \Rightarrow \boxed{\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}} \tag{18}$$

e o valor médio da energia total fica:

$$< E >= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x,t)\, \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\, \Psi(x,t)\, dx. \tag{19}$$

Por vezes, o operador energia total é chamado de *hamiltoniano* e definido pela soma das energias cinética e potencial:

$$\boxed{\hat{H} \equiv \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x,t)}, \tag{20}$$

tal que, da equação de Schrödinger dependente do tempo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) + V(x,t)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) \Rightarrow \boxed{\hat{H}\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)}.$$

Ou no caso independente do tempo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \Rightarrow \boxed{\hat{H}\psi(x) = E\psi(x)}.$$

E o valor esperado da energia cinética é:

$$< E_c > = < E - V(x) > = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x)\,[E - V(x)]\,\psi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x)\,\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\right]\,\psi(x)\,dx.$$

B. Corrente de densidade de probabilidade

Lembremos que $\rho(x,t) = \Psi^*(x,t)\,\Psi(x,t)$ é a *densidade de probabilidade* de encontrar a partícula em x no instante t. Para simplificar a notação, vamos deixar de lado por um momento as dependências das funções: $\rho = \Psi^*\,\Psi$.

Partindo da equação de Schrödinger, multiplicando-a pelo complexo conjugado da função de onda:

$$\Psi^*\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right) \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\Psi^*\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V\Psi^*\Psi = i\hbar\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t} \tag{21}$$

e tomando-se o complexo conjugado de toda estas equações:

$$\Psi\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)^* \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\Psi\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial x^2} + V\Psi\Psi^* = -i\hbar\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}. \tag{22}$$

Podemos subtrair a equação 21 da 22:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\Psi^*\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \Psi\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial x^2}\right) = i\hbar\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial t}(\Psi^*\Psi) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Psi^*\Psi) + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{-i\hbar}{2m}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\right)\right] = 0,$$

onde no primeiro termo indentificamos a derivada temporal da densidade de probabilidade. Agora, da física de meios contínuos, numa dada região, a variação temporal da densidade relaciona-se com o fluxo de corrente pela *equação da continuidade*:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0, \tag{23}$$

definimos, assim, a *corrente de densidade de probabilidade* por:

$$\boxed{j = \frac{-i\hbar}{2m}\left(\Psi^*\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi\frac{\partial \Psi^*}{\partial x}\right)}, \tag{24}$$

ou, incluindo-se as dependências funcionais:

$$j(x,t) = \frac{-i\hbar}{2m}\left[\Psi^*(x,t)\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x} - \Psi(x,t)\frac{\partial \Psi^*(x,t)}{\partial x}\right]. \tag{25}$$

Note, agora, que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} j\, dx = \frac{-i\hbar}{2m}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\Psi^*\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi\frac{\partial \Psi^*}{\partial x}\right)\, dx = \frac{-i\hbar}{2m}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*\frac{\partial \Psi}{\partial x}\, dx - \cancel{\Psi^*\Psi|_{-\infty}^{\infty}} + \int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*\frac{\partial \Psi}{\partial x}\, dx\right) \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} j\, dx = \frac{-i\hbar}{m}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*\frac{\partial \Psi}{\partial x}\, dx = \frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*\left(-i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)\, dx = \frac{<\hat{p}>}{m} = <\hat{v}> .$$

C. Partícula num estado ligado e no caso estacionário

A função de onda de uma partícula sujeita a um potencial independente do tempo (caso estacionário) é: $\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$. Neste caso, então:

$$\rho(x,t) = \Psi^*(x,t)\,\Psi(x,t) = \psi^*(x)\cancel{e^{+iEt/\hbar}}\psi(x)\cancel{e^{-iEt/\hbar}} = \psi^*(x)\psi(x) = \rho(x) \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

que na equação da continuidade implica que a densidade de corrente de probabilidade deve ser constante:

$$\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial j}{\partial x} = 0 \Rightarrow j(x) = const.$$

Agora, se além disso, a partícula encontrar-se num estado ligado, para além da região classicamente permitida, sua energia será sempre menor que o potencial: $E < V(x)$. Desta forma, para posições muito afastadas, a função de onda sempre tende a zero:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\psi(x) = 0.$$

E, como no caso estacionário, $j(x)$ é:

$$j(x) = \frac{-i\hbar}{2m}\left[\psi^*(x)\frac{\partial \psi(x)}{\partial x} - \psi(x)\frac{\partial \psi^*(x)}{\partial x}\right], \tag{26}$$

que só pode ser zero em todo o espaço:

$$j(x) = const. = 0$$

De onde concluímos também que:

$$<\hat{p}>= 0,$$

ou seja, em média, ou a partícula não se movimenta ou fica batendo nas paredes do potencial, gastando tempos iguais se movendo para a esquerda ou para a direita.

IV. EXERCÍCIOS

1. Mostre diretamente a partir da equação de Schrödinger independente do tempo que $< p^2 >=< 2m[E - V(x)] >$ para qualquer potencial $V(x)$ e que $< p^2 >=< 2mE >$ para uma partícula confinada dentro de um poço de potencial, mas movendo-se livremente em seu interior.

2. Seja $\psi(x) = A\text{sen}(\pi x/L)$ a função de onda do estado fundamental de um poço quadrado infinito de largura L. Se $< x >$ e $< x^2 >$ representam os valores médios de x e de x^2, respectivamente, para este estado, calcule:

   (a) $\sigma_x = \sqrt{< x^2 > - < x >^2}$;

   (b) $\sigma_p = \sqrt{< p^2 > - < p >^2}$;

   (c) $\sigma_x \sigma_p$.

   Os resultados são compatíveis com o princípio da incerteza? Justifique.

3. A partir da equação de Schrödinger mostre que o o valor médio da energia cinética de uma partícula é dado por:

$$< E_c >= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} \right] dx.$$

4. Mostre que no caso estacionário em uma dimensão, ou seja, para $\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$, e para um estado ligado qualquer:

   (a) a corrente de densidade de probabilidade é nula em qualquer ponto do espaço;

   (b) $< p >= 0$, com o resultado do item anterior e integrando por partes.

5. Para o seguinte estado estacionário de uma partícula de energia E:

$$\Psi(x,t) = [C_+ e^{ipx/\hbar} + C_- e^{-ipx/\hbar}] e^{-iEt/\hbar},$$

   sendo $C_\pm$ constantes, determine:

   (a) a densidade de probabilidade, $\rho = |\Psi(x,t)|^2$;

   (b) a densidade de corrente de probabilidade, $j = \frac{-i\hbar}{2m} \left[\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right]$;

   (c) verifique que $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0$.

Respostas:

1. demonstração.

2. (a) $\sigma_x = \sqrt{-\frac{L^2}{2\pi^2} + \frac{L^2}{12}}$;

   (b) $\sigma_p = \frac{h}{2L}$;

   (c) $\sigma_x \sigma_p = \frac{h}{2} \sqrt{-\frac{1^2}{2\pi^2} + \frac{1}{12}}$; resultados compatíveis.

3. demonstração.

4. (a) demonstração;
   (b) demonstração.
5. (a) $\rho = |C_+|^2 + |C_-|^2 + C_+^* C_- e^{-2ikx} + C_-^* C_+ e^{2ikx}$;
   (b) $j = \frac{\hbar k}{m}(|C_+|^2 - |C_-|^2)$;
   (c) demonstração.