

## Notas de Aula de Física Quântica (BCK0103)

Prof. Dr. Marcelo Augusto Leigui de Oliveira

**Reflexão e transmissão de ondas**

## I. INTRODUÇÃO

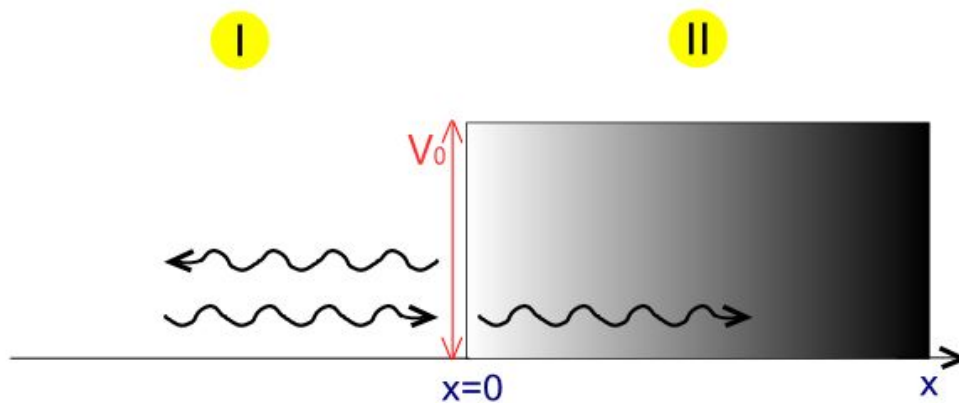


Figura 1: Reflexão e transmissão de ondas.

Estudo de estados não ligados, em que  $E > V(x)$  e, conseqüentemente,  $\psi(x)$  e  $\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}$  têm sinais opostos:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \Rightarrow \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)]\psi(x)$$

Além disso, nestes casos, as funções de onda não são normalizáveis:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx \rightarrow \infty,$$

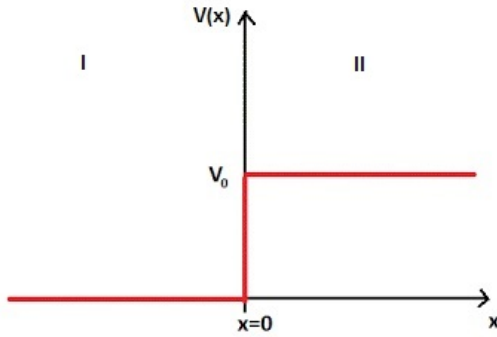
contudo, é possível limitar a integral a dois limites arbitrários:

$$\int_a^b |\psi(x)|^2 dx = \int_a^b \rho dx = \int_a^b dN = N,$$

onde  $\rho = \frac{dN}{dx}$  é a densidade de partículas no feixe,  $dN$  é o número de partículas em  $dx$  e  $N$  é o número de partículas entre  $a$  e  $b$ .

## II. O POTENCIAL DEGRAU

O potencial degrau é um sistema idealizado para descrever mudanças (bruscas) de meios de propagação. Sejam duas regiões (I e II) com uma forte descontinuidade de potencial entre elas:



$$V(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ para } x < 0 \\ V_0 & , \text{ para } x > 0 \end{cases}$$

Figura 2: O potencial degrau.

A. *Partícula de energia total  $E > V_0$  movendo-se da esquerda para a direita*

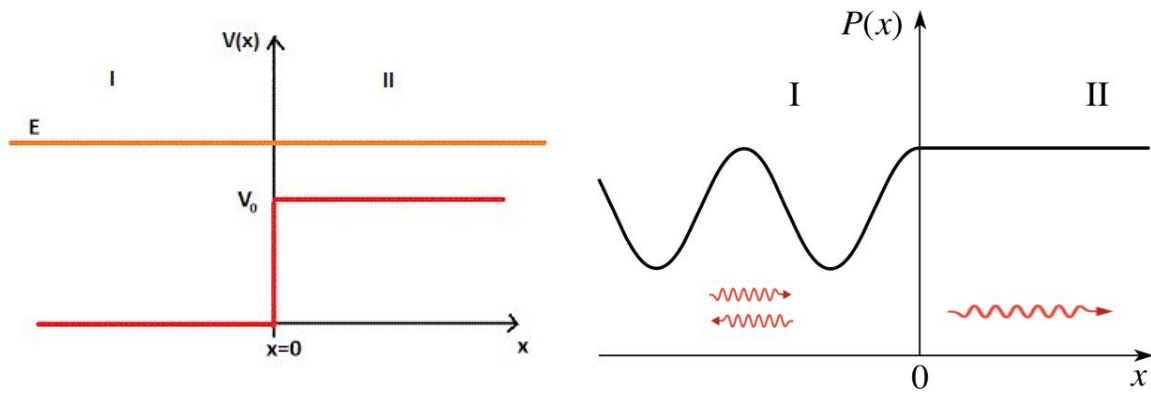


Figura 3: Caso A: partícula incidente com  $E > V_0$ .

Vejamos, inicialmente, este caso pela física clássica:

$$\text{para } x < 0 : E = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

$$\text{para } x > 0 : E = \frac{mv^2}{2} + V_0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(E - V_0)}{m}}$$

Agora, pela física quântica:

$$\begin{aligned} \text{I) para } x < 0 : \quad & \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -k_1^2\psi(x), \quad k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \\ \text{II) para } x > 0 : \quad & \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -k_2^2\psi(x), \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar} \end{aligned} ,$$

cujas soluções são:

$$\begin{aligned} \text{I) } \psi_I(x < 0) &= A e^{ik_1x} + B e^{-ik_1x} \\ &\quad (\rightarrow) \quad (\leftarrow) \\ \text{II) } \psi_{II}(x > 0) &= C e^{ik_2x} + D e^{-ik_2x} \\ &\quad (\rightarrow) \quad (\leftarrow) \end{aligned}$$

As condições de contorno (continuidade nas fronteiras) levam a:

$$\begin{aligned} \psi_I(0) = \psi_{II}(0) &\Rightarrow A + B = C \\ \frac{d\psi_I}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{d\psi_{II}}{dx} \Big|_{x=0} &\Rightarrow k_1A - k_1B = k_2C \end{aligned}$$

Substituindo-se na última equação:

$$\begin{aligned} C = A + B \Rightarrow k_1A - k_1B = k_2A + k_2B &\Rightarrow B = \left( \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right) A \\ B = C - A \Rightarrow k_1A - k_1C + k_1A = k_2C &\Rightarrow C = \left( \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \right) A \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} &= \frac{\sqrt{2mE}/\hbar - \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar}{\sqrt{2mE}/\hbar + \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar} = \frac{\sqrt{E} - \sqrt{E - V_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E - V_0}} \\ \frac{2k_1}{k_1 + k_2} &= \frac{2\sqrt{2mE}/\hbar}{\sqrt{2mE}/\hbar + \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar} = \frac{2\sqrt{E}}{\sqrt{E} + \sqrt{E - V_0}} \end{aligned}$$

Definindo-se os coeficientes de reflexão  $R$  e de transmissão  $T$ :

$$\begin{aligned} R &= \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left( \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 \\ T &= \frac{k_2 |C|^2}{k_1 |A|^2} = \frac{k_2}{k_1} \frac{4k_1^2}{(k_1 + k_2)^2} = \frac{4k_1k_2}{(k_1 + k_2)^2} \end{aligned}$$

que medem as porcentagens (em energia) das ondas que são refletidas e transmitidas. Note que  $R + T = 1$ :

$$R + T = \frac{(k_1 - k_2)^2 + 4k_1k_2}{(k_1 + k_2)^2} = \frac{k_1^2 + k_2^2 - 2k_1k_2 + 4k_1k_2}{(k_1 + k_2)^2} = \frac{k_1^2 + k_2^2 + 2k_1k_2}{(k_1 + k_2)^2} = \frac{(k_1 + k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} = 1$$

Observações:

1. o coeficiente de reflexão  $R$  não é nulo para  $E > V_0$ ;
2.  $R$  não depende do sinal de  $k_1 - k_2$ .

E como:

$$k = \frac{p}{\hbar} = \frac{2\pi}{\lambda}, \text{ se } k_1 > k_2 \Rightarrow \begin{cases} p_1 > p_2 \\ \lambda_1 < \lambda_2 \end{cases}$$

B. Partícula de energia total  $E < V_0$  movendo-se da esquerda para a direita

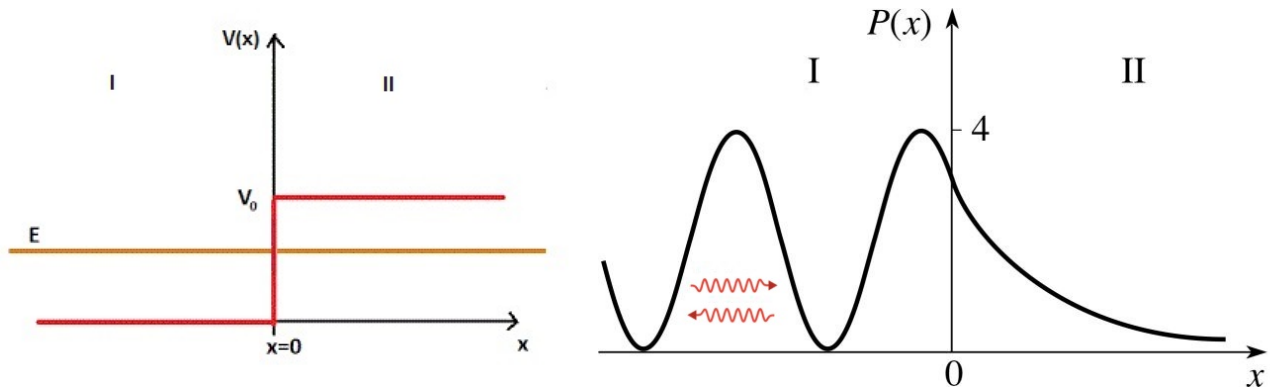


Figura 4: Caso B partícula incidente com  $E < V_0$ .

Classicamente, esperamos que todas as partículas sejam refletidas. Mas pela física quântica:

$$\begin{aligned} \text{I) para } x < 0 : \quad & \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -k_1^2\psi(x), \quad k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \\ \text{II) para } x > 0 : \quad & \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -k_2^2\psi(x), \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar} = \frac{i\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \equiv i\alpha \end{aligned}$$

com soluções:

$$\begin{aligned} \text{I) } \psi_I(x < 0) &= Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \\ &\quad (\rightarrow) \qquad \qquad \qquad (\leftarrow) \\ \text{II) } \psi_{II}(x > 0) &= Ce^{ik_2x} = Ce^{-\alpha x} \\ &\quad (\text{queda exponencial}) \end{aligned}$$

Neste caso:

$$\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} = \frac{\sqrt{E} - i\sqrt{V_0 - E}}{\sqrt{E} + i\sqrt{V_0 - E}} = \frac{a - ib}{a + ib} \Rightarrow |B|^2 = B^*B = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^* \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right) A^*A = |A|^2,$$

de onde concluímos:

$$R = 1, T = 0$$

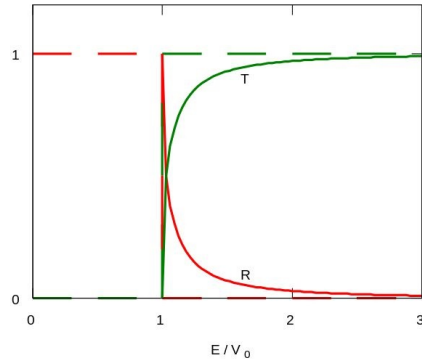


Figura 5: Coeficientes de reflexão e de transmissão em função da energia.

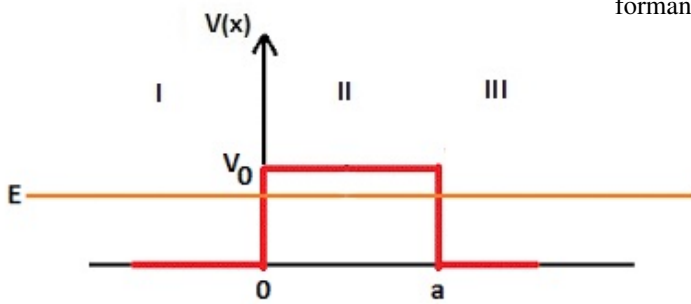
Na região II:

$$\psi_{II}(x) = Ce^{-\alpha x} \Rightarrow |\psi_{II}(x)|^2 = |C|^2 e^{-2\alpha x},$$

indicando que existe uma probabilidade (exponencialmente decrescente) da partícula ser encontrada na região proibida classicamente.

### III. BARREIRA DE POTENCIAL

Seja agora um potencial com dois pontos de descontinuidade, formando uma barreira:



$$V(x) = \begin{cases} V_0 & , \text{ para } 0 < x < a \\ 0 & , \text{ para } x < 0 \text{ ou } x > a \end{cases}$$

Figura 6: A barreira de potencial.

A. Caso  $E < V_0$ :

As soluções são:

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad \psi_I(x < 0) &= Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \\ &\quad (\rightarrow) \quad (\leftarrow) \\ \text{II)} \quad \psi_{II}(0 < x < a) &= Ce^{-\alpha x} + De^{\alpha x} \\ &\quad (\text{exponenciais}) \\ \text{III)} \quad \psi_{III}(x > a) &= Fe^{ik_1x} + Ge^{-ik_1x} \\ &\quad (\rightarrow) \quad (\leftarrow) \end{aligned} ,$$

onde

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad , \quad \alpha = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

Aplicando-se as condições de contorno, demonstra-se que:

$$T = \frac{|F|^2}{|A|^2} = \left[ 1 + \frac{\sinh^2(\alpha a)}{4E/V_0(1 - E/V_0)} \right]^{-1} = \left[ 1 + \frac{V_0^2 \sinh^2(\alpha a)}{4E(V_0 - E)} \right]^{-1} ,$$

que para  $\alpha a \gg 1$ , pode-se expandir o seno hiperbólico:

$$\sinh(\alpha a) = \frac{e^{\alpha a} - e^{-\alpha a}}{2} \approx \frac{e^{\alpha a}}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{4E(V_0 - E)}{4E(V_0 - E) + V_0^2 \sinh^2(\alpha a)} \approx \frac{4E(V_0 - E)}{4E(V_0 - E) + V_0^2 e^{2\alpha a}/4} \approx \frac{4E(V_0 - E)}{V_0^2 e^{2\alpha a}/4} = \frac{16E(1 - E/V_0)}{V_0 e^{2\alpha a}} \Rightarrow \\ T &= 16 \frac{E}{V_0} \left( 1 - \frac{E}{V_0} \right) e^{-2\alpha a} \end{aligned}$$

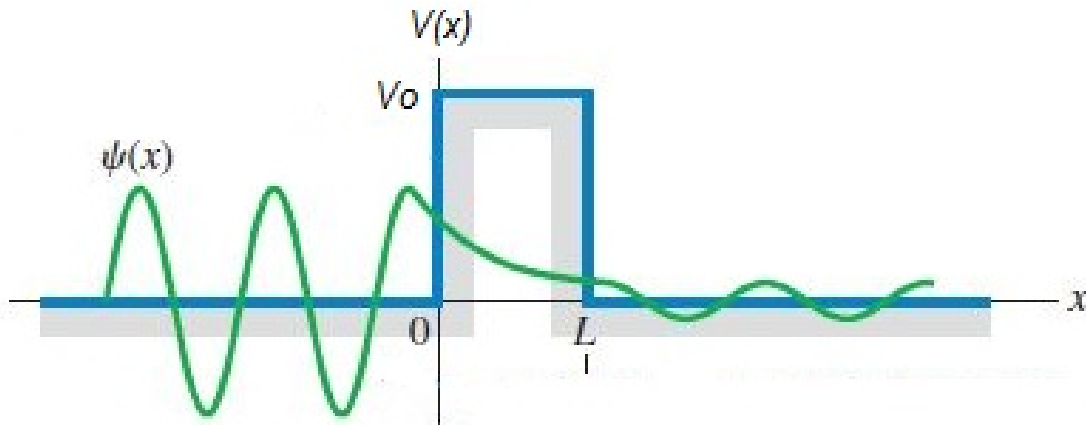


Figura 7: Penetração na barreira de potencial: *tunelamento*.

Aplicações da teoria quântica do tunelamento:

- (1928) Gamow e, independentemente, Gurney e Condon propuseram uma teoria para o decaimento nuclear alfa:

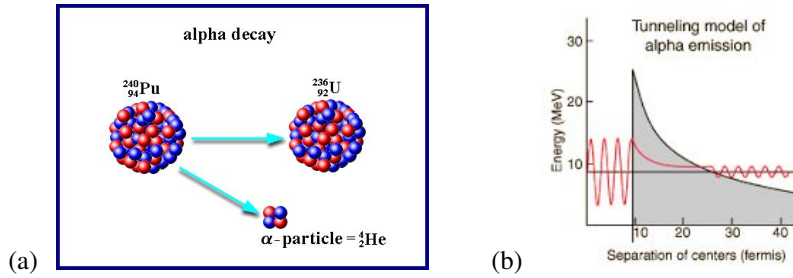


Figura 8: (a) decaimento  $\alpha$  do  $^{240}\text{Pu}$ ; (b) tunelamento da partícula  $\alpha$  pela barreira de potencial.

- reflexão total frustrada e telas sensíveis ao toque:

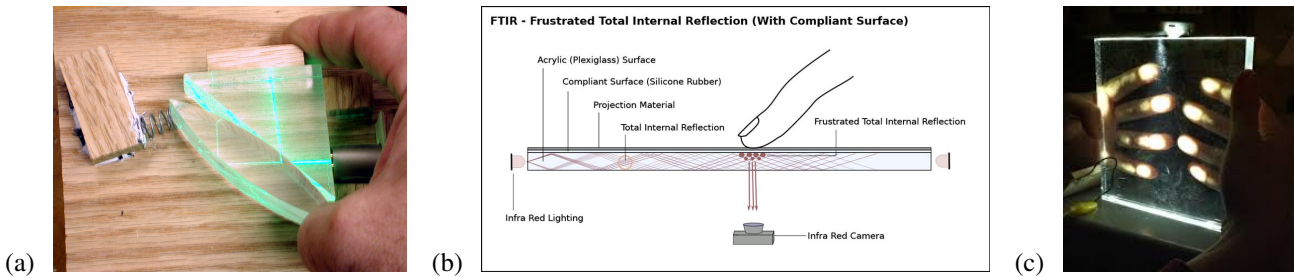


Figura 9: Reflexão total frustrada: (a) demonstracão do fenômeno; princípio de funcionamento das "touch screens"; (c) demonstracão.

- diodo zener:

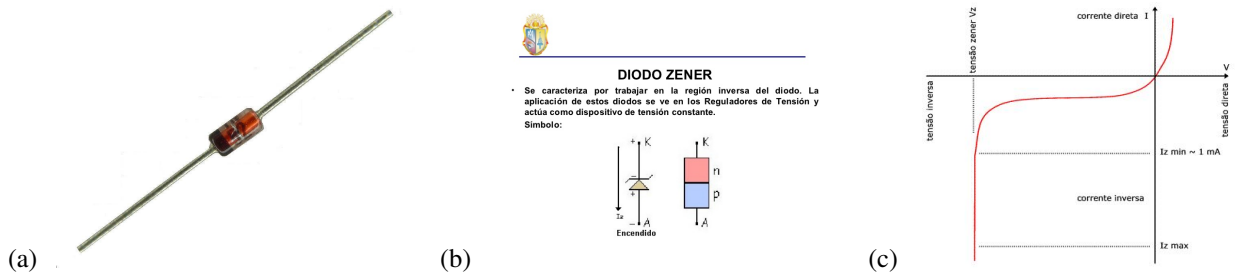
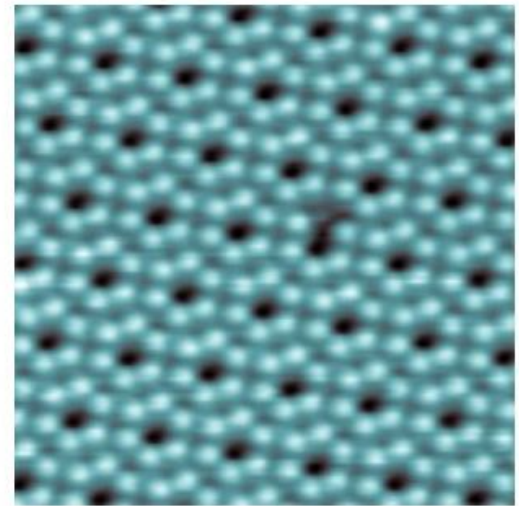
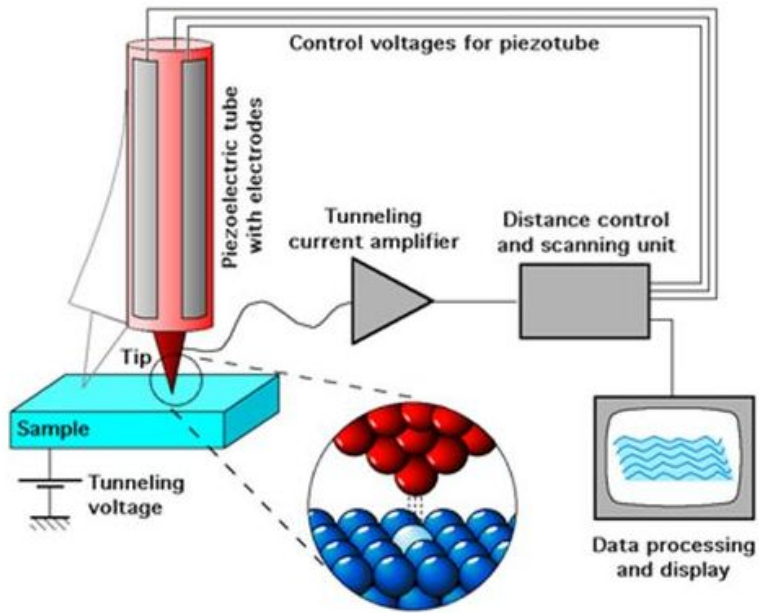


Figura 10: Diodo zener: (a) fotografia do componente; (b) diagrama esquemático; (c) curva característica.

- microscópio de tunelamento por varredura:



STM image of the Si(111)5x5 reconstructed surface

Figura 11: Microscópio de tunelamento por varredura.



## IV. EXERCÍCIOS

1. Considere o potencial degrau:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ para } x \leq 0 \text{ (região I)} \\ V_0 & , \text{ para } x > 0 \text{ (região II)} \end{cases}$$

em que  $V_0$  é uma constante positiva.

- (a) Sendo  $E = V_0/2$  a energia de cada partícula num feixe lançado inicialmente da região I e que se move em direção à região II, calcule o coeficiente de reflexão  $R$ . Neste caso, qual é o comportamento da função de onda de uma partícula na região II? É possível observar-se partículas nesta região em algum momento?
- (b) Para  $E = 2V_0$ , calcule o coeficiente de reflexão  $R$  e o coeficiente de transmissão  $T$ . Mostre que  $R + T = 1$ .
- (c) No caso do item (b) e considerando-se que o feixe inicial tem  $\sim 10^6$  partículas, qual seria o número de partículas refletidas?

2. Seja agora para um potencial definido por:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ para } x \leq 0 \text{ (região I)} \\ -V_0 & , \text{ para } x > 0 \text{ (região II)} \end{cases}$$

em que  $V_0$  é uma constante positiva, fazendo a velocidade da partícula aumentar na região II. Determine as funções de onda que são solução e refaça os itens (b) e (c) do exercício anterior.

3. Um feixe de elétrons de 1 eV incide sobre uma barreira retangular de 4 eV de altura e 1 nm de espessura.
- (a) Determine as probabilidades de transmissão e de reflexão para os elétrons do feixe;
- (b) Se os elétrons tivessem energia de 3,5 eV quais seriam os valores dessas probabilidades?
4. Um feixe de prótons com energia cinética de 50 MeV incide sobre um degrau de potencial de 30 MeV.
- (a) Qual a fração do feixe que é refletida?
- (b) Qual a fração do feixe que é transmitida?

Respostas:

1. (a)  $R = 1$ , na região II a função de onda cai exponencialmente com  $\psi(x) \propto e^{-\sqrt{mV_0}x/\hbar}$ ;
- (b)  $R = \frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})^2}$  e  $T = \frac{8\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2})^2}$ ;
- (c)  $2,9 \times 10^4$ .
2. (a) Soluções oscilatórias com  $k_1 = \sqrt{4mV_0}/\hbar$  (região I) e com  $k_2 = \sqrt{6mV_0}/\hbar$  (região II);
- (b)  $R = \frac{(2-\sqrt{6})^2}{(2+\sqrt{6})^2}$  e  $T = \frac{8\sqrt{6}}{(2+\sqrt{6})^2}$ ;
- (c)  $1,02 \times 10^4$ .
3. (a)  $T = 5,88 \times 10^{-8}$ ;
- (b)  $T = 1,25 \times 10^{-3}$ .
4. (a)  $\left(\frac{1-\sqrt{2/5}}{1+\sqrt{2/5}}\right)^2$ ;
- (b)  $1 - \left(\frac{1-\sqrt{2/5}}{1+\sqrt{2/5}}\right)^2$ .