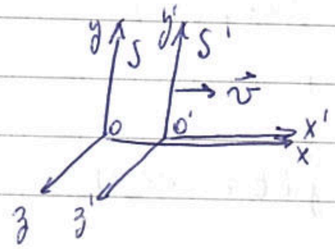
3) As transformações de Lorentz



em $t = t' = 0$: $S = S'$ (origens coincidem)

por simplicidade $\vec{v} = v\,\hat{x}$

as transformações de Galileu são ($v \ll c$)

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \iff \begin{cases} x = x' + vt' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

um pulso de luz é emitido em $t = t' = 0$ em $O = O'$:

em S: $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$ ou no caso $\vec{v} = v\hat{x}$: $\begin{cases} x = ct \\ x' = ct' \end{cases}$

em S': $x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$

Supondo ~~[illegible]~~ transformações lineares tais que $\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ x = \gamma(x' + vt') \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} ct = x = \gamma(x' + vt') = \gamma(ct' + vt') = \gamma(c+v)\,t' \\ ct' = x' = \gamma(x - vt) = \gamma(ct - vt) = \gamma(c-v)\,t \end{cases}$$

eliminando t (ou t'): $t' = \dfrac{ct}{\gamma(c+v)} \Rightarrow ct' = \dfrac{c^2 t}{\gamma(c+v)} = \gamma(c-v)\,t \Rightarrow$

$$\Rightarrow c^2 \cancel{t} = \gamma^2 (c^2 - v^2)\,\cancel{t} \Rightarrow 1 = \gamma^2 (1 - v^2/c^2) \Rightarrow$$

fator de Lorentz: $\boxed{\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$

voltando à eq dos tempos:

$ct' = \gamma(c - v)t \Rightarrow t' = \gamma(t - vt/c)$, mas $t = x/c$

$\Rightarrow t' = \gamma(t - vx/c^2)$

e analogamente a transf. inversa : $t = \gamma(t' + vx'/c^2)$

completando as transformações de Lorentz

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - vx/c^2) \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma(t' + vx'/c^2) \end{array}\right.}$$

onde $\boxed{\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$

outra dedução: supor que $\left\{\begin{array}{l} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t + \delta) \end{array}\right.$

e exigir que $x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$

$$\Downarrow$$

$$\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2\gamma^2(t + \delta)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma^2(x^2 - 2vxt + v^2t^2) + y^2 + z^2 = c^2\gamma^2(t^2 + 2\delta t + \delta^2)$$

como em $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$ não há termos lineares em t, eles devem se cancelar: $-2vxt = c^2 2\delta t \Rightarrow \delta = -vx/c^2$

$$\Rightarrow \boxed{t' = \gamma(t - vx/c^2)}$$

continuando:

$$x^2\gamma^2 + t^2\gamma^2 v^2 + y^2 + z^2 = t^2\gamma^2 c^2 + \frac{v^2 x^2}{c^4} c^2 \gamma^2 \Rightarrow$$

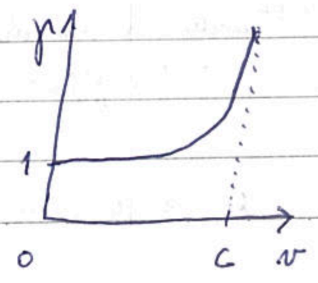
$$\Rightarrow x^2\gamma^2(1 - v^2/c^2) + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \gamma^2 (1 - v^2/c^2)$$

que deve ser igual a $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$$\gamma^2(1 - v^2/c^2) = 1 \Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$$

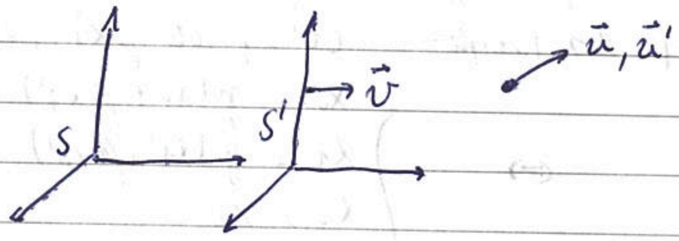
γ é adimensional e quando $v \to 0 : \gamma \to 1$

$v \to c : \gamma \to \infty$



$\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, $\beta = \dfrac{v}{c}$

Transformações de velocidades relativísticas:



Sabemos que: $u_x = \frac{dx}{dt}$, $u_y = \frac{dy}{dt}$, $u_z = \frac{dz}{dt}$

$u_x' = \frac{dx'}{dt'}$, $u_y' = \frac{dy'}{dt'}$, $u_z' = \frac{dz'}{dt'}$

derivando as transf. de Lorentz: $dx' = \gamma(dx - v\,dt)$

$dt' = \gamma(dt - v\,dx/c^2)$

$dy' = dy$, $dz' = dz$

Vem que:

$$u_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - v\,dt)}{\gamma(dt - v\,dx/c^2)} = \frac{(dx/dt - v)}{1 - v/c^2\, dx/dt} \Rightarrow u_x' = \frac{u_x - v}{1 - v u_x/c^2}$$

$$u_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - v\,dx/c^2)} = \frac{dy/dt}{\gamma(1 - v/c^2\, dx/dt)} \Rightarrow u_y' = \frac{u_y}{\gamma(1 - v u_x/c^2)}$$

$$u_z' = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma(dt - v\,dx/c^2)} = \frac{dz/dt}{\gamma(1 - v/c^2\, dx/dt)} \Rightarrow u_z' = \frac{u_z}{\gamma(1 - v u_x/c^2)}$$

e as transf. inversas:

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + v u_x'/c^2}, \quad u_y = \frac{u_y'}{\gamma(1 + v u_x'/c^2)}, \quad u_z = \frac{u_z'}{\gamma(1 + v u_x'/c^2)}$$

note que se $v \ll c$: $u_x' = u_x - v$, $u_y' = u_y$, $u_z' = u_z$ (transf. de Galileu)

ex. 1-4) veloc. relativa de raios cósmicos:

$\circ\!\longrightarrow$ (T) $\longleftarrow\!\circ$

$v_1 = 0{,}6c$ $\quad v_2 = -0{,}8c$

transf. de Galileu: $u_{2x}' = -0{,}8c - 0{,}6c = -1{,}4c$

$u_{1x}' = 0{,}6c + 0{,}8c = 1{,}4c$

transf. relativística: $u_{2x}' = \frac{-0{,}8c - 0{,}6c}{1 - 0{,}6c(-0{,}8c)/c^2} = \frac{-1{,}4c}{1{,}48} = -0{,}95c$

$u_{1x}' = \frac{0{,}6c + 0{,}8c}{1 - 0{,}8c(-0{,}6c)/c^2} = \frac{1{,}4c}{1{,}48} = 0{,}95c$

← voltar

definindo $x_0 = ct$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$
e re-escrevendo as transf. dos tempos : $ct' = \gamma(ct - \beta x)$, vem:

$$\begin{cases} x_0' = \gamma(x_0 - \beta x_1) \\ x_1' = \gamma(x_1 - \beta x_0) \\ x_2' = x_2 \\ x_3' = x_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 = \gamma(x_0' + \beta x_1') \\ x_1 = \gamma(x_1' + \beta x_0') \\ x_2 = x_2' \\ x_3 = x_3' \end{cases}$$

como $0 \leq \beta \leq 1$ e $1 \leq \gamma \leq \infty$ podemos introduzir a parametrização:

$$\beta = \tanh\eta = \frac{e^{\eta} - e^{-\eta}}{e^{\eta} + e^{-\eta}}$$, η é a rapidez (ou parâmetro do boost)

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\eta}} = \frac{\cosh\eta}{\sqrt{\cosh^2\eta - \operatorname{senh}^2\eta}} = \cosh\eta$$

$$\Rightarrow \gamma\beta = \cosh\eta \frac{\operatorname{senh}\eta}{\cosh\eta} = \operatorname{senh}\eta$$

assim: $x_0' = \gamma x_0 - \gamma\beta x_1$
$x_1' = \gamma x_1 - \gamma\beta x_0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0' = \cosh\eta\, x_0 - \operatorname{senh}\eta\, x_1 \\ x_1' = -\operatorname{senh}\eta\, x_0 + \cosh\eta\, x_1 \\ x_2' = x_2 \\ x_3' = x_3 \end{cases}$$

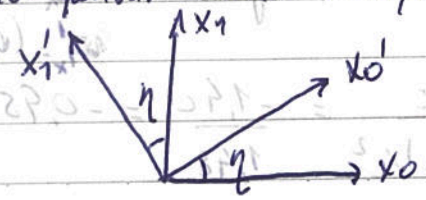
e as transf. inversas

$$\begin{cases} x_0 = \cosh\eta\, x_0' + \operatorname{senh}\eta\, x_1' \\ x_1 = \operatorname{senh}\eta\, x_0' + \cosh\eta\, x_1' \\ x_2 = x_2' \\ x_3 = x_3' \end{cases}$$

daí

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\eta & -\operatorname{senh}\eta & 0 & 0 \\ -\operatorname{senh}\eta & \cosh\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

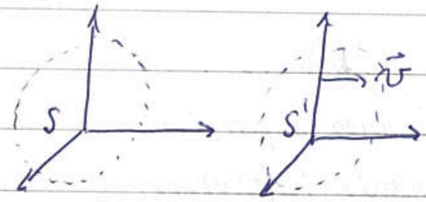
e podemos pensar numa rotação (espaço hiperbólico) :



ainda: $x_\mu' = \sum_{\nu=0}^{3} (\Lambda_{\nu\mu}) x_\nu$

Λ é a matriz da transf. de Lorentz

Def.: Quadrivetor: $\mathcal{X} \equiv (ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$



em $t = t' = 0$: $S = S'$

um pulso de luz é emitido de $O = O'$:

em S: $r^2 = c^2t^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$

em S': $r'^2 = c^2t'^2 \Rightarrow x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2 \Rightarrow x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0$

um quadrivetor é definido tal que o produto escalar dele por ele mesmo é:

$$\mathcal{X}^2 = \mathcal{X} \cdot \mathcal{X} = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 =$$

$$= (ct, x, y, z)\begin{pmatrix} -ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (ct, x, y, z)\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{métrica}}\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

outra possibilidade: $\mathcal{X}^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (ct, x, y, z)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

além disso, o quadrivetor se transforma por Lorentz:

$$\begin{cases} x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3 \end{cases} \quad \text{ou} \quad x'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu_\nu x^\mu,$$

onde $\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz da transf. de Lorentz

note que $\mathcal{X}^2$ é invariante sob transformações de Lorentz:

$$-c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0 = -c^2t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2$$

ou $\quad -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = -(x'^0)^2 + (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2$

Sejam 2 eventos A e B : $A \cdot B = -a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$

a^μ, b^μ são <u>contravariantes</u> (índices superiores)

a_μ, b_μ são <u>covariantes</u> (índices inferiores)

que diferem na zeroésima componente:

$$a_\mu = (a_0, a_1, a_2, a_3) \equiv (-a^0, a^1, a^2, a^3)$$

e podemos escrever agora:

$$A \cdot B = \sum_{\mu=0}^{3} a_\mu b^\mu = (a_0, a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix} b^0 \\ b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} =$$

$$= (-a^0, a^1, a^2, a^3)\begin{pmatrix} b^0 \\ b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} =$$

$$= -a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3 =$$

$$= (a^0, a^1, a^2, a^3)\begin{pmatrix} -b^0 \\ b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} =$$

$$= (a^0, a^1, a^2, a^3)\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \sum_{\mu=0}^{3} a^\mu b_\mu \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow A \cdot B = \sum_{\mu=0}^{3} a_\mu b^\mu = \sum_{\mu=0}^{3} a^\mu b_\mu$$

notação de índices repetidos (convenção de soma de Einstein):

$$A \cdot B = a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu \quad \Rightarrow \text{soma está implícita}$$

Def.: <u>Intervalo</u> entre 2 eventos:

$$\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = c^2(t_A - t_B)^2 - (x_A - x_B)^2 - (y_A - y_B)^2 - (z_A - z_B)^2$$

Seja B o evento inicial (pulso de luz saindo da origem O em $t=0$):

$$\Delta s^2 = c^2 t_A^2 - x_A^2 - y_A^2 - z_A^2 = c^2 t_A^2 - r_A^2$$

ou

$$\Delta s'^2 = c^2 t_A'^2 - x_A'^2 - y_A'^2 - z_A'^2 = c^2 t_A'^2 - r_A'^2$$

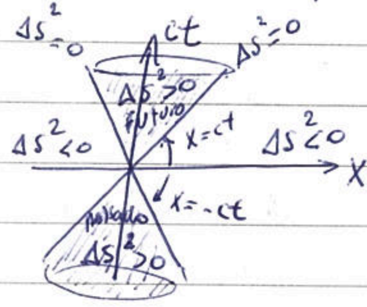
num dado referencial (seja S):

$\Delta s^2 = 0 \Rightarrow c^2 t_A^2 = r_A^2$ (tipo luz) A é o pulso de luz

$\Delta s^2 > 0 \Rightarrow c^2 t_A^2 > r_A^2$ (tipo tempo) A é posterior ao pulso de luz

$\Delta s^2 < 0 \Rightarrow c^2 t_A^2 < r_A^2$ (tipo espaço) A é anterior ao pulso de luz

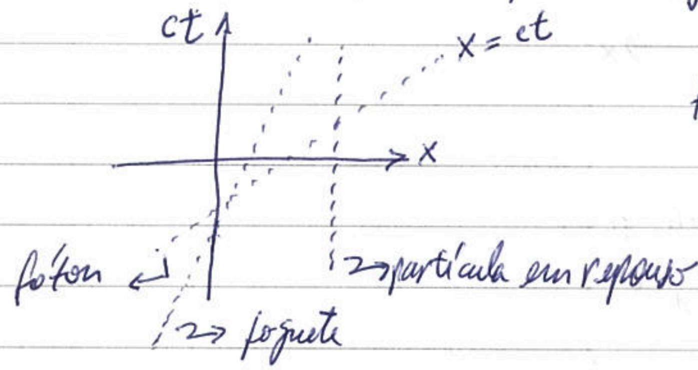
Diagramas de espaço-tempo (diagrama de Minkowski)

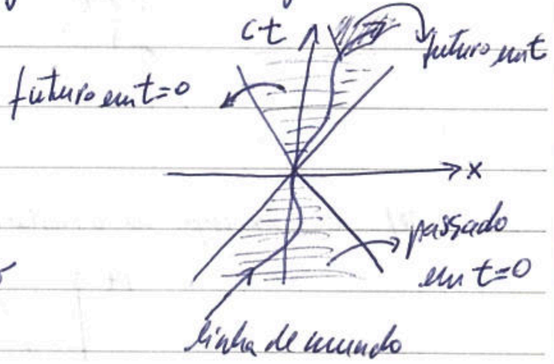


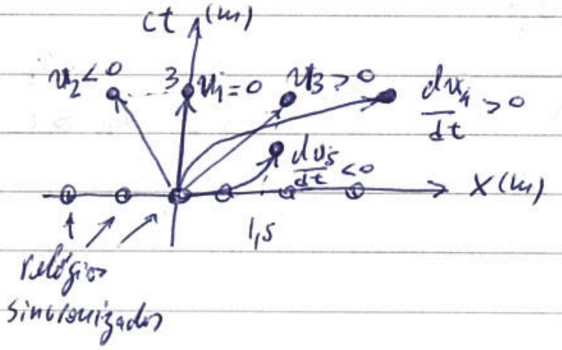
$\Delta s^2 = 0$: cone de luz
intervalo entre eventos conectados por um pulso de luz

$\Delta s^2 > 0$ (sobra tempo, a luz passa: $v < c$) conectados causalmente
$\Delta s^2 < 0$ (sobra espaço, a luz não chega: $v > c$) não conectados por relação de causa

linha de mundo no espaço-tempo = trajetória no diagrama



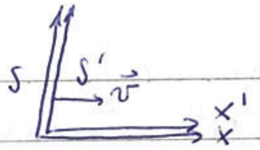




ex. 1-5)

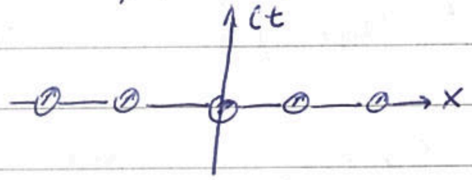
$u_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta t_3} = \frac{1{,}5\,m}{3\,m/c} = 0{,}5c$

Seja novamente o caso



com $t_0 = t_0' = 0$
e $O = O'$

o diagrama de espaço-tempo de S é



com todos os seus relógios sincronizados

como S' aparece em S?

Sabemos que O' move-se com velocidade $\vec{v}$, então para O' ($x' = 0$):

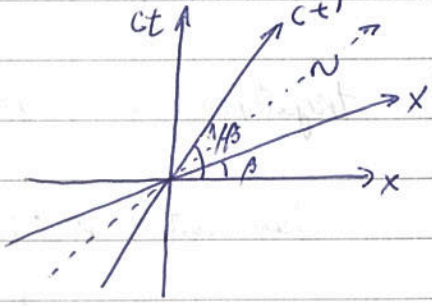
$$x' = \gamma(x - vt) = 0 \Rightarrow x = vt = \beta c t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ct = x/\beta \Rightarrow$$ a linha de mundo de O' tem inclinação $1/\beta > 1$

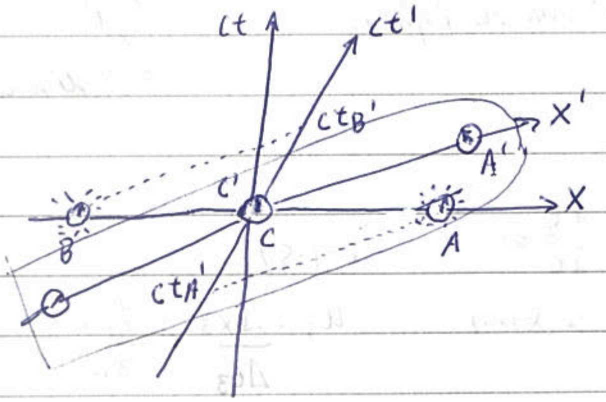
agora, o eixo x' pode ser encontrado impondo $ct' = 0$:

$$t' = \gamma(t - vx/c^2) = 0 \Rightarrow t = vx/c^2 = \beta x/c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ct = \beta x \Rightarrow$$ a linha de mundo de x' tem inclinação $\beta < 1$



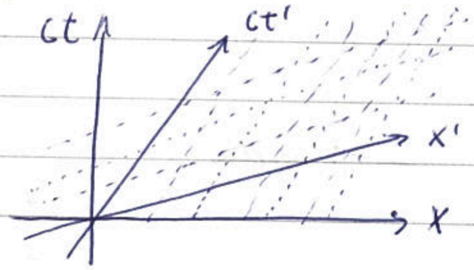
ex. 1-6) o exemplo de Einstein fica:



em S: $t_A = t_B$

em S': $t_B' > t_A'$

projeções de x' e ct' em x e ct:

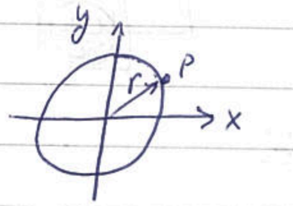


$$x' = \gamma(x - c\overset{0}{t}) = \gamma x$$
$$ct' = \gamma(ct - v\overset{0}{x}/c) = \gamma ct$$

no espaço bidimensional:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

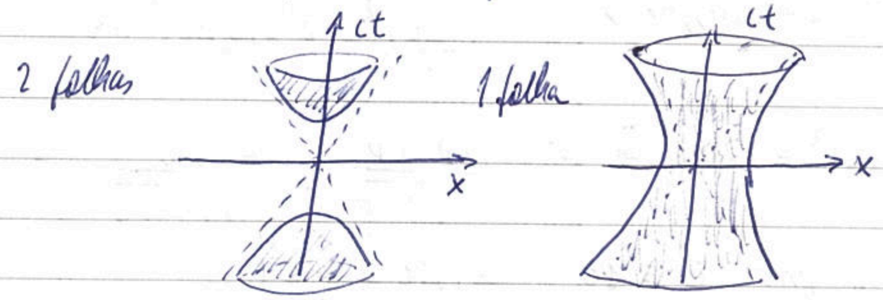
descreve um círculo



agora, as equações $(x^2+y^2) - c^2t^2 = 1$ descrevem hiperbolóides
$(x^2+y^2) - c^2t^2 = -1$

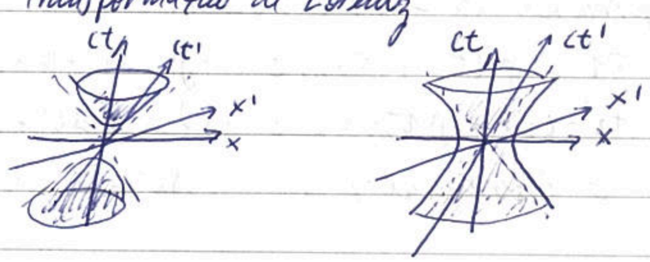
com sinal (+) hiperbolóide hiperbólico ou de 1 folha

com sinal (−) hiperbolóide elíptico ou de 2 folhas



$\Delta s^2 > 0$ (eventos tipo-tempo) $\Delta s^2 < 0$ (eventos tipo-espaço)

introduzindo uma transformação de Lorentz



os eixos se transformam, mas os eventos permanecem na superfície dos hiperbolóides