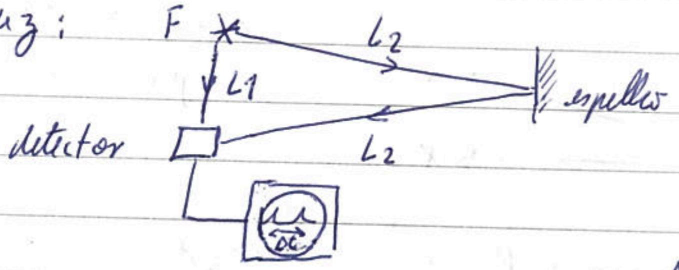
4) Dilatação do tempo e contração do espaço

relógio de luz:

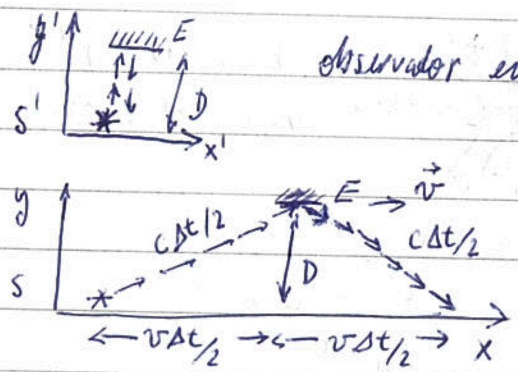


$L_1 = ct_1$

$2L_2 = ct_2$

$\Delta t = t_2 - t_1 = \dfrac{2L_2 - L_1}{c}$

dilatação do tempo



observador em S' com um relógio de luz mede:

$\Delta t' = 2D/c$

observador em S vê o relógio em movimento com velocidade v, então:

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = D^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (c^2 - v^2)\,\Delta t^2 = (2D)^2 \Rightarrow \Delta t = \frac{2D}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma \Delta t'$$

def.: tempo próprio $\tau \equiv \Delta t'$ $\Rightarrow \boxed{\Delta t = \gamma \tau}$

(tempo no ref. do objeto em movimento)

como $\gamma \geq 1 \Rightarrow \Delta t \geq \tau \Rightarrow$ dilatação temporal

usando as transformações de Lorentz, vem:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma(t_2' + v x_2'/c^2) - \gamma(t_1' + v x_1'/c^2) =$$

$$= \gamma(t_2' - t_1') + \gamma v/c^2\,(x_2' - x_1') = \gamma \Delta t' + \gamma v/c^2\,\Delta x'$$

agora, se S' é o referencial próprio: $\Delta x' = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta t = \gamma \Delta t'}$

Por outro lado, em S, os eventos estão separados por:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \gamma(x_2' + v t_2') - \gamma(x_1' + v t_1') =$$

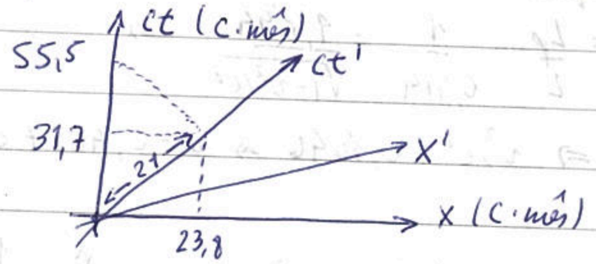
$$= \gamma(x_2' - x_1') + \gamma v(t_2' - t_1') = \gamma \overset{0}{\cancel{\Delta x'}} + \gamma v \Delta t' = \gamma v \Delta t' =$$

$$= v\gamma\tau = v\Delta t$$

ex. 1-8) aliá grávida, gestação de $\tau = 21$ meses

viaja a $v = 0{,}75c \Rightarrow \beta = 0{,}75 \Rightarrow \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} = 1{,}51$

quando o elefantinho nasce emite um sinal de rádio à Terra



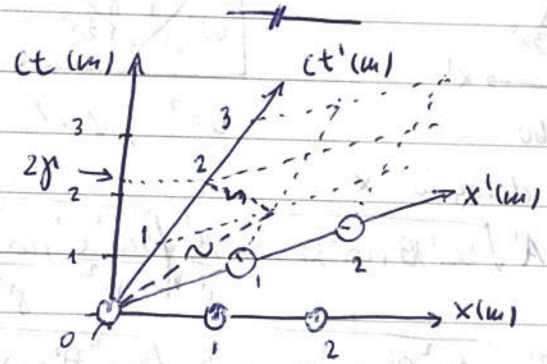
$\Delta t_1 = \gamma \tau = 1{,}51 \cdot 21 = 31{,}7$ meses

$\Delta x = \gamma v \tau = 1{,}51 \cdot 0{,}75c \cdot 21 =$
$= 23{,}8$ c·mês

rádio: $\Delta t_2 = \Delta x / c = 23{,}8$ meses

$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 31{,}7 + 23{,}8 = 55{,}5$ meses

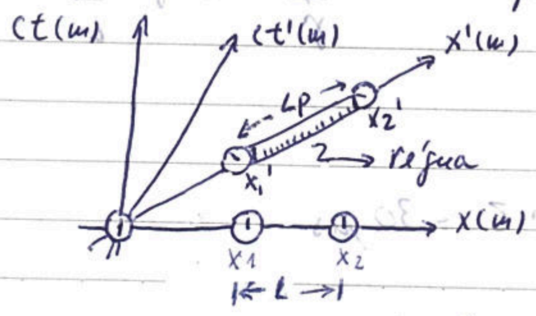
fig. 1-26



pulso de luz emitido de $x' = 0$ m, $ct' = 0$ m viaja até um espelho em $x' = 1$ m, $ct' = 1$ m reflete e retorna a $x' = 0$ m em $ct' = 2$ m. O observador em S registra $ct = 2\gamma > 2$ m.

Contração do espaço (ou do comprimento)

def.: comprimento próprio (L_p): comprimento de um objeto em seu referencial próprio, ou o referencial em que o objeto está em repouso.



$L_p = x_2' - x_1'$

$L = x_2 - x_1$, no mesmo $t = t_1 = t_2$

$x_2' = \gamma (x_2 - v t_2)$

$x_1' = \gamma (x_1 - v t_1)$

$L_p = x_2' - x_1' = \gamma (x_2 - x_1 - \cancel{v t_2} + \cancel{v t_1}) = \gamma L \Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{\gamma} L_p} \leq L_p$

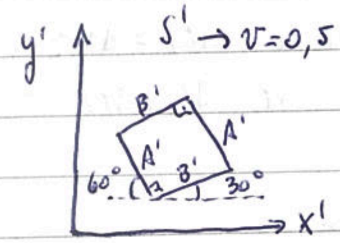
contração de Lorentz-Fitzgerald : $L = L_p \sqrt{1 - v^2/c^2}$

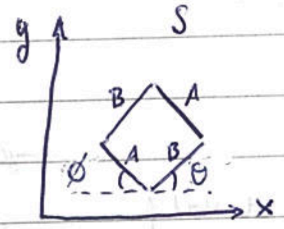
ex. 1-9) $L = 0{,}914\, L_p$, qual a velocidade de S' ?

$$L = \frac{L_p}{\gamma} \Rightarrow \gamma = \frac{L_p}{L} = \frac{1}{0{,}914} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow$$

$$1 - v^2/c^2 = 0{,}8354 \Rightarrow v^2/c^2 = 0{,}1646 \Rightarrow v = 0{,}4057\, c$$

ex. 1-10)

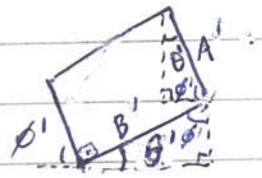




$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}5^2}} = 1{,}1547$$

$\theta' = 30°$, $\phi' = 60°$ $\qquad$ $\theta = ?$, $\phi = ?$

contração ocorre só na direção x :



$$A' = A' \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta' + \cos^2\theta'} \Rightarrow A = A' \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2\theta'}{\gamma^2} + \cos^2\theta'} = 0{,}968\, A'$$

$$B' = B' \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta' + \cos^2\theta'} \Rightarrow B = B' \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta' + \frac{\cos^2\theta'}{\gamma^2}} = 0{,}901\, B'$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\theta &= \frac{B' \operatorname{sen}\theta'}{B' \cos\theta'/\gamma} = \gamma \operatorname{tg}\theta' \Rightarrow \theta = 33{,}7° \\ \operatorname{tg}\phi &= \frac{A' \operatorname{sen}\phi'}{A' \cos\phi'/\gamma} = \gamma \operatorname{tg}\phi' \Rightarrow \phi = 63{,}4° \end{aligned}\right\} \quad 180° - 63{,}4° - 33{,}7° = 82{,}9° < 90°$$

<u>decaimento dos múons</u>: $\tau = 2\,\mu s$ (tempo próprio do múon)

$L_p = 9000\, m$ (comprimento próprio da atmosfera)

no ref. do múon : $L = 600\, m \Rightarrow L = \frac{L_p}{\gamma} \Rightarrow \gamma = \frac{L_p}{L} = 15$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Rightarrow \beta = 0{,}9978$$

no ref. da Terra !: $t = \gamma \tau = 30\,\mu s$

da lei do decaimento sabemos que $N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$

se $N_0 = 10^8$, um observador na Terra mede

$$N(t) = 10^8 e^{-15} \simeq 30{,}6$$

no ref. do múon: $t' = \dfrac{6}{0{,}9978c} = 2{,}004\ \mu s \Rightarrow \dfrac{t'}{\tau} \simeq 1$

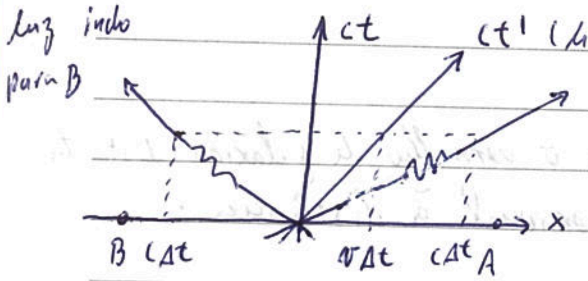
então: $N(t') = 10^8 e^{-1} = 3{,}679 \cdot 10^7$

5) O efeito Doppler relativístico

Como consequência do 2° postulado, as equações clássicas para o efeito Doppler devem ser corrigidas.

B $\overset{c}{\leftarrow}$ ∗ $\overset{\vec{v}}{\rightarrow}$ $\overset{c}{\rightarrow}$ A (fonte de luz aproximando-se de A e afastando-se de B)

F



se em Δt F emitir N ondas:

o observador em A mede: $\lambda = \dfrac{c\Delta t - v\Delta t}{N} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f = \frac{c}{\lambda} = \frac{cN}{(c-v)\Delta t} = \frac{N}{(1-v/c)\Delta t} = \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{N}{\Delta t}\right)$$

no ref. da fonte, a frequência própria é: $f_0 = c/\lambda' = N/\Delta t'$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{f_0 \Delta t'}{\Delta t}\right) = \frac{f_0}{1-\beta}\left(\frac{1}{\gamma}\right) = \left(\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta}\right) f_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f = \left(\frac{\sqrt{1+\beta}\cancel{\sqrt{1-\beta}}}{\sqrt{1-\beta}\cancel{\sqrt{1-\beta}}}\right) f_0 \Rightarrow \boxed{f = f_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}}$$ aproximação ($f > f_0$) desvio para o azul

analogamente, o observador em B mede: $\lambda = \dfrac{c\Delta t + v\Delta t}{N}$

$$\Rightarrow \boxed{f = f_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}}$$ afastamento ($f < f_0$) desvio para o vermelho

para velocidades baixas ($v \ll c$), podemos aproximar:

$$f = f_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = f_0(1+\beta)^{1/2}(1-\beta)^{-1/2} \simeq f_0\left(1+\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{8}\beta^2+\dots\right)\left(1+\frac{1}{2}\beta+\frac{3}{8}\beta^2+\dots\right) \simeq f_0(1+\beta) \quad \text{(aprox)}$$

$$f = f_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = f_0(1-\beta)^{1/2}(1+\beta)^{-1/2} \simeq f_0\left(1-\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{8}\beta^2+\dots\right)\left(1-\frac{1}{2}\beta+\frac{3}{8}\beta^2+\dots\right) \simeq f_0(1-\beta) \quad \text{(afast)}$$

em ambos os casos: $f \simeq f_0 \pm f_0\beta \Rightarrow \frac{\Delta f}{f_0} \simeq \pm\beta \Rightarrow \left|\frac{\Delta f}{f_0}\right| \simeq \beta$

ex 1-12) rotação do Sol, efeito Doppler nas laterais

$T_\odot = 25.4\ d$, $r_\odot = 7\cdot10^8\ m \Rightarrow v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi\cdot7\cdot10^8}{25{,}4\cdot24\cdot3600} \simeq 2000\ m/s \ll c$

$\lambda = 550\ nm$

$$\Rightarrow \Delta f \simeq \beta f_0 = \frac{\beta c}{\lambda_0} = \frac{v}{\lambda_0} = 3{,}64\cdot10^9\ Hz$$

$$f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = 5{,}45^{14}\ Hz \Rightarrow \frac{\Delta f}{f_0} \simeq 7\cdot10^{-6}$$

Efeito Doppler da luz das estrelas:

(1929) E. Hubble descobriu o desvio para o vermelho de galáxias distantes e descobriu que a velocidade é proporcional à distância:

$$v = H_0 d,$$

onde $H_0 = 72\ (Km/s)/Mpc$ é a constante de Hubble.

Os astrônomos definem o parâmetro de redshift:

$$z = \frac{f_0 - f}{f} = \frac{f_0}{f} - 1 = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - 1$$

onde f_0 é a frequência medida no referencial da estrela

f é a frequência medida na Terra

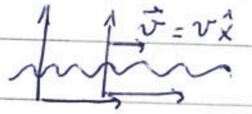
$$\Rightarrow (z+1)^2 = \frac{1+\beta}{1-\beta} \Rightarrow (z+1)^2 - \beta(z+1)^2 = 1+\beta \Rightarrow \beta = \frac{(z+1)^2-1}{(z+1)^2+1}$$

p. ex.: um quasar a $z = 3{,}78 \Rightarrow \beta = 0{,}916$

ex 1-13) compr. de onda mais longo da série de Balmer do hidrogênio é $\lambda_0 = 656$ nm, medido de uma galáxia distante $\lambda = 1458$ nm

$$\frac{f_0}{f} = \frac{c}{\lambda_0}\frac{\lambda}{c} = \frac{\lambda}{\lambda_0} = 2{,}22256 = z+1 \Rightarrow \beta = \frac{(z+1)^2-1}{(z+1)^2+1} = 0{,}663$$

A fase de uma onda é obtida simplesmente pela contagem das cristas e é um invariante



$c = \omega/k$

$$\varphi = \omega t - k_x x = \omega' t' - k_x' x' \Rightarrow$$

$$c\varphi = \omega c t - k_x x c = \omega' c t' - k_x' x' c \Rightarrow$$

transf. inv.: $$\omega(\gamma c t' + \gamma\beta x') - c k_x(\gamma x' + \gamma\beta c t') = \omega' c t' - k_x' x' c \Rightarrow$$

$$(\omega\gamma - c k_x \gamma\beta) c t' - (c k_x \gamma - \omega\gamma\beta) x' = \omega' c t' - k_x' x' c \Rightarrow$$

$$\gamma(\omega - \beta c k_x) c t' - \gamma(c k_x - \beta\omega) x' = \omega' c t' - c k_x' x'$$

e podemos propor as transformações para a frequência e número de onda angulares:

$$\begin{cases} \omega' = \gamma(\omega - \beta c k_x) \\ c k_x' = \gamma(c k_x - \beta\omega) \end{cases}$$

a demais
$$\begin{cases} c k_y' = c k_y \\ c k_z' = c k_z \end{cases}$$

definindo: $\omega \equiv c k_0$, $\omega' = c k_0'$

temos um quadrivetor frequência-número de onda angulares

$$(c k_0, c k_x, c k_y, c k_z),$$

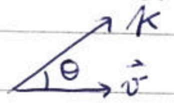
onde a invariância do produto escalar (3D):

$$\omega^2 c^2 t^2 - c^2(\vec{k}\cdot\vec{r})^2 = (\omega c t + c\vec{k}\cdot\vec{r})(\omega c t - c\vec{k}\cdot\vec{r}) = c^2\varphi^+\varphi^-$$

$$\omega'^2 c^2 t'^2 - c^2(\vec{k}'\cdot\vec{r}')^2 = (\omega' c t' + c\vec{k}'\cdot\vec{r}')(\omega' c t' - c\vec{k}'\cdot\vec{r}') = c^2\varphi^+\varphi^-$$

é a invariância da fase de 2 ondas planas: uma com $v>0$, outra com $v<0$

no caso

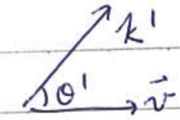


$$\omega' = \gamma(\omega - \beta \cancel{c}(\omega/\cancel{c})\cos\theta) = \gamma\omega(1-\beta\cos\theta) \Rightarrow$$

$$2\pi f_0 = \gamma 2\pi f(1-\beta\cos\theta) \Rightarrow \boxed{f = \frac{f_0}{\gamma(1-\beta\cos\theta)}}$$

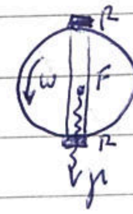
efeito Doppler transversal

ainda, dado que



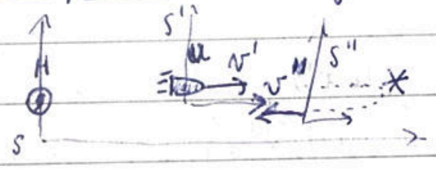
$$tg\,\theta' = \frac{k_y'}{k_x'} = \frac{k_y}{\gamma(k_x - \beta k_0)} = \frac{k\,sen\,\theta}{\gamma(k\cos\theta - \beta k)} \Rightarrow \boxed{tg\,\theta' = \frac{sen\,\theta}{\gamma(\cos\theta - \beta)}}$$

o experimento de Kündig (1962)



F: fonte, R: receptor
$\omega \gg 1$ efeito Mössbauer

6) O paradoxo dos gêmeos



H e U são gêmeos idênticos
quem fica mais velho?
U acha que H está em movimento

a Terra e a estrela estão no ref. S
ref. S' move-se com $v' = +0{,}8c$ } $\gamma = 5/3$
ref. S'' move-se com $v'' = -0{,}8c$
a nave de U acelera de 0 a v', desacelera a zero, a v'' depois desacelera a zero quando encontra H.
viagem de ida $\Delta t = 5a$, viagem de volta $\Delta t = 5a$
o tempo de U (próprio): $\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{5}{5/3} = 3a$

então $2\Delta t = 10a$, $2\Delta t' = 6a$ $(\Delta t > \Delta t')$
Se considerarmos ao contrário (H em movimento): $\Delta t = \frac{3}{\gamma} = \frac{3}{5/3} = 1{,}8a \Rightarrow 2\Delta t = 3{,}6a$ $(\Delta t < \Delta t'?)$

porém H não muda de referencial, mas U muda