Cap 2 | Dinâmica Relativística

Pela transformação de Galileu: $a_x' = a_x$
No entanto, a transformação de Lorentz leva às transformações de aceleração:
1-16)

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2} \quad , \quad u_y' = \frac{u_y}{\gamma(1 - u_x v/c^2)} \quad , \quad u_z' = \frac{u_z}{\gamma(1 - u_x v/c^2)}$$

$$t' = \gamma(t - vx/c^2) \Rightarrow \frac{dt'}{dt} = \gamma(1 - v u_x/c^2)$$

$$a_x' = \frac{du_x'}{dt'} = \frac{du_x'}{du_x}\frac{du_x}{dt} \Big/ \frac{dt'}{dt} = \frac{d}{du_x}\left(\frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2}\right)\frac{du_x}{dt} \Big/ \gamma(1 - v u_x/c^2) =$$

$$= \left[\frac{(1 - u_x v/c^2) - (u_x - v)(-v/c^2)}{(1 - u_x v/c^2)^2}\right]\frac{a_x}{\gamma(1 - u_x v/c^2)} =$$

$$= \frac{(1 - \cancel{u_x v/c^2} + \cancel{u_x v/c^2} - v^2/c^2)\,a_x}{\gamma(1 - u_x v/c^2)^3} = \frac{\gamma^{-2} a_x}{\gamma(1 - u_x v/c^2)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a_x' = \frac{a_x}{\gamma^3(1 - v u_x/c^2)^3}}$$

$$a_y' = \frac{du_y'}{dt'} = \frac{1}{\gamma(1 - v u_x/c^2)}\frac{du_y'}{dt} = \frac{du_y/dt}{\gamma^2(1 - v u_x/c^2)^2} + \frac{u_y}{\gamma^2(1 - v u_x/c^2)}\frac{d}{dt}\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{a_y}{\gamma^2(1 - u_x v/c^2)^2} + \frac{u_y}{\gamma^2(1 - u_x v/c^2)}\frac{(-1)(-a_x v/c^2)}{(1 - u_x v/c^2)^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{a_y' = \frac{a_y}{\gamma^2(1 - u_x v/c^2)} + \frac{a_x u_y v/c^2}{\gamma^2(1 - u_x v/c^2)^3}}$$

analogamente: $\boxed{a_z' = \frac{a_z}{\gamma^2(1 - u_x v/c^2)} + \frac{a_x u_z v/c^2}{\gamma(1 - u_x v/c^2)^3}}$

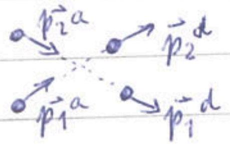
portanto: $\vec{F} = m\vec{a}$ não é invariante, mas deve valer para $\beta \ll 1$

1) Momento relativístico

se $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{const.}$

ou numa colisão: $\sum_i \vec{p_i}^a = \sum_i \vec{p_i}^d$

lei da conservação do momento linear

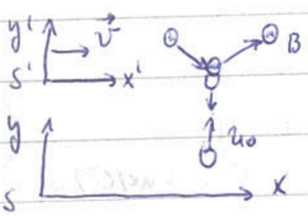


A. Emmy Noether (1882 - 1935): lei de conservação $\leftrightarrow$ simetria
(matemática alemã)

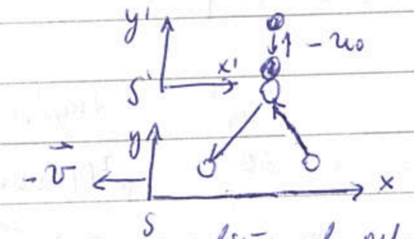
conserv. $\vec{p}$ $\leftrightarrow$ simetria de translação
conserv. $\vec{L}$ $\leftrightarrow$ simetria de rotação
conserv. E $\leftrightarrow$ simetria temporal

postulado 1: as leis da física devem ser as mesmas em todos os referenciais inerciais

$\vec{p} = \sum_i \vec{p_i} = \text{const.}$, $\vec{p_i} = m_i \vec{u_i}$ para $\beta \ll 1$



colisão pelo ref. S



colisão pelo ref. S'

(assumindo colisão perfeitamente elástica)

cada um lança a bola com velocidade u_0 no eixo y (no seu referencial)

no ref. S: $u_{xA} = 0$, $u_{yA} = u_0$

$$u_{xB} = v, \quad u_{yB} = \frac{u'_{yB}}{\gamma(1 + u'_{xB} v/c^2)} = -u_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

então, a componente p_y não é nula: $m u_{yA} + m u_{yB} \neq 0$

e é positiva: $0 < m u_0 \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) < m u_0$

no ref. S' : $u'_{xA} = -v$, $u'_{yA} = \dfrac{u_{yA}}{\gamma(1-\underbrace{u_{xA}}_{0} v/c^2)} = u_0\sqrt{1-v^2/c^2}$

$u'_{xB} = 0$, $u'_{yB} = -u_0$

de novo, a componente p_y não é nula : $m u'_{yA} + m u'_{yB} \neq 0$

mas é negativa : $-mu_0 < mu_0\left(\dfrac{1}{\gamma} - 1\right) < 0$

portanto : $\sum_i p_y \neq \sum_i p'_y$ não é conservada

é somente no limite $\gamma \simeq 1$

mas usamos a transformação de velocidades de Lorentz, então a quebra da invariância deve ser consequência da massa!

cada observador vê sua bola com u_0 e a outra com $u = \sqrt{u_y^2 + v^2}$

se a massa for função da velocidade : $\begin{cases} m_{sua} = m(u_0) \\ m_{outra} = m(u) \end{cases}$

agora $\sum_i \vec{p}_i^{\,antes} = \sum_i \vec{p}_i^{\,depois} \Rightarrow m(u_0)u_0 - m(u)u_{yB} = -m(u_0)u_0 + m(u)u_{yB}$

$\Rightarrow 2m(u_0)u_0 = 2m(u)u_{yB} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{m(u)}{m(u_0)} = \dfrac{u_0}{u_{yB}} = \dfrac{u_0}{u_0\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma \Rightarrow$

$\Rightarrow m(u) = \gamma\, m(u_0)$

se a sua bola estiver em repouso no seu referencial : $u_0 = 0 \Rightarrow$

definindo a <u>massa de repouso</u> como $m(u_0) \equiv m_0$

e usando que a colisão vai ser "de raspão" ($u = v$):

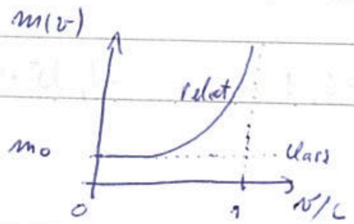
$$\boxed{m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$ → massa relativística

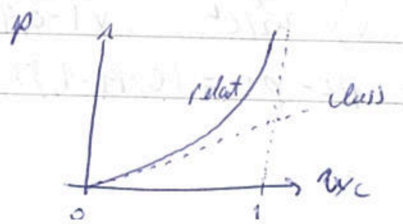
obs: $m(v) \to m_0$, se $v \ll c$

consequentemente :

$$\boxed{\vec{p} = \frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}}$$ → momento relativístico

obs: $\vec{p} \to m_0\vec{u}$, se $u \ll c$





verificamos, agora que:

$$p_{yA} = \frac{m_0 u_0}{\sqrt{1-u_0^2/c^2}} \quad , \quad p_{yB} = \frac{m_0 u_{yB}}{\sqrt{1-u_B^2/c^2}} = \frac{m_0 u_{yB}}{\sqrt{1-(u_{xB}^2+u_{yB}^2)/c^2}}$$

onde

$$p_{yB} = \frac{-m_0 u_0 \sqrt{1-v^2/c^2}}{\sqrt{1-(v^2+u_0^2(1-v^2/c^2))/c^2}} * \frac{c}{c} = \frac{-m_0 u_0 \sqrt{c^2-v^2}}{\sqrt{c^2-v^2-(c^2-v^2)u_0^2/c^2}} =$$

$$= \frac{-m_0 u_0}{\sqrt{\frac{(c^2-v^2)-(c^2-v^2)u_0^2/c^2}{(c^2-v^2)}}} = \frac{-m_0 u_0}{\sqrt{1-u_0^2/c^2}} = -p_y A$$

escreveremos: $\vec{p} = m_0 \gamma \vec{u} = m\vec{u}$, onde

$$m = m_0 \gamma \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

ex 2-1) fator $f \equiv \frac{\gamma m_0 - m_0}{m_0} = \frac{\delta m}{m_0} = \gamma - 1$, $\beta = f(f)$

$$\Rightarrow f+1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow (f+1)^2 = \frac{1}{1-\beta^2} \Rightarrow 1-\beta^2 = \frac{1}{(f+1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta^2 = 1 - \frac{1}{(f+1)^2} = \frac{(f+1)^2-1}{(f+1)^2} = \frac{f^2+2f+1-1}{(f+1)^2} = \frac{f(f+2)}{(f+1)^2}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\sqrt{f(f+2)}}{f+1}$$

objeto	avião	Terra (v_{orb})	elétron(50 eV)	quasar (OQ172)	μ (cR)	p (HEP?)
β	$1{,}4 \cdot 10^{-6}$	10^{-4}	0,014	0,87	0,996	0,99995
f	10^{-12}	$5 \cdot 10^{-9}$	10^{-4}	1	10	100

ex 2-2) foguete: $m_0 = 50\,000$ kg , $u_1 = 0{,}8c \Rightarrow p_1 = ?$

p/ Plutão $u_2 = 0{,}4c \Rightarrow \Delta p = ?$

$$p_1 = \frac{m_0 u_1}{\sqrt{1-u_1^2/c^2}} = \frac{m_0\, 0{,}8c}{\sqrt{1-0{,}8^2}} = 1{,}33\, m_0 c = 2 \cdot 10^{13} \text{ kg m/s}$$

$$p_2 = \frac{m_0 u_2}{\sqrt{1-u_2^2/c^2}} = \frac{m_0\, 0{,}4c}{\sqrt{1-0{,}4^2}} = 0{,}44\, m_0 c = 6{,}55 \cdot 10^{12} \text{ kg m/s}$$

$$\Delta p = p_2 - p_1 = (0{,}44-1{,}33)\, m_0 c = -0{,}9\, m_0 c = -1{,}35 \cdot 10^{13} \text{ kg m/s}$$