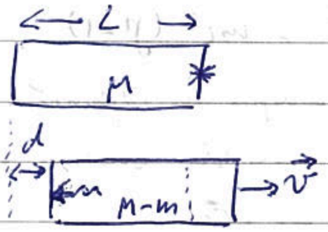
2) Energia relativística

Seja um corpo que emite um pulso de luz, de sua extremidade, com momento $p = E/c$ e a energia do fóton é gerada a partir de uma parte m da massa do corpo.



$$\Delta t = \frac{d}{v} = \frac{L-d}{c} \quad (1)$$

cons. $\vec{p}$: $\Sigma p = (M-m)v - E/c = 0 \Rightarrow (M-m)v = E/c \quad (2)$

centro de massa: $x_{cm} = \dfrac{(M-m)d - m(L-d)}{M} = 0 \Rightarrow m(L-d) = (M-m)d \Rightarrow$

$$(1) \Rightarrow m\left(\frac{c\cancel{d}}{v}\right) = (M-m)\cancel{d} \Rightarrow (M-m)v = mc \Rightarrow$$

$$(2) \Rightarrow E/c = mc \Rightarrow \boxed{E = mc^2} \quad \text{sqn}$$

em relatividade $\vec{p} \neq m\vec{v}$, mas $\vec{p} = \dfrac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$!

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m \vec{u})$$

a energia cinética é: $E_k = \int_0^u F\,dx = \int_0^u \frac{d}{dt}(\gamma m u)\,dx = \int_0^u u\,d(\gamma m u)$

probl. 2-2) $d(\gamma m u) = m_0 \dfrac{d}{du}(\gamma u)\,du$

$$\frac{d}{du}(\gamma u) = \frac{d}{du}\left[(1-u^2/c^2)^{-\frac{1}{2}} u\right] = \frac{u^2/c^2}{(1-u^2/c^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(1-u^2/c^2)^{1/2}} = \frac{1}{(1-u^2/c^2)^{3/2}}$$

$$\int_0^u \frac{u\,du}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} = \int_0^{u^2/c^2} \frac{c^2}{2}\frac{dx}{(1-x)^{3/2}} = \frac{c^2}{2}\int_1^{1-u^2/c^2} \frac{-dz}{z^{3/2}} = \frac{c^2}{\sqrt{z}}\Bigg|_1^{1-u^2/c^2} =$$

$x = u^2/c^2$, $dx = (2u/c^2)\,du$ $\qquad$ $z = 1-x$, $dz = -dx$

$$= c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - 1\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_K = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - 1\right) = \gamma mc^2 - mc^2 = mc^2(\gamma - 1)$$

↳ Energia de repouso ($E_0 = m_0c^2$) associada somente à massa

a energia total relativística é: $E = E_K + E_0$

$$\Rightarrow \boxed{E = E_K + mc^2 = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}}$$

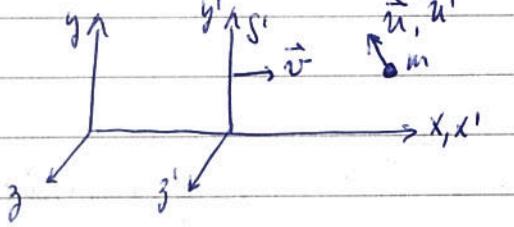
para velocidades baixas ($u/c \ll 1$):

$$\gamma = (1-u^2/c^2)^{-1/2} \simeq 1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} + \dots$$

$$\Rightarrow E_K \simeq mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} + \dots - 1\right) \simeq \frac{1}{2}mu^2 \Rightarrow \text{fórmula clássica}$$

para partículas em repouso ($u=0$): $\gamma = 1 \Rightarrow \boxed{E = mc^2}$

<u>Transformações de Lorentz para E e $\vec{p}$</u>:



$$\gamma(u) = (1-u^2/c^2)^{-1/2}$$
$$\gamma'(u') = (1-u'^2/c^2)^{-1/2}$$

no ref. S: $E = \gamma mc^2$ $\qquad$ no ref. S': $E' = \gamma' mc^2$

$p_x = \gamma m u_x$ $\qquad$ $p_x' = \gamma' m u_x'$

$p_y = \gamma m u_y$ $\qquad$ $p_y' = \gamma' m u_y'$

$p_z = \gamma m u_z$ $\qquad$ $p_z' = \gamma' m u_z'$

mas $\gamma'(u') = \gamma(u)\,\gamma(v)\,(1 - v u_x/c^2)$ (2-13)

que pode ser deduzido de

$$\frac{1}{[\gamma'(u')]^2} = 1 - u'^2/c^2 = 1 - (u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2)/c^2$$

aplicando a transformação de velocidades relativísticas → veremos

então: $$E' = \frac{mc^2}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} = \gamma\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - \frac{mc^2 v u_x/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) \Rightarrow, \text{ onde } \gamma = \gamma(v)$$

$$\Rightarrow E' = \gamma\,(E - v p_x)$$

analogamente:

$$p_x' = \frac{m u_x'}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} = \frac{\gamma\,(1 - v u_x/c^2)}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\, m \left(\frac{u_x - v}{1 - v u_x/c^2}\right) =$$

$$= \gamma\left(\frac{m u_x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - \frac{m v}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) = \gamma\,(p_x - m_p v) \Rightarrow$$

$$p_x' = \gamma\,(p_x - v E/c^2)$$

$$p_y' = \frac{m u_y'}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} = \frac{\cancel{\gamma\,(1 - v u_x/c^2)}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\, m \,\frac{u_y}{\cancel{\gamma\,(1 - v u_x/c^2)}} = p_y$$

$$p_z' = \frac{m u_z'}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} = \frac{\cancel{\gamma\,(1 - v u_x/c^2)}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\, m \,\frac{u_z}{\cancel{\gamma\,(1 - v u_x/c^2)}} = p_z$$

temos as transformações de Lorentz para o momento e a energia

$$\begin{cases} p_x' = \gamma\,(p_x - vE/c^2) & , \; p_y' = p_y \; , \\ E' = \gamma\,(E - v p_x) & , \; p_z' = p_z \, . \end{cases}$$

as transformações inversas são:

$$\begin{cases} p_x = \gamma\,(p_x' + v E'/c^2) & , \; p_y = p_y' \; , \\ E = \gamma\,(E' + v p_x') & , \; p_z = p_z' \, . \end{cases}$$

e podemos, então, definir o quadrivetor momento-energia:

$$P = (E/c, \vec{p}) \quad , \text{ tal que } P^2 = E^2/c^2 - p^2 \qquad (1)$$

agora, de $X = (ct, \vec{r})$, definimos o quadrivetor velocidade:

$$V = \frac{dX}{dt'} = \gamma \frac{dX}{dt} \quad , \text{onde } t' \text{ é o tempo próprio}$$

$$\Rightarrow V_t = \gamma c \;,\; V_x = \gamma v_x \;,\; V_y = \gamma v_y \;,\; V_z = \gamma v_z \Rightarrow V = (\gamma c, \gamma \vec{v})$$

e $V^2 = \gamma^2 c^2 - \gamma^2 v^2 = \gamma^2 (c^2 - v^2) = \frac{\cancel{\gamma^2} c^2}{\cancel{\gamma^2}} = c^2$ é invariante

definindo: $P = mV$, onde m é a massa de repouso, vem:

$$P^2 = m^2 V^2 = m^2 c^2 \Rightarrow$$

$$(1) \quad P^2 = m^2 c^2 = E^2/c^2 - p^2 \Rightarrow \boxed{E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

(energia total relativística)

Se $p = 0$: $E = mc^2$ (energia de repouso)
Se $m = 0$: $E = pc$ (energia de 1 fóton)

no regime ultrarelativístico : $E_K \gg E_0 \Rightarrow pc \gg mc^2$

$$E \simeq pc$$

p.ex.: 1 próton com $E_K > 1\,TeV$: $E_0 = 938\,MeV$

$$E_0 = 938\,MeV, \quad E_K \simeq 10^3 E_0 \Rightarrow p \simeq 1\,TeV/c$$

ex. 2-3) $\overset{m}{\circ} \longrightarrow u = 0{,}01c$ ⊛ $m = 10^{-9}\,kg$

$S' \; v = 0{,}5c \;,\; \gamma = 1{,}1547$

$$E \simeq \frac{1}{2} m u^2 + mc^2 = \frac{10^{-9}}{2}(0{,}01c)^2 + 10^{-9} c^2 = 1{,}00005 \cdot 10^{-9} c^2 \, J$$

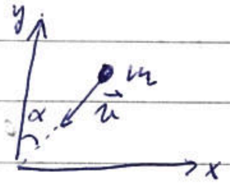
$$p_x \simeq m u_x = 10^{-9}\, 0{,}01c = 10^{-11} c \; kg\, m/s$$

no ref. S':

$$E' = \gamma(E - v p_x) = 1{,}1547 \cdot (1{,}00005 \cdot 10^{-9} c^2 - 0{,}5c \cdot 10^{-11} c) = 1{,}14898 \cdot 10^{-9} c^2 \text{ J}$$

$$p_x' = \gamma(p_x - vE/c^2) = 1{,}1547 [10^{-11} c - 0{,}5c \cdot 1{,}00005 \cdot 10^{-9} c^2/c^2] = -56{,}6 \cdot 10^{-11} c \text{ kgm/s}$$

ex 2-4)



, ref. S' tal que : $u_y' = -u_0$, $u_x' = 0$
determinar E'

S' move-se na direção $-x$ com velocidade $v = -u \operatorname{sen}\alpha$

Agora, $E = m\gamma c^2$, $p = m\gamma v = -m\gamma u \operatorname{sen}\alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow p = \frac{-mu \operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

em S' a energia é $E' = \gamma(E - v p_x) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left[E - (-u \operatorname{sen}\alpha)\left(\frac{-mu \operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left(E - \frac{m u^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left(E - \frac{m v^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \cdot \frac{c^2}{c^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} (E - m\gamma c^2 v^2/c^2) =$$

$$= \frac{E}{\sqrt{1-v^2/c^2}} (1 - v^2/c^2) = E\sqrt{1-v^2/c^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{E' = E\sqrt{1 - u^2 \operatorname{sen}^2\alpha/c^2}}$$

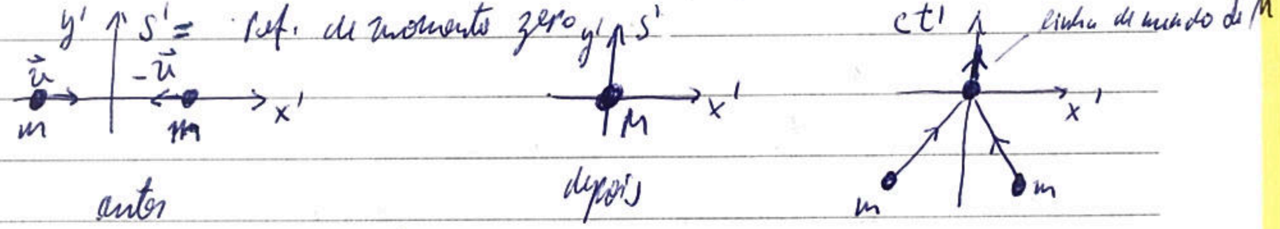
como $u < c$ e $\operatorname{sen}^2\alpha \leq 1 \Rightarrow E' < E$

quando $\alpha = 0$ $(S = S')$: $E' = E$

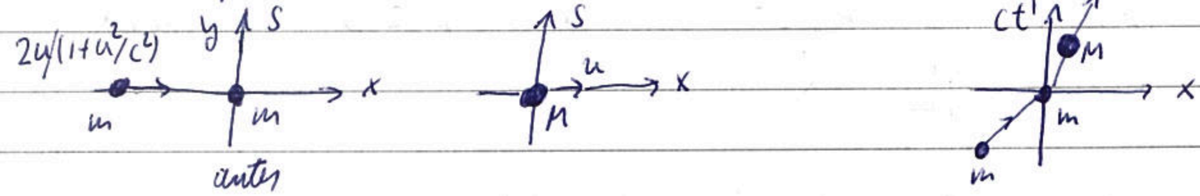
agora, para $\alpha > 0$, se $u \to c$: $E' \to E \cos\alpha$ que é o caso da luz

Conservação de Energia

2 partículas idênticas numa colisão perfeitamente inelástica



se S' move-se com velocidade u com relação a S, a da direita está parada em S:



a energia no ref. S':

antes da colisão : $E'_{antes} = m\gamma c^2 + m\gamma c^2 = \dfrac{2mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$

depois da colisão : $E'_{depois} = Mc^2$

conserv. de energia : $\dfrac{2mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = Mc^2 \Rightarrow M = 2m\gamma$

a energia no ref. S:

antes da colisão : $E_{antes} = \gamma\,(E'_{antes} + v\,p_{x'}) =$

$= \gamma\left(\dfrac{2mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} + u\,\cancel{p_{x'}}^{0}\right) = 2m\gamma^2 c^2$

depois da colisão : $E_{depois} = \gamma\,(E'_{depois} + v\,p_{x'}) =$

$= \gamma\,(Mc^2 + u\,\cancel{p_{x'}}^{0}) = M\gamma c^2$

conserv. de energia : $2m\gamma^{\cancel{2}} c^2 = M\cancel{\gamma} c^2 \Rightarrow M = 2m\gamma$

ex. 2-5) múons $E_0 = mc^2 = 105,7\ MeV$, $v = 0,998c \Rightarrow \gamma = 15,82$

$E = qV \Rightarrow 1eV = 1,6\cdot 10^{-19} C \cdot 1V = 1,6 \cdot 10^{-19} J$

$KeV = 10^3 eV$	$TeV = 10^{12} eV$
$MeV = 10^6 eV$	$PeV = 10^{15} eV$
$GeV = 10^9 eV$	$EeV = 10^{18} eV$

p. ex.: 1 elétron: $E = m_e c^2 = 9{,}11\cdot 10^{-31}\,kg\; c^2 = 8{,}19\cdot 10^{-14}\,J = 5{,}11\cdot 10^5\,eV \Rightarrow$

$E = 0{,}511\ MeV$ ⇒ energia de repouso do elétron

como $m = E/c^2$ ⇒ $m_e = 0{,}511\ MeV/c^2$ ⇒ massa de repouso do elétron

voltando ao múon: $E = \gamma mc^2 = 15{,}82 \cdot 105{,}7\ MeV = 1672\ MeV = 1{,}672\ GeV$

ex. 2-6) Taxa de perda de massa do Sol

raio da órbita da Terra $R = 1{,}5\cdot 10^8\ km$

constante solar: $I = 1{,}36\cdot 10^3\ W/m^2$

potência: $P = I \cdot 4\pi R^2 = 3{,}85\cdot 10^{26}\ J/s$

em 1 segundo: $E = 3{,}85\cdot 10^{26}\ J \Rightarrow m = \dfrac{E}{c^2} = 4{,}3\cdot 10^9\ kg$

taxa: $4{,}3\cdot 10^9\ kg/s$ $\qquad M_\odot = 2\cdot 10^{30}\ kg$

3) Conversão massa/energia e energia de ligação

$$E = mc^2 \Rightarrow \Delta m = \Delta E/c^2$$

antes: $m \bullet\!\xrightarrow{u}$ ~~~ $\xleftarrow{u}\!\bullet\, m$ $\qquad E_K + 2mc^2 = Mc^2$

depois: $\bullet$~~~$\bullet$ M $\qquad$ a massa aumenta de E_K/c^2.

ex. 2-7) mudança de massa de 2 partículas num sistema com a mola.

energia cinética em S: $E_K = 2mc^2(\gamma - 1)$

colisão perfeitamente inelástica: M em repouso em S (CM)

a massa aumenta de $\Delta m = E_K/c^2 = 2m(\gamma - 1)$

$\Rightarrow M = 2m + \Delta m = 2\gamma m$

Seja ref. S' com $v = u$: 1 partícula em repouso

a velocidade da outra é: $u' = \dfrac{u - v}{1 - uv/c^2} = \dfrac{-2u}{1 + u^2/c^2}$

depois da colisão M se move para a esquerda com u

momento inicial em S' : $p_i' = \dfrac{m u'}{\sqrt{1-u'^2/c^2}}$ para esquerda

momento final em S' : $p_f' = \dfrac{M u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$ para esquerda

agora $1-\dfrac{u'^2}{c^2} = 1-\left(\dfrac{u-v}{1-uv/c^2}\right)^2\dfrac{1}{c^2} = 1-\left[\dfrac{u^2-2uv+v^2}{(1-uv/c^2)^2}\right]\dfrac{1}{c^2} = 1-\dfrac{4u^2/c^2}{(1+u^2/c^2)^2} =$

$$= \frac{(1+u^2/c^2)^2-4u^2/c^2}{(1+u^2/c^2)^2} = \frac{(1-u^2/c^2)^2}{(1+u^2/c^2)^2}$$

então $p_i' = m\dfrac{\left[2u/(1+u^2/c^2)\right]}{(1-u^2/c^2)/(1+u^2/c^2)} = \dfrac{2mu}{1-u^2/c^2}$

pela conserv. $\vec{p}$: $p_f' = p_i' \Rightarrow \dfrac{Mu}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \dfrac{2mu}{1-u^2/c^2} \Rightarrow$

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = 2\gamma m$$

Massa e Energia de Ligação

E_b = energia de ligação (energia requerida para separar 2 partículas ligadas)

A massa de um sistema ligado é menor que a das partículas separadas por E_b/c^2

u.m.a. : $1u = 1{,}66054\cdot10^{-27}\,kg = 1{,}492\cdot10^{-10}\,J/c^2 = 931{,}5\ MeV/c^2$

partícula	γ	ν	e	μ	$\pi^{\pm}(\pi^0)$	p	n
mc^2 (MeV)	0	$<2{,}8\cdot10^{-6}$	0,511	105,7	139,6 (135)	938,3	939,6

^2H (d)	^3He (h)	^4He (α)
1875,6	2808,4	3727,4

ex 2-8) Energia de ligação do elétron no H : $E_b = 13{,}6\ eV$

$$\Delta m = \frac{13{,}6\ eV}{931{,}5\ MeV/u} = 1{,}46\cdot10^{-8}\ u$$