4) Massa Invariante

vimos que $X = (ct, \vec{r}) \Rightarrow X^2 = c^2t^2 - r^2$

e que $P = (E/c, \vec{p}) \Rightarrow P^2 = E^2/c^2 - p^2 = m^2c^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow m^2c^4 = E^2 - p^2c^2$

$\Rightarrow (mc^2)^2 = E^2 - (pc)^2$

então $\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta r^2$ descreve a <u>cinemática</u> do sistema

e $(mc^2)^2 = E^2 - (pc)^2$ descreve a <u>dinâmica</u> do sistema

ex. 2-9) $E = 4{,}5 \cdot 10^{17}$ J , $px = 3{,}8 \cdot 10^8$ kgm/s , $py = 3 \cdot 10^8$ kgm/s,
massa de repouso $pz = 3 \cdot 10^8$ kgm/s todos no ref. do lab.
$m = ?$ (massa de repouso)

solução A) $(mc^2)^2 = E^2 - p^2c^2 = (4{,}5 \cdot 10^{17})^2 - (3{,}8^2 + 3^2 + 3^2) \cdot 10^{16} c^2 =$
$= 1{,}74 \cdot 10^{35}\ J^2 \Rightarrow m = \sqrt{1{,}74 \cdot 10^{35}}/c^2$
$\Rightarrow m = 4{,}6$ kg

Solução B) $m^2 = \left(\frac{E}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{p}{c}\right)^2 = 5^2 - (1{,}25^2 + 1^2 + 1^2) = 21{,}4$

$\Rightarrow m = 4{,}6$ kg

—//—

ex. 2-10) velocidade de um elétron rápido
$E = 2{,}40$ MeV $\Rightarrow p = ?$ e $v = ?$ no sist. do lab.
$m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg , $mc^2 = 0{,}511$ MeV

solução:
$pc = \sqrt{E^2 - m^2c^4} = \sqrt{(2{,}4\,MeV)^2 - (0{,}511\,MeV)^2} = 2{,}34$ MeV
$\Rightarrow p = 2{,}34$ MeV/c

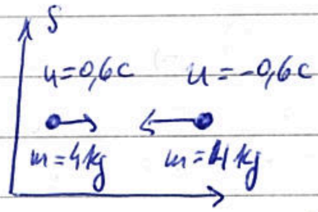
mas $1\,MeV/c = \dfrac{10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,J}{3 \cdot 10^8\ m/s} = 5{,}34 \cdot 10^{-22}$ kg m/s
$\Rightarrow p = 2{,}34 \cdot 5{,}34 \cdot 10^{-22}$
$p = 1{,}25 \cdot 10^{-21}$ kg m/s

note que $\frac{u}{c} = \frac{uc}{c^2} = \frac{(m\gamma)uc}{(m\gamma)c^2} = \frac{pc}{E} = \frac{2{,}34\,MeV}{2{,}40\,MeV} = 0{,}975$

$\Rightarrow u = 0{,}975c$

—//—

consideremos agora (2 partículas que não interagem)



$p_x = 3c \cdot kg\,,\; p_x = -3c \cdot kg \Rightarrow \Sigma p_x = 0$

então:

$$E/c^2 = \sqrt{m^2 + (p/c)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5\,kg \quad \text{(cada uma)}$$

e a energia total é $5c^2 + 5c^2 = 10c^2 \cdot kg$

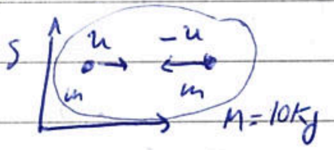
mas a massa de repouso do sistema é $M = 2E/c^2 = 10\,kg > 8\,kg$

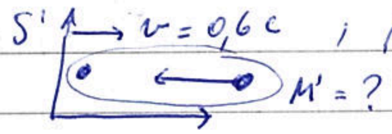
a diferença $\Delta m = 2\,kg$ não pertence às massas, mas é uma propriedade do sistema

e no ref. S'? :

ex. 2-11)

transf. de Lorentz da massa do sistema





; $\beta = 0{,}6 \Rightarrow \gamma = 1{,}25$

$$E' = \gamma(E - v p_x) = 1{,}25\,(10c^2 - 0{,}6c \cdot 0) = 12{,}5c^2 \cdot kg$$

$$p_x' = \gamma(p_x - vE/c^2) = 1{,}25\,(0 - 0{,}6c \cdot 10) = -7{,}5c \cdot kg$$

$$\Rightarrow M' = \sqrt{(E'/c^2)^2 - (p_x'/c)^2} = \sqrt{12{,}5^2 - (-7{,}5)^2} = 10\,kg$$

—//—

Partículas de massa zero: $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ $\begin{cases} E>0 \\ E=0 \\ E<0 \end{cases}$

Na física clássica, se $m=0$: $\vec{p}=0$, $E_K=0$, $\vec{F}=0$, etc

mas na relatividade, se $m=0$: $\boxed{E = pc} \Rightarrow \frac{u}{c} = \frac{pc}{E} \Rightarrow \boxed{u = c}$

partícula de massa zero que move-se à velocidade da luz (fóton)

$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \to \frac{0}{0}$, $\vec{p} = \gamma m\vec{u} = \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \to \frac{0}{0}$

Ex. 2-12) 5 MeV, 2 MeV, energia de repouso do sistema?

$p = E/c \Rightarrow p_{1x} = 5\,\text{MeV}/c$, $p_{2x} = -2\,\text{MeV}/c \Rightarrow \sum_i p_{ix} = 5-2 = 3\,\text{MeV}/c$

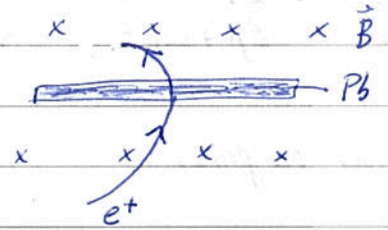
$E = E_1 + E_2 = 5 + 2 = 7\,\text{MeV}$

$\Rightarrow mc^2 = \sqrt{7^2 - 3^2} \simeq 6{,}3\,\text{MeV}$

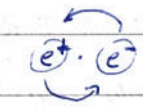
Criação e aniquilação de pares

(1928) P.A.M. Dirac prevê a existência de estados de energia negativa ($E < 0$):

(1932) C.D. Anderson descobre o pósitron (e^+), antipartícula do elétron



aniquilação:



positrônio $\Rightarrow$ $\vec{p}_{\gamma 1} = -\vec{p}_{\gamma 2}$

$e^+ e^- \to 2\gamma$

$e^+ e^- \to 3\gamma$ ($< 0{,}3\%$)

se $u \ll c$: $E \simeq mc^2 = 0{,}511\,\text{MeV}$

$E_{TOT} = 2mc^2 = 1{,}022\,\text{MeV}$

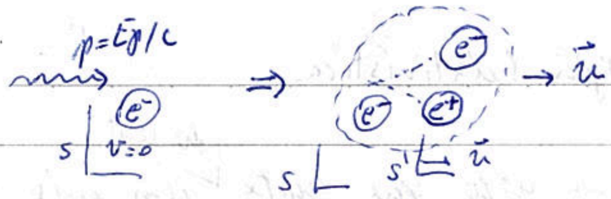
como $p_{\gamma 1} = E_{\gamma 1}/c = p_{\gamma 2} = E_{\gamma 2}/c \Rightarrow$

$\Rightarrow E_{\gamma 1} = E_{\gamma 2} = 0{,}511\,\text{MeV}$

e a energia de repouso do sistema é:

$$mc^2 = \sqrt{(E_{\gamma 1} + E_{\gamma 2})^2 - (\underbrace{\sum \vec{p}_{\gamma i}}_{0} c)^2} = 1{,}022\,\text{MeV}$$

criação de pares :



antes : $E_i = E_\gamma + mc^2$ depois : $E_f = E_i = E_\gamma + mc^2$

$p_i = E_\gamma / c$ $p_f = p_i = E_\gamma / c$

no ref. S' após a criação do par :

$$(3mc^2)^2 = E^2 - p^2c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9(mc^2)^2 = (E_\gamma + mc^2)^2 - (E_\gamma \cancel{c}/\cancel{c})^2$$

$$= \cancel{E_\gamma^2} + 2E_\gamma mc^2 + (mc^2)^2 - \cancel{E_\gamma^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E_\gamma = 4mc^2} = \underbrace{2mc^2}_{E_0} + \underbrace{2mc^2}_{E_K}$$

$$E_K = E - 3mc^2 = (E_\gamma + mc^2) - 3mc^2 =$$

$$= 4mc^2 + mc^2 - 3mc^2 = 2mc^2$$

veloc. do grupo : $\dfrac{u}{c} = \dfrac{pc}{E} = \dfrac{E_\gamma/c \cdot c}{E_\gamma + mc^2} = \dfrac{4mc^2}{5mc^2} = 0{,}8 \Rightarrow u = 0{,}8c$

ex. 2-13) Limiar para produção de pares

$$E_\gamma = \underbrace{mc^2 + E_{K^-}}_{\text{elétron criado}} + \underbrace{mc^2 + E_{K^+}}_{\text{pósitron criado}} + \underbrace{E_{KM}}_{\text{partícula existente}}$$

caso limite : par criado em repouso : $E_{K^-} = E_{K^+} = 0 \Rightarrow p^- = p^+ = 0$

cons. de $\vec{p}$: $p_i = \dfrac{E_\gamma}{c} = p_f = \dfrac{Mu}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow p_f = E_\gamma/c \geq \frac{2mc^2 + E_{KM}}{c} \simeq \frac{2mc^2}{c} + \overbrace{\frac{p_f^2}{2Mc}}^{\sim 0} \simeq \frac{2mc^2}{c}$$

para núcleos $M \gtrsim 1\,GeV/c^2$ e pode-se desprezar a energia cinética de recuo.

$$\Rightarrow \boxed{E_\gamma \geq 2mc^2}$$