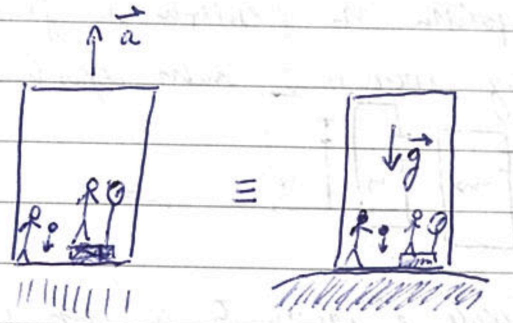
5) Relatividade Geral (RG)

→ Relatividade geral é a extensão da teoria da relatividade para sistemas de referência não-inerciais

Princípio da equivalência: um campo gravitacional homogêneo é completamente equivalente a um sistema de referência uniformemente acelerado.



$(\vec g = -\vec a)$

massa inercial x massa gravitacional:

$m_i \bullet\!\longrightarrow \vec F$: $\vec F = m_i \vec a$

$m_g \bullet \downarrow \vec g$, $\downarrow \vec P$: $\vec P = m_g \vec g$, neste caso $\vec F = \vec P \Rightarrow$

$m_i \vec a = m_g \vec g$

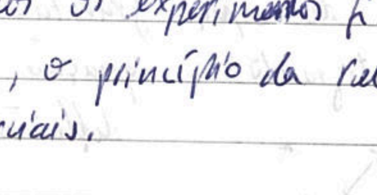
se $\vec a = \vec g$: $\boxed{m_i = m_g}$

testes experimentais verificam este resultado em $1/10^{12}$.

Einstein ampliou o princípio a todos os experimentos físicos. É a extensão do primeiro postulado, o princípio da relatividade, para sistemas de referência não-inerciais.

⇒ aceleração é relativa

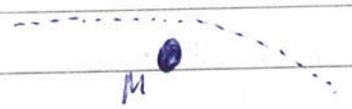
Previsões da RG : 1- avanço do periélio da órbita de Mercúrio



$$r = r_{min} \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon\cos(\varphi - \Delta\varphi)}$$

↳ RG: $\Delta\varphi = 6\pi G M / c^2(1-\varepsilon^2)R$

2 - curvatura dos raios de luz num campo gravitacional intenso

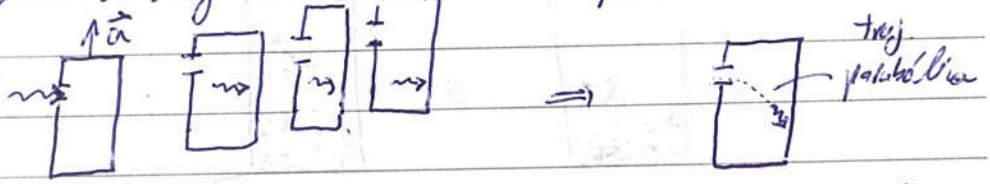


eclipse de 1919
Arthur Eddington

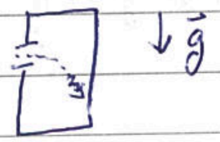
3 - desaceleração de relógios (frequências): desvio-para-o-vermelho gravitacional

Deflexão da luz no campo gravitacional

O espaço-tempo se deforma na presença de grandes massas
Seja um pulso de luz incidindo num compartimento acelerado:



e se o sist. acelerado é equivalente a um campo gravitacional:



Seja o intervalo: $ds^2 = c^2dt^2 - (dr^2 + r^2d\theta^2)$ (2 dimensões: r, θ)

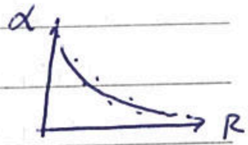
de acordo com a RG: $ds^2 = \gamma(r)^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\gamma(r)^2} - r^2 d\theta^2$,

dilatação temporal — contração do espaço

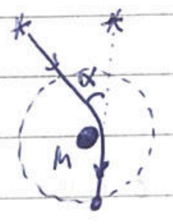
onde $\gamma(r) = (1 - 2GM/c^2r)^{1/2}$, com $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$

⇒ há uma dilatação temporal gravitacional e uma contração do espaço gravitacional

integrando a equação acima ($ds = 0$ para a luz):



deflexão $\alpha = \frac{4GM}{c^2R}$

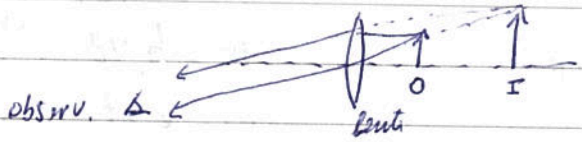


tomando $R = R_\odot = 6{,}96 \cdot 10^8\ m$, $M = M_\odot = 1{,}99 \cdot 10^{30}\ kg$ $\Big\} \Rightarrow \alpha = 1{,}75''$

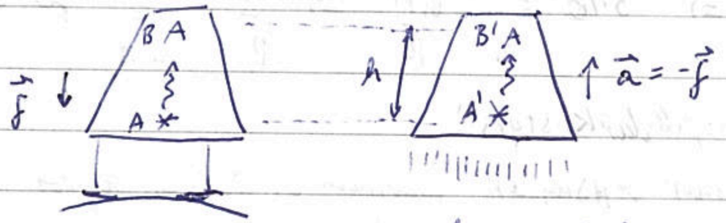
@ Sobral: $\alpha = 1{,}98 \pm 0{,}12$ arcsec

@ I. Príncipe $\alpha = 1{,}61 \pm 0{,}30$ arcsec

Lentes gravitacionais



Desvio para o vermelho gravitacional

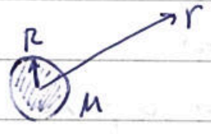


pulso emitido de A' em $t=0$ com freq. f_0
em $t = h/c$, B' tem veloc. $v = at = gh/c$
e mede o desvio para o vermelho ($v \ll c$):

$$\frac{(f_0-f)}{f_0} = \frac{\Delta f}{f_0} \simeq \frac{\Delta f}{f} \simeq \beta = \frac{v}{c} = \frac{gh}{c^2},$$

onde $\Delta\phi = gh = \Delta U/m$ (energ. pot. grav. por unid. de massa)

pelo princípio da equivalência B mede f também, portanto, o relógio A deve estar mais lento devido ao campo gravitacional $\Rightarrow$ desvio para o vermelho gravitacional.



no caso geral: $\Delta\phi = \int_R^\infty \frac{GM}{r^2}\,dr = GM\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_R^\infty = \frac{GM}{R}$

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{f_0-f}{f_0} = \frac{GM}{c^2R} \Rightarrow \boxed{\frac{f}{f_0} = 1 - \frac{GM}{c^2R}}$$

desvio para o azul gravitacional: $\boxed{\frac{f}{f_0} = 1 + \frac{GM}{c^2R}}$

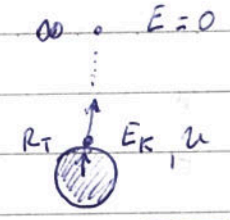
(1960, 1964, 1968) R.V. Pound: 14,4-keV γ emitidos pelo ^{57}Fe

$h = 22{,}5\,m \Rightarrow \frac{gh}{c^2} = 2{,}45\cdot 10^{-15}$

(1784) John Michell : "dark stars"

Buracos Negros

Velocidade de escape



$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$
$M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg
$R_T = 6{,}37 \cdot 10^{6}$ m

$$E = \frac{1}{2}mv_e^2 - G\frac{Mm}{r} = 0 \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = 11{,}2 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 11{,}2 \text{ Km/s}$$

se fizermos $v_e = c \Rightarrow$ $c = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \Rightarrow \frac{M}{R} = \frac{c^2}{2G} \simeq 6{,}74 \cdot 10^{26}$

(1799) Pierre S. Laplace

(1939) J.R. Oppenheimer & H.Snyder previram os buracos negros com a RG

de $\frac{f}{f_0} = 1 - \frac{GM}{c^2 R} \Rightarrow 0 \Rightarrow \frac{M}{R} = \frac{c^2}{G} \Rightarrow R = \frac{GM}{c^2}$, para $v \ll c$

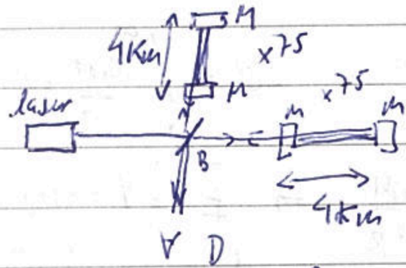
cálculo sem aproximações : raio Schwarzschild : $\boxed{R = \frac{2MG}{c^2}}$

para o Sol : $M_\odot = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg $\Rightarrow R_\odot = 2{,}954 \cdot 10^3$ m $\simeq 3$ Km

Ondas gravitacionais : distorções do espaço-tempo podem gerar ondas que propagam-se

LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory)

(2x Livingstone, Louisiana; Hanford, Washington)



M : espelhos
B : divisor de feixe
D : detector

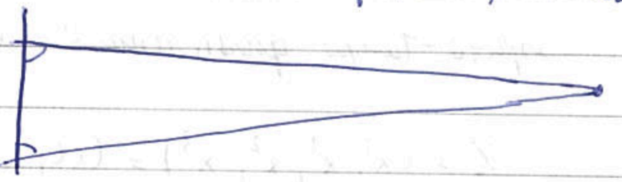
$l_{tot} \sim 400$ km , $\Delta x \sim 10^{-18}$ m

1° evento : 14/9/2015 : fusão de 2 buracos negros a 440 Mpc
2° evento : 26/12/2015
3° evento : 4/1/2015

Geometria da Relatividade Geral

(~300 a.C.) Euclides escreve "Os Elementos", onde descreve a geometria euclidiana (ou geometria plana):

5° postulado: Se uma reta corta outras duas fazendo os ângulos interiores do mesmo lado menor que dois ângulos retos, estas duas retas se interceptarão do mesmo lado definido pelos ângulos



... (1840) N. I. Lobachevsky explica como funciona a geometria hiperbólica

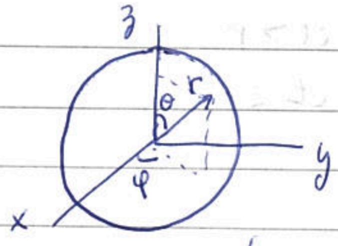
(1854) G. F. B. Riemann deu uma aula discutindo a geometria elíptica (esférica, em particular)

$\alpha+\beta+\gamma=\pi$ (geometria plana) | $\alpha+\beta+\gamma>\pi$ (geometria elíptica) | $\alpha+\beta+\gamma<\pi$ (geometria hiperbólica)

geometrias não-euclidianas

Riemann estudou as propriedades do espaço através do intervalo:

em 3D: $ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2$



$$\begin{cases} x = r\,\text{sen}\theta\cos\varphi \\ y = r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

derivando:
$$\begin{cases} dx = \text{sen}\theta\cos\varphi\, dr + r\cos\theta\cos\varphi\, d\theta - r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi\, d\varphi \\ dy = \text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi\, dr + r\cos\theta\,\text{sen}\varphi\, d\theta + r\,\text{sen}\theta\cos\varphi\, d\varphi \\ dz = \cos\theta\, dr - r\,\text{sen}\theta\, d\theta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\text{sen}^2\theta\, d\varphi^2$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta \, d\varphi^2 \equiv \sum_{ij} g_{ij} \, dx^i dx^j \; ; \; i,j = 1,2,3$$

onde: $[g_{ij}] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{cartesianas}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \end{bmatrix}}_{\text{esféricas}}$

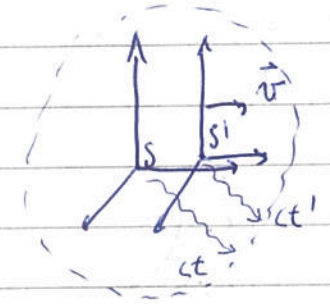
é a <u>métrica</u> do espaço.

(1907) H. Minkowski descreve a teoria da relatividade usando o espaço-tempo quadridimensional:

$$\mathcal{X} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{r}), \text{ tal que:}$$

$$\mathcal{X}^2 = \mathcal{X} \cdot \mathcal{X} = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 =$$

$$= c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t^2 - r^2$$



em S: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = c^2 t^2 \Rightarrow c^2 t^2 - r^2 = 0$

em S': $x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2 = c^2 t'^2 \Rightarrow c^2 t'^2 - r'^2 = 0$

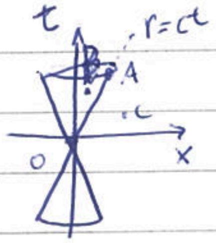
em 4D: $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$

é invariante: $ds^2 = ds'^2 = 0$

assim a métrica é:

$$[g_{ij}] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{Minkowsky}}$$

intervalos:

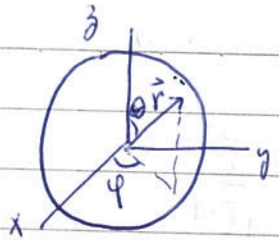


A) tipo luz: $s^2 = 0 \Rightarrow ct = r$

B) tipo tempo: $s^2 > 0 \Rightarrow ct > r$

C) tipo espaço: $s^2 < 0 \Rightarrow ct < r$

ademais: $ds^2 = ds'^2 \Rightarrow \begin{cases} x' = \gamma(x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - vx/c^2) \end{cases}$ transf. de Lorentz agora



$$\vec{r} = r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi\,\hat{x} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\hat{y} + r\cos\theta\,\hat{z}$$

os versores esféricos podem ser encontrados por:

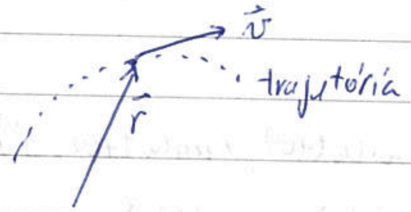
$$\hat{r} = \frac{\partial\vec{r}/\partial r}{|\partial\vec{r}/\partial r|} = \mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}$$

$$\hat{\theta} = \frac{\partial\vec{r}/\partial\theta}{|\partial\vec{r}/\partial\theta|} = \cos\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\hat{y} - \mathrm{sen}\,\theta\,\hat{z}$$

$$\hat{\varphi} = \frac{\partial\vec{r}/\partial\varphi}{|\partial\vec{r}/\partial\varphi|} = -\mathrm{sen}\,\varphi\,\hat{x} + \cos\varphi\,\hat{y}$$

de um modo geral: $\hat{e}_i = \dfrac{\hat{\varepsilon}_i}{h_i}$, $\hat{\varepsilon}_i \equiv \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial x^i}$, $h_i = \left|\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial x^i}\right|$

no espaço euclidiano a menor distância entre 2 pontos é uma reta
no espaço rimanniano a menor distância entre 2 pontos é uma geodésica



$$\vec{v} = v^i\,\hat{e}_i$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv^i}{dt}\hat{e}_i + v^i\frac{d\hat{e}_i}{dt},$$

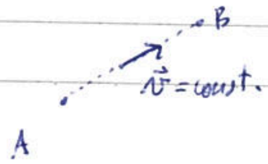
onde $\dfrac{d\hat{e}_i}{dt} = \dfrac{d\hat{e}_i}{dx^j}\dfrac{dx^j}{dt} \equiv \Gamma^k_{ij}\,\hat{e}_k\,\dfrac{dx^j}{dt}$

↳ comb. linear de $\hat{e}_k$ → símbolos de Christoffel

então: $\vec{a} = \dfrac{dv^k}{dt}\hat{e}_k + v^i\,\Gamma^k_{ij}\,\hat{e}_k\dfrac{dx^j}{dt} = \left(\dfrac{dv^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}v^i\dfrac{dx^j}{dt}\right)\hat{e}_k =$

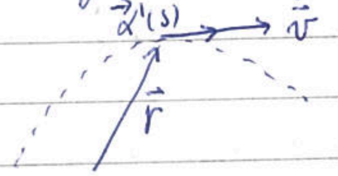
$$= \left(\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\right)\hat{e}_k$$

para conectar 2 pontos: $\vec{a} = 0 \Longrightarrow \boxed{\dfrac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij}\dfrac{dx^i}{dt}\dfrac{dx^j}{dt} = 0}$



equação da geodésica

parametrizando a trajetória com uma função $\vec{\alpha}(s)$



$$\vec{\alpha}'(s) = \frac{d\vec{\alpha}}{ds} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

a <u>curvatura</u> da trajetória é definida pela norma da segunda derivada:

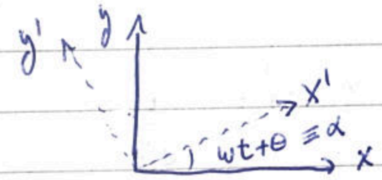
$$\boxed{k \equiv \|\vec{\alpha}''(s)\|}$$

curvatura zero:  , pequena curvatura: 
grande curvatura: 

mas  tem $k=0$  tem $k>0$  tem $k<0$

$\alpha+\beta+\gamma=\pi$ $\qquad$ $\alpha+\beta+\gamma>\pi$ $\qquad$ $\alpha+\beta+\gamma<\pi$

Einstein supôs que para sistemas acelerados as transformações de Lorentz valem num $\delta t \to 0$ e aplicou a equivalência em dois sistemas com rotação relativa constante:



$$X' = (ct', \underbrace{r\cos(\omega t+\theta)}_{r\cos\alpha}, \underbrace{r\,\mathrm{sen}(\omega t+\theta)}_{r\,\mathrm{sen}\,\alpha}, z')$$

$$dx' = \cos(\omega t+\theta)\,dr - r\,\mathrm{sen}(\omega t+\theta)\,d\theta - r\omega\,\mathrm{sen}(\omega t+\theta)\,dt$$

$$dy' = \mathrm{sen}(\omega t+\theta)\,dr + r\cos(\omega t+\theta)\,d\theta + r\omega\cos(\omega t+\theta)\,dt$$

$$\Rightarrow ds^2 = c^2dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 =$$

$$= c^2dt^2 - \cos^2\alpha\,dr^2 - r^2\mathrm{sen}^2\alpha\,d\theta^2 - r^2\omega^2\mathrm{sen}^2\alpha\,dt^2 +$$

$$+\ \cancel{2r\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha\,dr\,d\theta} + \cancel{2r\omega\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha\,dr\,dt} - 2r^2\omega\,\mathrm{sen}^2\alpha\,d\theta\,dt +$$

$$-\ \mathrm{sen}^2\alpha\,dr^2 - r^2\cos^2\alpha\,d\theta^2 - r^2\omega^2\cos^2\alpha\,dt^2 +$$

$$-\ \cancel{2r\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha\,dr\,d\theta} - \cancel{2r\omega\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha\,dr\,d\theta} - 2r^2\omega\cos^2\alpha\,d\theta\,dt - dz^2 =$$

$$= c^2dt^2 - dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\omega^2dt^2 - 2r^2\omega\,d\theta\,dt - dz^2 \Rightarrow$$

$$ds^2 = \left(1-\frac{r^2\omega^2}{c^2}\right)c^2dt^2 - dr^2 - r^2d\theta^2 - dz^2 - 2\frac{r^2\omega}{c}\,d\theta\,c\,dt$$

a métrica fica, portanto, destorcida:

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1-(r\omega/c)^2 & 0 & -\omega r^2/c & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\omega r^2/c & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{\text{Einstein}}$$

A equação de campo de Einstein:

$$E_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}$$

↳ tensor energia-momento

↳ curvatura (eq. dif. de 2ª ordem em g_{ik})

$$E_{ik} = R_{ik} - \frac{g_{ik} R}{2} + \Lambda g_{ik}$$

↳ constante cosmológica

↳ escalar de Ricci

↳ tensor de curvatura

$$\therefore \boxed{R_{ik} - \frac{g_{ik} R}{2} + \Lambda g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}}$$