Cinemática relativística

Física de Partículas Elementares

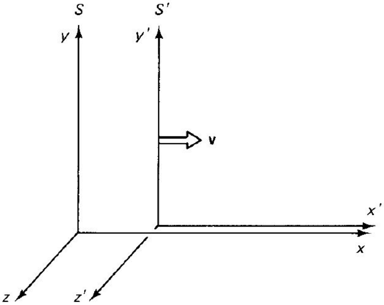
Prof. Marcelo A. Leigui de Oliveira

Centro de Ciências Naturais e Humanas
Universidade Federal do ABC
Av. dos Estados, 5001
09210-580 Santo André-SP

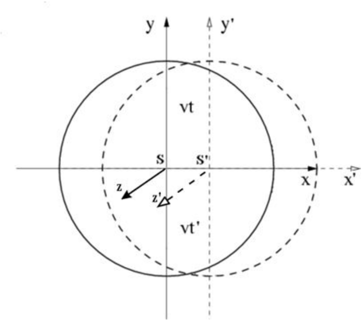
27 de fevereiro de 2025

Transformações de Lorentz

- Postulados da relatividade especial:
  1. As leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais (S e S', se $\vec{v} = const.$);
  2. A velocidade da luz é independente do movimento da fonte ou do observador ($c = 299.792.458$ m/s).



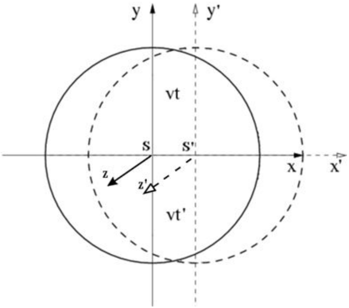
Transformações de Lorentz



- Sejam 2 pulsos de luz que partem ao mesmo tempo (t=t'=0) da origem dos referenciais S e S', quando O=O'. Como eles viajam à mesma velocidade *c* nos 2 referenciais:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$$
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2$$

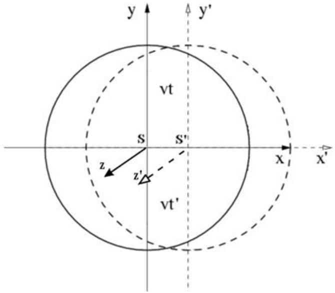
Transformações de Lorentz



- Sejam 2 pulsos de luz que partem ao mesmo tempo (t=t'=0) da origem dos referenciais S e S', quando O=O'. Como eles viajam à mesma velocidade *c* nos 2 referenciais:

$$(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$
$$(ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0$$

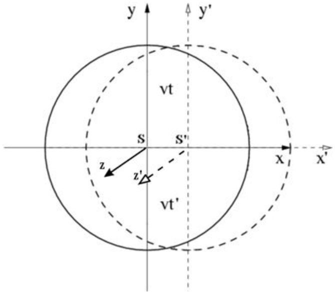
Transformações de Lorentz



- As transformações devem ser lineares e, no limite de baixas velocidades, equivalentes às transformações de Galileu. Supondo:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t + \delta) \end{cases}$$

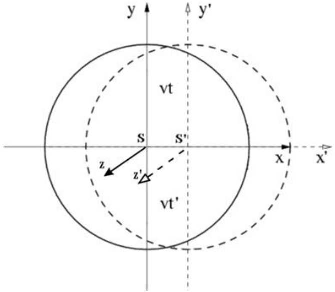
Transformações de Lorentz



- As transformações devem ser lineares e, no limite de baixas velocidades, equivalentes às transformações de Galileu. Supondo:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t + \delta) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0 \\ (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$$

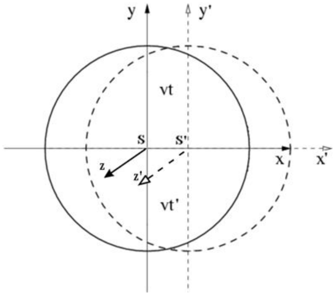
Transformações de Lorentz



- Substituindo:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t + \delta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c^2\gamma^2(t+\delta)^2 - \gamma^2(x - vt)^2 - y^2 - z^2 = 0 \\ c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$$

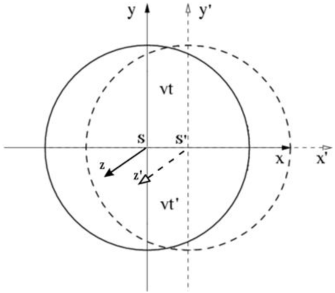
Transformações de Lorentz



- Calculando:

$$\Rightarrow \begin{cases} c^2\gamma^2(t^2 + 2t\delta + \delta^2) - \gamma^2(x^2 - 2vtx + v^2t^2) - y^2 - z^2 = 0 \\ c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$$

Transformações de Lorentz

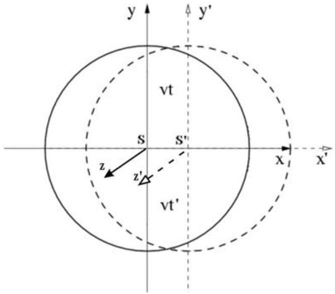


- Eliminando os termos ausentes em S (lineares em t):

$$\Rightarrow \begin{cases} c^2\gamma^2(t^2 + \cancel{2t\delta} + \delta^2) - \gamma^2(x^2 - \cancel{2vtx} + v^2t^2) - y^2 - z^2 = 0 \\ c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c^2\gamma^2 2t\delta + \gamma^2 2vtx = 0 \Rightarrow \boxed{\delta = -\frac{vx}{c^2}}$$

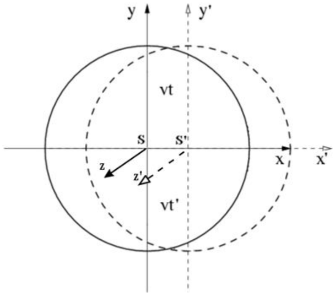
Transformações de Lorentz



- Continuando:

$$\Rightarrow \begin{cases} c^2\gamma^2\left(t^2 + \frac{v^2x^2}{c^4}\right) - \gamma^2(x^2 + v^2t^2) - y^2 - z^2 = 0 \\ c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$$

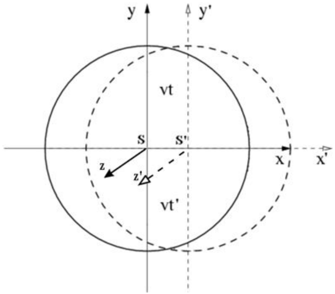
Transformações de Lorentz



- Continuando:

$$\Rightarrow \begin{cases} c^2\gamma^2 t^2 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} x^2 - \gamma^2 x^2 - \gamma^2 v^2 t^2 - y^2 - z^2 = 0 \\ c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$$

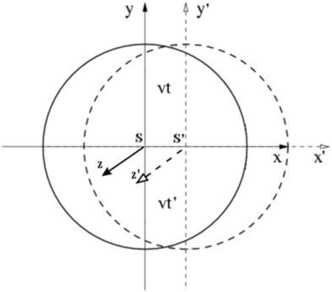
Transformações de Lorentz



- Continuando e rearranjando:

$$\Rightarrow \begin{cases} c^2t^2\gamma^2(1-v^2/c^2) - x^2\gamma^2(1-v^2/c^2) - y^2 - z^2 = 0 \\ c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$$

Transformações de Lorentz

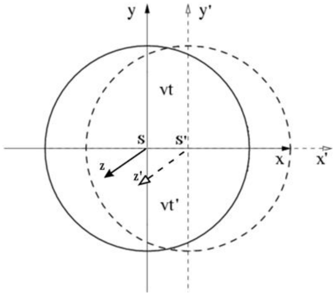


- Eliminando o fator extra:

$$\Rightarrow \begin{cases} c^2t^2\cancel{\gamma^2(1-v^2/c^2)} - x^2\cancel{\gamma^2(1-v^2/c^2)} - y^2 - z^2 = 0 \\ c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \end{cases} ,$$

de onde $\boxed{\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}}$ é o *fator de Lorentz.*

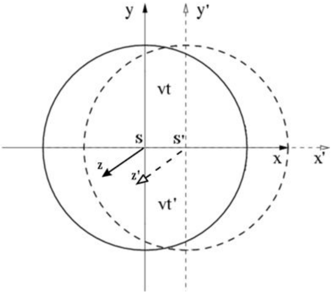
Transformações de Lorentz



- E, assim, temos a invariância:

$$\Rightarrow \begin{cases} c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \\ c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$$

Transformações de Lorentz



- Resumindo: tomando-se $x \parallel x'$ e ajustando-se os relógios, tal que $t = t' = 0$, quando $x = x' = 0$, vêm as *transformações de Lorentz*:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - vx/c^2) \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma(t' + vx'/c^2) \end{cases},$$

onde $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ é o *fator de Lorentz*.

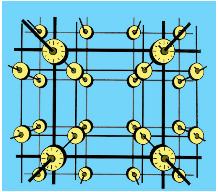
Transformações de Lorentz

- As transformações de Lorentz têm as seguintes consequências:

1. *A relatividade da simultaneidade*: sejam 2 eventos simultâneos ($t_A = t_B$), mas ocorrendo em locais diferentes ($x_A \neq x_B$), em S. Então, em S':

$$t'_A = \gamma(t_A - v x_A/c^2) \;\; , \;\; t'_B = \gamma(t_B - v x_B/c^2)$$

$$\Rightarrow t'_A = t'_B + \frac{\gamma v}{c^2}(x_B - x_A)$$



Sincronização de Einstein-Poincaré:

$$t_B = t_A + \frac{\Delta t_{AA'}}{2} = \frac{1}{2}(t_A + t_{A'})$$

Transformações de Lorentz

- As transformações de Lorentz têm as seguintes consequências:

  2. *Dilatação temporal*: uma partícula com *tempo de vida próprio* τ' tem, em outro referencial inercial, um tempo dilatado (ou, dito de outra forma, *relógios em movimento são mais lentos*):

$$\tau = \gamma\tau'.$$

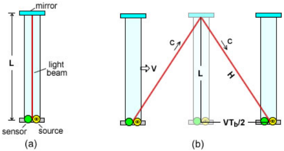


Figura: Relógio de luz: (a) em repouso; (b) em movimento.

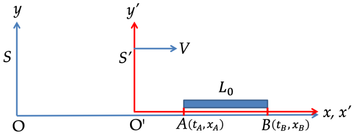
$$(a)\ \tau' = 2L/c \quad ; \quad (b)\ (c\tau/2)^2 = (c\tau'/2)^2 + (v\tau/2)^2$$

$$\Rightarrow (c^2 - v^2)\tau^2 = c^2\tau'^2 \Rightarrow \tau = \frac{\tau'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Transformações de Lorentz

- As transformações de Lorentz têm as seguintes consequências:
   3. *Contração de Lorentz*: uma régua de comprimento L_0, em repouso no referencial S, no referencial S', tem comprimento:

$$L = L_0/\gamma.$$



$$L_0 = v\Delta t$$

$$L = -v(-\Delta t') = v\Delta t' = v\Delta t/\gamma = L_0/\gamma$$

Transformações de Lorentz

- As transformações de Lorentz têm as seguintes consequências:

4. *Adição de velocidades*: diferenciando-se as coordenadas (x e t) das transformações de Lorentz e rearranjando-se os termos, vem:

$$\begin{cases} dx' = \gamma(dx - vdt) \\ dt' = \gamma(dt - vdx/c^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\cancel{\gamma}(dx - vdt)}{\cancel{\gamma}(dt - vdx/c^2)} = \frac{\cancel{dt}[(dx/dt) - v]}{\cancel{dt}[1 - (dx/dt)(v/c^2)]} = \frac{u - v}{1 - uv/c^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{u' = \frac{u - v}{1 - vu/c^2}}$$

Ou, da transformação inversa:

$$\Rightarrow \boxed{u = \frac{u' + v}{1 + vu'/c^2}}$$

Quadrivetores

- Definimos o *quadrivetor posição-tempo*, x^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$, da seguinte forma:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{r})$$

- Os quadrivetores seguem as transformações de Lorentz:

$$\begin{cases} x^{0\prime} = \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x^{1\prime} = \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x^{2\prime} = x^2 \\ x^{3\prime} = x^3 \end{cases},$$

onde $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ e $\beta = v/c$.

Quadrivetores

- De uma forma mais compacta:

$$x^{\mu\prime} = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (\mu = 0, 1, 2, 3),$$

onde Λ^{μ}_{ν} são os elementos da matriz:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Ou, ainda, na convenção de Einstein:

$$x^{\mu\prime} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu},$$

com a soma implícita correndo nos índices repetidos, isto é:

$$x^{\mu\prime} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} = \Lambda^{\mu}_{0} x^{0} + \Lambda^{\mu}_{1} x^{1} + \Lambda^{\mu}_{2} x^{2} + \Lambda^{\mu}_{3} x^{3},$$

para cada valor de μ.

Quadrivetores

- Na forma matricial, então, temos:

$$\begin{pmatrix} x^{0\prime} \\ x^{1\prime} \\ x^{2\prime} \\ x^{3\prime} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

- Existe uma combinação particular de quadrivetores que permanece a mesma quando vamos do referencial S para o S':

$$I = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x^{0\prime})^2 - (x^{1\prime})^2 - (x^{2\prime})^2 - (x^{3\prime})^2,$$

ou seja, I é um *invariante*. Novamente, na forma matricial:

$$I = \begin{pmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

e, analogamente, para as coordenadas em S'.

Quadrivetores

- Onde a matriz:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

é chamada de *métrica*. Ela dá conta dos 3 sinais de menos ao multiplicarmos os quadrivetores linha e coluna na expressão anterior. O invariante fica:

$$I = \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} = g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu}.$$

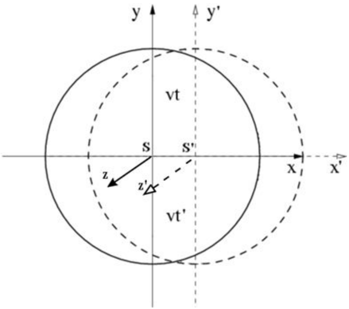
- Agora definimos o *quadrivetor covariante*, x_μ (índices embaixo):

$$x_\mu \equiv g_{\mu\nu} x^{\nu},$$

onde o quadrivetor original é um *quadrivetor contravariante*, x^μ (índices em cima). E, finalmente:

$$I = x_\mu x^\mu.$$

Quadrivetores



- Sejam 2 pulsos de luz que partem ao mesmo tempo (t=t'=0) da origem dos referenciais S e S', quando O=O'. Como eles viajam à mesma velocidade c nos 2 referenciais:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2 \Leftrightarrow (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \Leftrightarrow (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$$

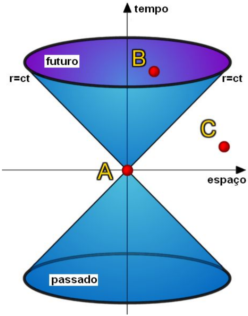
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2 \Leftrightarrow (ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0 \Leftrightarrow (x^{0\prime})^2 - (x^{1\prime})^2 - (x^{2\prime})^2 - (x^{3\prime})^2 = 0$$

$$\Rightarrow I = x_\mu x^\mu = x'_\mu x^{\mu\prime} = 0$$

Quadrivetores

- Um quadrivetor genérico a^μ é definido com base nas mesmas propriedades (álgebra) do quadrivetor x^μ:
  - Transformações de Lorentz:
  $$a^{\mu\prime} = \Lambda^\nu_\mu a^\mu;$$
  - Covariância e contravariância:
  $$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu;$$
  $$a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu,$$
  onde $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ são os elementos da matriz inversa g^{-1};
  - O *produto escalar* com um outro quadrivetor b^μ:
  $$a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$$
  e o produto escalar com ele mesmo:
  $$a^2 = a \cdot a = a^\mu a_\mu = a_\mu a^\mu = (a^0)^2 - |\vec{a}|^2.$$

Quadrivetores



- O produto escalar de a^μ com ele mesmo é equivalente ao *intervalo* entre o *evento* $a^\mu = (ct, x, y, z)$ e o evento da origem (0,0,0,0), então o evento final pode ser:

$$\begin{cases} \textit{tipo tempo} & , \textit{se} \quad a^2 > 0 \\ \textit{tipo luz} & , \textit{se} \quad a^2 = 0 \\ \textit{tipo espaço} & , \textit{se} \quad a^2 < 0 \end{cases}$$

Quadrivetores

- Agora, podemos definir tensores de classes superiores:
  - Tensores de segunda classe (com $4^2 = 16$ componentes):
  $$s^{\mu\nu\prime} = \Lambda^\mu_\kappa \Lambda^\nu_\sigma s^{\kappa\sigma};$$
  - Tensores de terceira classe (com $4^3 = 64$ componentes):
  $$t^{\mu\nu\lambda\prime} = \Lambda^\mu_\kappa \Lambda^\nu_\sigma \Lambda^\lambda_\tau t^{\kappa\sigma\tau}.$$
- Um escalar (invariante) é um tensor de classe 0, um vetor é um tensor de classe 1, uma matriz é um tensor de classe 2, um "cubo de dados" é um tensor de classe 3, etc;
- Obtemos os tensores covariantes, abaixando-se os índices:
$$s^\mu_\nu = g_{\nu\lambda} s^{\mu\lambda}; \;\; s_{\mu\nu} = g_{\mu\kappa} g_{\nu\lambda} s^{\kappa\lambda};$$
- $a^\mu b^\mu$ é um tensor de classe 2, $a^\mu t^{\nu\lambda\sigma}$ é um tensor de classe 4, etc;
- *Contração* (somas de índices repetidos): s^μ_μ é um escalar, $t^{\mu\nu}_\nu$ é um vetor, $a_\mu t^{\mu\nu\lambda}$ é um tensor de classe 2, etc;

Energia e momento

- A distinção entre o intervalo de tempo da partícula $d\tau$ (ou *tempo próprio*) e o intervalo de tempo do laboratório dt é:

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma},$$

onde γ é o fator de Lorentz;

- A velocidade da partícula em relação ao laboratório é:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt},$$

mas a *velocidade própria* é definida com relação ao tempo próprio:

$$\vec{\eta} \equiv \frac{d\vec{x}}{d\tau}$$

- Então:

$$\vec{\eta} = \gamma \vec{v}$$

- Agora, na mudança do referencial do laboratório S para o referencial da partícula S', o numerador e o denominador da velocidade $\vec{v}$ se transformam por Lorentz, mas somente o numerador de $\vec{\eta}$ o faz.

Energia e momento

- Assim, o quadrivetor velocidade (ou *quadrivelocidade*) é:

$$\eta^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau},$$

cujas componentes são:

$$\left.\begin{aligned} \eta^0 &= \tfrac{dx^0}{d\tau} = \tfrac{c\,dt}{dt/\gamma} = \gamma c \\ \eta^1 &= \tfrac{dx^1}{d\tau} = \tfrac{dx}{dt/\gamma} = \gamma v_x \\ \eta^2 &= \tfrac{dx^2}{d\tau} = \tfrac{dy}{dt/\gamma} = \gamma v_y \\ \eta^3 &= \tfrac{dx^3}{d\tau} = \tfrac{dz}{dt/\gamma} = \gamma v_z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \eta^\mu = \gamma(c, v_x, v_y, v_z).$$

Calculando a contração $\eta_\mu \eta^\mu$:

$$\eta_\mu \eta^\mu = \gamma^2(c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2) = \gamma^2 c^2(1 - v^2/c^2) = \gamma^2 c^2(1/\gamma^2) = c^2,$$

que é um invariante!

Energia e momento

- Para termos a conservação do momento em todos os referenciais inerciais, o momento relativístico é definido com a velocidade própria:
$$\vec{p} \equiv m\vec{\eta}$$
e, por conseguinte:
$$p^\mu = m\eta^\mu.$$
As coordenadas do momento são:
$$p^0 = m(\gamma c) = \gamma mc$$
$$\vec{p} = m(\gamma \vec{v}) = \gamma m\vec{v} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$
- A energia relativística é definida por:
$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$
de onde concluímos que: $p^0 = E/c$; e o *quadrivetor energia-momento* pode ser escrito:
$$p^\mu = (E/c, p_x, p_y, p_z).$$
Contraindo-se, temos outro invariante:
$$p_\mu p^\mu = m^2\eta_\mu\eta^\mu = m^2c^2 = E^2/c^2 - p^2 \Rightarrow \boxed{E^2 = p^2c^2 + m^2c^4}.$$

Energia e momento

- O momento relativístico reduz-se ao clássico no limite de baixas velocidades ($v << c$):
$$\lim_{v<<c} p = \lim_{\gamma\to 1}(\gamma m v) = mv.$$
- Mas a energia relativística não tende à energia cinética clássica:
$$\lim_{v<<c} E = \lim_{v<<c}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) \approx mc^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+...\right) = mc^2+\frac{1}{2}mv^2+...,$$
onde além do termo de energia cinética clássica ($\frac{1}{2}mv^2$) há um termo de ordem zero na velocidade:
$$\boxed{E_0 = mc^2},$$
chamado de *energia de repouso*. Denominaremos o restante do resultado *energia cinética relativística* (K):
$$E = E_0 + K \Rightarrow \gamma mc^2 = mc^2 + K \Rightarrow \boxed{K = (\gamma - 1)mc^2}.$$
- Além disso, podemos definir a *massa relativística* como:
$$m' = \gamma m,$$
onde m é a *massa de repouso* da partícula.

Energia e momento

- Resumindo:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{(momento relativístico)}$$

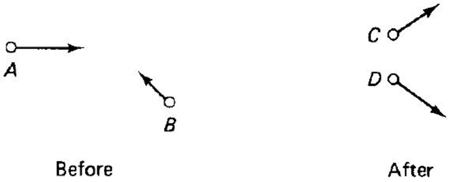
$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{(energia relativística)}$$

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \quad \text{(energia relativística)}$$

De onde:

  - se $v = 0$: $E = E_0 = mc^2$ e $\vec{p} = 0$;
  - se $v << c$: $E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$ e $\vec{p} = m\vec{v}$;
  - se $v \sim c$: $E = \gamma mc^2$ e $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$;
  - se $v = c$: $E = pc$ e $m = 0$ (fóton).

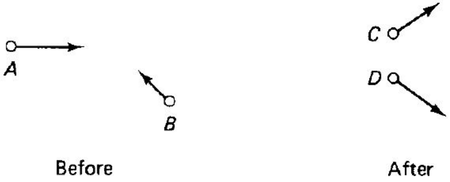
Colisões



- Seja a colisão:
$$A + B \to C + D;$$
- Nas colisões clássicas:
  1. A massa é conservada: $m_A + m_B = m_C + m_D$;
  2. O momento é conservado: $\vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{p}_C + \vec{p}_D$;
  3. A energia cinética nas colisões elásticas.
- Tipos de colisões:
  a. "Pegajosa": $K_A + K_B > K_C + K_D$;
  b. "Explosiva": $K_A + K_B < K_C + K_D$;
  c. Elástica: $K_A + K_B = K_C + K_D$,

  onde o caso limite de (a) é: $A + B \to C$ (ou seja, C e D se fundem) e o caso limite de (b) é: $A \to C + D$ (ou seja, um *decaimento*).

Colisões



- Seja a colisão:

$$A + B \rightarrow C + D;$$

- Nas colisões relativísticas:

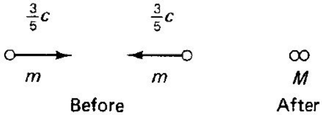
$$\left.\begin{array}{ll} \text{1. O momento é conservado:} & \vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{p}_C + \vec{p}_D; \\ \text{2. A energia é conservada:} & E_A + E_B = E_C + E_D; \end{array}\right\} \Rightarrow p^\mu_A + p^\mu_B = p^\mu_C + p^\mu_D$$

  3. A energia cinética nas colisões elásticas.

- Tipos de colisões:
  - a. "Pegajosa": K decresce, E_0 e m crescem;
  - b. "Explosiva": K cresce, E_0 e m decrescem;
  - c. Elástica: K, E_0 e m são conservados.

Exemplos e aplicações

1. Dois pedaços de barro de massa m colidem de frente a $v = \frac{3}{5}c$ (figura) e ficam grudados. Qual é a massa M do pedaço final?



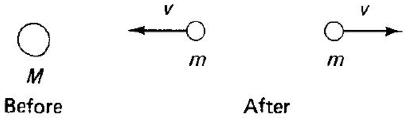
$$\text{cons. E:} \quad E_1 + E_2 = E_M \Rightarrow 2\gamma m\cancel{c^2} = M\cancel{c^2}$$

$$\text{cons. p:} \quad \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = (p_1 - p_2)\,\hat{x} = \vec{p}_M = 0$$

$$\Rightarrow M = \frac{2m}{\sqrt{1-(3/5)^2}} = \frac{5}{2}m$$

Exemplos e aplicações

2. Uma partícula de massa M, inicialmente em repouso, decai em dois pedaços de massa m (figura). Qual é a velocidade final de cada pedaço?



$$\text{cons. E:} \quad E_M = E_1 + E_2 \Rightarrow M\cancel{c^2} = 2\gamma m\cancel{c^2}$$
$$\text{cons. p:} \quad \vec{p}_M = 0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = (-p_1 + p_2)\,\hat{x}$$

$$\Rightarrow M = \frac{2m}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \Rightarrow v = c\sqrt{1-(2m/M)^2},$$

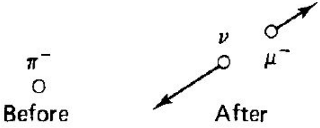
que tem um *limiar* de ocorrência: $M \geq 2m$.

- Ex.: o dêuteron é estável, pois:

$$m_d = 1875,6\ \mathrm{MeV}/c^2 < m_p + m_n = 1879,9\ \mathrm{MeV}/c^2$$

Exemplos e aplicações

3. Um píon em repouso decai em um múon e um neutrino. Qual é a velocidade final do múon?



$$\text{cons. E:} \quad E_\pi = E_\mu + E_\nu$$

$$\text{cons. p:} \quad \vec{p}_\pi = \vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu = 0 \Rightarrow \vec{p}_\mu = -\vec{p}_\nu$$

Sugestão 1: calcular energia a partir do momento (e vice-versa) usando o invariante:

$$E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4$$

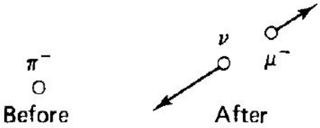
Para este caso:

$$\begin{aligned} E_\pi &= m_\pi c^2 \\ E_\mu &= c\sqrt{m_\mu^2 c^2 + \vec{p}_\mu^2} \\ E_\nu &\approx |\vec{p}_\nu| c = |\vec{p}_\mu| c \end{aligned}$$

$$\Rightarrow m_\pi c^2 = c\sqrt{m_\mu^2 c^2 + |\vec{p}_\mu|^2} + |\vec{p}_\mu| c \Leftrightarrow (m_\pi c - |\vec{p}_\mu|)^2 = m_\mu^2 c^2 + |\vec{p}_\mu|^2$$

Exemplos e aplicações

3. Um píon em repouso decai em um múon e um neutrino. Qual é a velocidade final do múon?



Resolvendo para $|\vec{p}_\mu|$:

$$|\vec{p}_\mu| = \frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2)c}{2m_\pi}$$

E para E_μ:

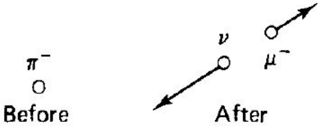
$$E_\mu = \frac{(m_\pi^2 + m_\mu^2)c^2}{2m_\pi}$$

Sugestão 2: uma vez com a energia ($E = \gamma mc^2$) e o momento ($\vec{p} = \gamma m\vec{v}$) da partícula, é fácil encontrar sua velocidade:

$$\vec{p}/E = \vec{v}/c^2 \Rightarrow \vec{v} = \vec{p}c^2/E \Rightarrow \boxed{v_\mu = \frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2)c}{m_\pi^2 + m_\mu^2}}$$

Exemplos e aplicações

3. Um píon em repouso decai em um múon e um neutrino. Qual é a velocidade final do múon?



Sugestão 3: usar a notação de quadrivetores:

$$p_\pi = p_\mu + p_\nu \Leftrightarrow p_\nu = p_\pi - p_\mu$$

Tomando-se o produto escalar:

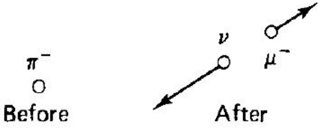
$$p_\nu^2 = p_\pi^2 + p_\mu^2 - 2p_\pi \cdot p_\mu,$$

mas $p_\nu^2 \approx 0$, $p_\pi^2 = m_\pi^2 c^2$, e $p_\mu^2 = m_\mu^2 c^2$ e $p_\pi \cdot p_\mu = \frac{E_\pi}{c}\frac{E_\mu}{c} = m_\pi E_\mu$

$$\Rightarrow 0 = m_\pi^2 c^2 + m_\mu^2 c^2 - 2m_\pi E_\mu \Rightarrow \boxed{E_\mu = \frac{(m_\pi^2 + m_\mu^2)c^2}{2m_\pi}}$$

Exemplos e aplicações

3. Um píon em repouso decai em um múon e um neutrino. Qual é a velocidade final do múon?



Analogamente:

$$p_\mu = p_\pi - p_\nu$$

Quadrando-se, vem:

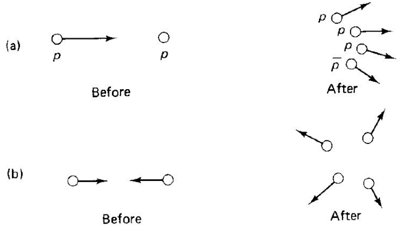
$$m_\mu^2 c^2 = m_\pi^2 c^2 - 2m_\pi E_\nu,$$

mas $E_\nu \approx |\vec{p}_\nu| c = |\vec{p}_\mu| c$, assim:

$$\boxed{|\vec{p}_\mu| = \frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2)c}{2m_\pi}}$$

Exemplos e aplicações

4. O acelerador Bevatron de Berkeley foi construído para produzir antiprótons pela reação $p + p \rightarrow p + p + p + \overline{p}$. Qual é o limiar para esta reação?

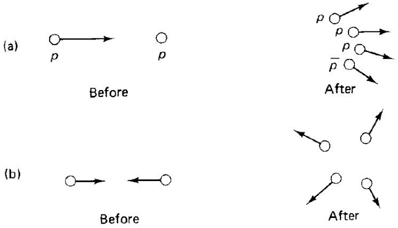


Sugestão 4: trabalhar no centro de momento (CM).

No referencial do CM é fácil ver que o limiar da reação dá-se quando a energia é suficiente para criar as 2 partículas extras, estando todas do estado final em repouso.

Exemplos e aplicações

4. O acelerador Bevatron de Berkeley foi construído para produzir antiprótons pela reação $p + p \to p + p + p + \overline{p}$. Qual é o limiar para esta reação?



No referencial do **laboratório**, **antes** da reação o momento total é:

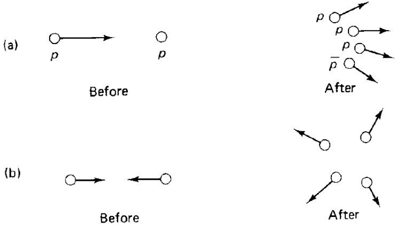
$$p^{\mu}_{TOT} = \left(\frac{E + mc^2}{c}, |\vec{p}|, 0, 0 \right).$$

No referencial do **CM**, **depois** da reação o momento total para o limiar é:

$$p^{\mu}_{TOT} = (4mc, 0, 0, 0).$$

Exemplos e aplicações

4. O acelerador Bevatron de Berkeley foi construído para produzir antiprótons pela reação $p + p \to p + p + p + \overline{p}$. Qual é o limiar para esta reação?



Agora, na transformação e um referencial para o outro, temos o invariante:

$$p_{\mu TOT}\, p^{\mu}_{TOT} = p'_{\mu TOT}\, p^{\mu\prime}{}_{TOT} \Rightarrow \left(\frac{E + mc^2}{c}\right)^2 - |\vec{p}|^2 = (4mc)^2$$

e usando-se a energia relativística, obtém-se o limiar de E:

$$E = 7mc^2,$$

ou seja, a energia cinética de pelo menos $K = 6mc^2$.

- A produção de antiprótons foi obtida com $K \geq 6$ GeV.

Exemplos e aplicações

4. Suponha 2 partículas idênticas, cada uma de massa m e energia cinética K, colidem-se frontalmente no CM. Qual é a cinética relativa K' (ou seja, a de uma partícula no referencial em que a outra está em repouso)?

(a) (b)

Tomando-se os quadrimomentos:

$$@\text{CM: } p^{\mu}_{TOT} = \left(\frac{2E}{c}, \vec{0}\right) \ , \quad @\text{Lab: } p^{\mu'}_{TOT} = \left(\frac{E' + mc^2}{c}, \vec{p}'\right),$$

calculando-se o invariante $(p_{TOT})^2 = (p'_{TOT})^2$:

$$\left(\frac{2E}{c}\right)^2 = \left(\frac{E' + mc^2}{c}\right)^2 - \vec{p}'^2$$

e eliminando-se $\vec{p}'$, com a fórmula da energia relativística, vem:

$$2E^2 = mc^2(E' + mc^2) \Rightarrow 2(K + mc^2)^2 = mc^2[(K' + mc^2) + mc^2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{K' = 4K\left(1 + \frac{K}{2mc^2}\right)}$$

Exemplos e aplicações

5. Por exemplo, o LHC acelera prótons até $K = 14$ TeV no CM, então:

$$\Rightarrow K' = 4K\left(1 + \frac{K}{2m_pc^2}\right) = 4 \cdot 14 \cdot 10^{12}\left(1 + \frac{14 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 938 \cdot 10^6}\right) = 4,2 \cdot 10^{17} \text{ eV}$$