

Regras de Feynman

Física de Partículas Elementares

Prof. Marcelo A. Leigui de Oliveira

Centro de Ciências Naturais e Humanas
Universidade Federal do ABC
Av. dos Estados, 5001
09210-580 Santo André-SP

25 de março de 2025



Universidade Federal do ABC

Tempos de vida e seções de choque

- Vamos iniciar a formulação quantitativa da dinâmica de partículas elementares, com cálculos de taxas de decaimentos (Γ) e seções de choque de espalhamentos (σ):
 - ▶ avaliação dos diagramas de Feynman para determinar as amplitudes (\mathcal{M});
 - ▶ inserção de \mathcal{M} na “Regra de Ouro” de Fermi.

E nos próximos capítulos, vamos desenvolver as teorias das interações eletromagnética, forte e fraca;

- 3 provas experimentais na FPE: estados ligados, decaimentos e espalhamentos;
 - 1 Tempos de vida:

Qual é o tempo de vida do múon?

- ▶ μ em repouso (tempo próprio, τ): μ em movimento vive mais (dilatação temporal, $t = \gamma\tau$);
- ▶ mesmo estacionários, os μ s não decaem no mesmo tempo. Os decaimentos são intrinsecamente randômicos e calculamos o ‘tempo de vida média’, τ .

Tempos de vida e seções de choque

- A taxa de decaimentos, Γ , é a probabilidade por unidade de tempo do múon se desintegrar. Dado no instante t um número de múons $N(t)$, então $N\Gamma$ múons vão decair em dt :

$$dN = -N\Gamma dt \Rightarrow \frac{dN}{N} = -\Gamma dt \Rightarrow \boxed{N(t) = N(0)e^{-\Gamma t}},$$

onde o tempo de vida média é o inverso da taxa de decaimento:

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\Gamma}}.$$

- Na prática, as partículas têm diferentes modos de decaimento:

P.ex.: méson K^+ , com $\Gamma_{tot} = 8,08 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$:

$$\begin{aligned} K^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu_\mu, & BR_1 &= 0,635, & \Gamma_1 &= 5,13 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}, \\ K^+ &\rightarrow \pi^+ + \pi^0, & BR_2 &= 0,212, & \Gamma_2 &= 1,71 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}, \\ K^+ &\rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-, & BR_3 &= 0,056, & \Gamma_3 &= 4,53 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}, \\ K^+ &\rightarrow \pi^+ + \pi^0 + \pi^0, & BR_4 &= 0,017, & \Gamma_4 &= 1,37 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}, \dots \end{aligned}$$

onde BR são as *razões de ramificação* de cada modo de decaimento:

$$BR = \frac{\Gamma_i}{\Gamma_{tot}} = \frac{\Gamma_i}{\sum_i \Gamma_i}$$

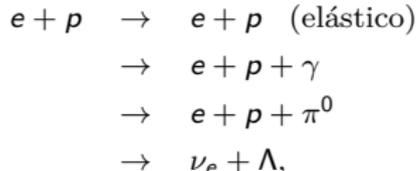
e nestes casos:

$$\tau = 1/\Gamma_{tot}.$$

Tempos de vida e seções de choque

2 Espalhamentos:

- Seção de choque: a área da seção reta transversal ao alvo, “vista” a partir do referencial das partículas do feixe: σ . A seção transversal depende:
 - ▶ Do alvo: para alvos “moles”, define-se uma seção transversal *efetiva* (“quanto mais perto, maior a deflexão”);
 - ▶ Das partículas projéteis;
 - ▶ Das interações (quais partículas são, ou não, produzidas?):

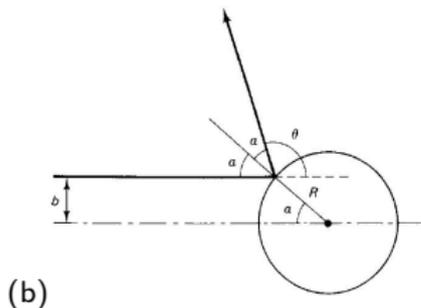
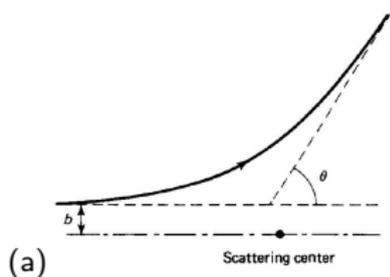


onde cada processo tem a sua seção de choque *exclusiva*, σ_i e a total é a seção de choque *inclusiva*:

$$\sigma_{tot} = \sum_i^n \sigma_i;$$

- ▶ Da velocidade das partículas incidentes, v , ou do tempo que as partículas do feixe passam na vizinhança do alvo: $\sigma \propto 1/v$. (Exceto no caso das ressonâncias.)

Tempos de vida e seções de choque - Exemplos



Seja uma partícula (p.ex., um pósitron) que encontra um potencial (p.ex., coulombiano de um próton) e espalha-se por um *ângulo de espalhamento*, θ , conforme a figura (a). O ângulo de espalhamento θ é função do *parâmetro de impacto*, b :

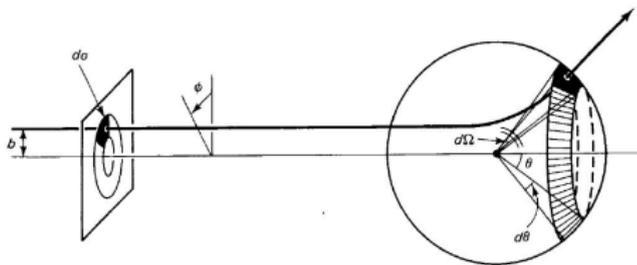
- ▶ quanto menor é o parâmetro de impacto ($\downarrow b$), maior é o ângulo de espalhamento ($\uparrow \theta$).

1 Espalhamentos em esfera dura:

Seja uma partícula que bate elasticamente numa esfera dura de raio R . Da figura (b), temos:

$$2\alpha + \theta = \pi \Rightarrow b = R \sin \alpha = R \cos(\theta/2) \Leftrightarrow \theta = 2 \cos^{-1}(b/R).$$

Tempos de vida e seções de choque - Exemplos



Se a partícula entra com um parâmetro de impacto entre b e $b + db$, ela emerge com ângulo de espalhamento entre θ e $\theta + d\theta$. Ou melhor, se ela passar por uma *área infinitesimal* $d\sigma$, vai espalhar no *ângulo sólido* $d\Omega$ (vide figura).

- A proporcionalidade entre elas:

$$d\sigma = D(\theta)d\Omega$$

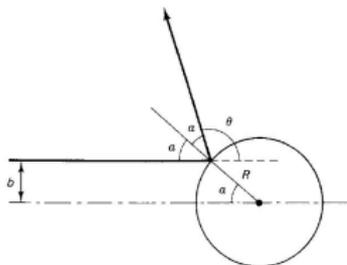
define a *seção de choque diferencial*, $D(\theta)$;

- Em princípio, D depende do ângulo azimutal, mas se o potencial for esfericamente simétrico (como na maioria dos nossos casos), não;
- Da figura:

$$d\sigma = |b db d\phi|, \quad d\Omega = |\sin \theta d\theta d\phi| \Rightarrow$$

$$D(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{b}{\sin \theta} \left(\frac{db}{d\theta} \right) \right|.$$

Tempos de vida e seções de choque - Exemplos



- 2 Voltando ao espalhamentos em esfera dura, vem:

$$\frac{db}{d\theta} = -\frac{R}{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow D(\theta) = \left| -\frac{R \cos(\theta/2)}{\sin \theta} \frac{R \sin(\theta/2)}{2} \right| = \frac{R^2}{4}.$$

A seção de choque total fica:

$$\sigma = \int d\sigma = \int D(\theta) d\Omega.$$

- 3 E, para a esfera dura:

$$\sigma = \int \frac{R^2}{4} d\sigma = \pi R^2,$$

que é, nada mais nada menos, que a área do círculo de raio R : as partículas do feixe nesta área se espalham, fora não.

Tempos de vida e seções de choque - Exemplos

4 Espalhamento Rutherford/coulombiano:

Uma partícula de carga q_1 (alvo) espalha uma partícula de carga q_2 . Da física clássica, deduzimos:

$$b = \frac{q_1 q_2}{2E} \cotg\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

onde E é a energia cinética da carga incidente.

A seção de choque diferencial fica:

$$D(\theta) = \left[\frac{q_1 q_2}{4E \sin^2(\theta/2)} \right]^2.$$

Neste caso, a seção de choque total é infinita (alcance infinito da força coulombiana):

$$\sigma = \int D(\theta) d\Omega = 2\pi \left(\frac{q_1 q_2}{4E} \right)^2 \int_0^\pi \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \sin\theta d\theta = \infty.$$

- Para um feixe de partículas incidentes com *luminosidade uniforme* \mathcal{L} (número de partículas por unidade de área e por unidade de tempo), temos:

$$\boxed{dN \equiv \mathcal{L} d\sigma} = \mathcal{L} D(\theta) d\Omega \Rightarrow D(\theta) = \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\mathcal{L}} \frac{dN}{d\Omega}},$$

assim, a seção de choque diferencial é o número de partículas, por unidade de tempo, espalhadas no ângulo sólido $d\Omega$, dividida por $d\Omega$ e pela luminosidade \mathcal{L} .

A regra de ouro

- Para calcular os decaimentos e os espalhamentos, há 2 ingredientes importantes:
 - ▶ A amplitude (\mathcal{M}) do processo, que contém toda a informação *dinâmica*, calculada pelos diagramas de Feynman;
 - ▶ O espaço de fase disponível, que contém toda a informação *cinemática* (“espaço de manobra”): o decaimento de uma partícula pesada em 2 leves tem um largo espaço de fase disponível, enquanto que num decaimento como o do nêutron ($n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$), o espaço de fase disponível é pequeno.
- A “regra de ouro” de Fermi:

$$\text{taxa de transição} = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}|^2 \times (\text{espaço de fase})$$

A regra de ouro

► Regra de ouro para decaimentos:

Seja o decaimento (com a partícula 1 em repouso):

$$1 \rightarrow 2 + 3 + \dots + n,$$

a taxa de decaimentos (infinitesimal) é dada pela fórmula:

$$d\Gamma = |\mathcal{M}|^2 \frac{S}{2\hbar m_1} \left[\left(\frac{cd^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} \right) \left(\frac{cd^3 \vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \right) \dots \left(\frac{cd^3 \vec{p}_n}{(2\pi)^3 2E_n} \right) \right] \\ \times (2\pi)^4 \delta^4(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 \dots - \mathbf{p}_n),$$

onde $\mathbf{p}_i = (E_i/c, \vec{p}_i)$ é o quadrimomento da partícula i , $E_i^2 - \vec{p}_i^2 c^2 = m_i^2 c^4$ e a função delta garante a conservação de energia-momento: ela vale zero a menos que $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \dots + \mathbf{p}_n$. S é um produto de fatores estatísticos: $1/j!$ para cada grupo de partículas idênticas no estado final.

A regra de ouro - Exemplos

Na fórmula anterior, os 3-momentos são todos infinitesimais em torno de \vec{p}_i , para obter a taxa de decaimentos total, temos que integrar em todos os 3-momentos de saída. Por exemplo, para um decaimento em 2 partículas:

$$\Gamma = \frac{S}{\hbar m_1} \left(\frac{c}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{2} \int \frac{|\mathcal{M}|^2}{E_2 E_3} \delta^4(p_1 - p_2 - p_3) d^3\vec{p}_2 d^3\vec{p}_3,$$

onde, em geral: $\mathcal{M} = f(\vec{p}_2, \vec{p}_3)$.

- 5 Uma partícula de massa m decai em duas secundárias, ambas sem massa (p.ex.: $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$). Dada a amplitude $\mathcal{M}(\vec{p}_2, \vec{p}_3)$, calcule a taxa de decaimentos.

Para o primário, $E_1 = mc^2$ e $\vec{p}_1 = 0$, então:

$$\delta^4(p_1 - p_2 - p_3) = \delta \left(mc - \frac{E_2}{c} - \frac{E_3}{c} \right) \delta^3(-\vec{p}_2 - \vec{p}_3).$$

De $m_2 = m_3 = 0$, temos $E_2 = |\vec{p}_2|c$, $E_3 = |\vec{p}_3|c$ e:

$$\Gamma = \frac{S}{\hbar m} \left(\frac{1}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{2} \int \frac{|\mathcal{M}|^2}{|\vec{p}_2||\vec{p}_3|} \times \delta(mc - |\vec{p}_2| - |\vec{p}_3|) \delta^3(-\vec{p}_2 - \vec{p}_3) d^3\vec{p}_2 d^3\vec{p}_3$$

A regra de ouro - Exemplos

- 5 Uma partícula de massa m decai em duas secundárias, ambas sem massa (p.ex.: $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$). Dada a amplitude $\mathcal{M}(\vec{p}_2, \vec{p}_3)$, calcule a taxa de decaimentos.

$$\Gamma = \frac{S}{\hbar m} \left(\frac{1}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{2} \int \frac{|\mathcal{M}|^2}{|\vec{p}_2||\vec{p}_3|} \times \delta(mc - |\vec{p}_2| - |\vec{p}_3|) \delta^3(-\vec{p}_2 - \vec{p}_3) d^3\vec{p}_2 d^3\vec{p}_3$$

Avaliando-se a integral $\int [\dots] \delta^3(-\vec{p}_2 - \vec{p}_3) d^3\vec{p}_3$ (i.e., $\vec{p}_3 \rightarrow -\vec{p}_2$):

$$\Gamma = \frac{S}{2(4\pi)^2 \hbar m} \int \frac{|\mathcal{M}|^2}{|\vec{p}_2|^2} \times \delta(mc - 2|\vec{p}_2|) d^3\vec{p}_2,$$

onde $|\mathcal{M}|^2 = f(|\vec{p}_2|)$.

Em coordenadas esféricas:

$$d^3\vec{p}_2 = |\vec{p}_2|^2 d|\vec{p}_2| \sin\theta d\theta d\phi,$$

então, fazendo-se a integral $\int \sin\theta d\theta d\phi = 4\pi$, vem:

$$\Gamma = \frac{S}{8\pi\hbar m} \int_0^\infty |\mathcal{M}|^2 \delta(mc - 2|\vec{p}_2|) d|\vec{p}_2| = \frac{S}{8\pi\hbar m} \int_0^\infty |\mathcal{M}|^2 \frac{1}{2} \delta\left(|\vec{p}_2| - \frac{mc}{2}\right) d|\vec{p}_2| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma = \frac{S}{16\pi\hbar m} |\mathcal{M}|^2,$$

onde $|\mathcal{M}|^2 = f(mc/2)$.

A regra de ouro - Exemplos

- 6 Decaimento em 2 corpos massivos ($m_1 \rightarrow m_2 + m_3$). Dada a amplitude $\mathcal{M}(\vec{p}_2, \vec{p}_3)$, calcule a taxa de decaimentos.

Avaliando-se a função delta (agora com $E_2 = c\sqrt{m_2^2 c^2 + \vec{p}_2^2}$ e $E_3 = c\sqrt{m_3^2 c^2 + \vec{p}_3^2}$) e fazendo-se a integral em \vec{p}_3 :

$$\Gamma = \frac{S}{2(4\pi)^2 \hbar m_1} \int \frac{|\mathcal{M}|^2 \delta(m_1 c - \sqrt{m_2^2 c^2 + \vec{p}_2^2} - \sqrt{m_3^2 c^2 + \vec{p}_2^2})}{\sqrt{m_2^2 c^2 + \vec{p}_2^2} \sqrt{m_3^2 c^2 + \vec{p}_2^2}} d^3 \vec{p}_2,$$

onde $|\mathcal{M}|^2 = f(|\vec{p}_2|)$.

Definindo-se $\rho \equiv |\vec{p}_2|$ e fazendo-se a integral angular, vem:

$$\Gamma = \frac{S}{8\pi \hbar m_1} \int_0^\infty \frac{|\mathcal{M}|^2 \delta(m_1 c - \sqrt{m_2^2 c^2 + \rho^2} - \sqrt{m_3^2 c^2 + \rho^2})}{\sqrt{m_2^2 c^2 + \rho^2} \sqrt{m_3^2 c^2 + \rho^2}} \rho^2 d\rho.$$

Definindo-se a energia total das partículas emergentes:

$$E \equiv c(\sqrt{m_2^2 c^2 + \rho^2} + \sqrt{m_3^2 c^2 + \rho^2}) \Rightarrow dE = \frac{E \rho}{\sqrt{m_2^2 c^2 + \rho^2} \sqrt{m_3^2 c^2 + \rho^2}} d\rho,$$

vem que:

$$\Gamma = \frac{S}{8\pi \hbar m_1} \int_{(m_2+m_3)c^2}^\infty |\mathcal{M}|^2 \frac{\rho}{E} \delta\left(m_1 c - \frac{E}{c}\right) dE$$

(Note o limite inferior de energia.)

A regra de ouro - Exemplos

- 6 Decaimento em 2 corpos massivos ($m_1 \rightarrow m_2 + m_3$). Dada a amplitude $\mathcal{M}(\vec{p}_2, \vec{p}_3)$, calcule a taxa de decaimentos.

Agora, das propriedades da delta $\delta(m_1 c - \frac{E}{c}) = c \delta(E - m_1 c^2)$, vem que:

$$\Gamma = \frac{S}{8\pi\hbar m_1} \int_{(m_2+m_3)c^2}^{\infty} |\mathcal{M}|^2 \frac{\rho}{E} c \delta(E - m_1 c^2) dE = \frac{S}{8\pi\hbar m_1} |\mathcal{M}|^2 \frac{\rho_0}{(m_1 c^2)} c,$$

onde:

$$E = m_1 c^2 \equiv c(\sqrt{m_2^2 c^2 + \rho_0^2} + \sqrt{m_3^2 c^2 + \rho_0^2}) \Rightarrow \text{(Probl. 6.5)}$$

$$\Rightarrow \rho_0 = \frac{c}{2m_1} \sqrt{m_1^4 + m_2^4 + m_3^4 - 2m_1^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_3^2 - 2m_2^2 m_3^2}.$$

Portanto:

$$\Gamma = \frac{S |\mathcal{M}|^2 \rho_0}{8\pi\hbar m_1^2 c},$$

desde que $m_1 > m_2 + m_3$. Ou, ainda:

$$\boxed{\Gamma = \frac{S |\mathcal{M}|^2 |\vec{p}|}{8\pi\hbar m_1^2 c}},$$

onde $|\vec{p}|$ é o módulo de qualquer partícula de saída, avaliada na condição de ρ_0 .

A regra de ouro

► Regra de ouro para espalhamentos:

Suponha que as partículas 1 e 2 colidam produzindo as partículas 3, 4, ..., n :

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + \dots + n,$$

a seção de choque (infinitesimal) é dada pela fórmula:

$$d\sigma = |\mathcal{M}|^2 \frac{\hbar^2 S}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2}} \left[\left(\frac{cd^3 \vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \right) \left(\frac{cd^3 \vec{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4} \right) \dots \left(\frac{cd^3 \vec{p}_n}{(2\pi)^3 2E_n} \right) \right] \\ \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 \dots - p_n),$$

onde $p_i = (E_i/c, \vec{p}_i)$ é o quadrimomento da partícula i , $E_i^2 - \vec{p}_i^2 c^2 = m_i^2 c^4$ e a função delta garante a conservação de energia-momento: ela vale zero a menos que $p_1 + p_2 = p_3 + p_4 + \dots + p_n$. S é um produto de fatores estatísticos: $1/j!$ para cada grupo de partículas idênticas no estado final.

A regra de ouro - Exemplos

7 Espalhamento de 2 corpos no CM.

Considere o processo:

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4$$

no referencial do CM. Dada a amplitude \mathcal{M} , calcule a seção de choque diferencial.

No referencial do CM: $\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$, então $p_1 \cdot p_2 = E_1 E_2 / c^2 + \vec{p}_1^2$. Segue (probl. 6.7) que:

$$\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2} = (E_1 + E_2) |\vec{p}_1| / c.$$

Assim:

$$d\sigma = \left(\frac{\hbar c}{8\pi} \right)^2 \frac{S |\mathcal{M}|^2 c}{(E_1 + E_2) |\vec{p}_1|} \frac{d^3 \vec{p}_3 d^3 \vec{p}_4}{E_3 E_4} \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4).$$

Avaliando-se a função delta:

$$\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) = \delta \left(\frac{E_1 + E_2 - E_3 - E_4}{c} \right) \delta^3(-\vec{p}_3 - \vec{p}_4),$$

usando-se a energia relativística em E_3 e E_4 e fazendo-se a integral em $d^3 \vec{p}_4$:

$$d\sigma = \left(\frac{\hbar c}{8\pi} \right)^2 \frac{S |\mathcal{M}|^2 c}{(E_1 + E_2) |\vec{p}_1|} \times \\ \times \frac{\delta \left((E_1 + E_2) / c - \sqrt{m_3^2 c^2 + \vec{p}_3^2} - \sqrt{m_4^2 c^2 + \vec{p}_3^2} \right)}{\sqrt{m_3^2 c^2 + \vec{p}_3^2} \sqrt{m_4^2 c^2 + \vec{p}_3^2}} d^3 \vec{p}_3$$

A regra de ouro - Exemplos

7 Espalhamento de 2 corpos no CM: $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$

Agora $|\mathcal{M}|^2$ depende também da direção de \vec{p}_3 e não podemos fazer diretamente a integral angular. Assim, definindo-se: $d^3\vec{p}_3 \equiv \rho^2 d\rho d\Omega$, obtemos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{S c}{(E_1 + E_2) |\vec{p}_1|} \times$$

$$\times \int_0^\infty |\mathcal{M}|^2 \frac{\delta\left((E_1 + E_2)/c - \sqrt{m_3^2 c^2 + \rho^2} - \sqrt{m_4^2 c^2 + \rho^2}\right)}{\sqrt{m_3^2 c^2 + \rho^2} \sqrt{m_4^2 c^2 + \rho^2}} \rho^2 d\rho.$$

Esta integral é análoga à vista no caso de decaimento de 2 corpos, com as mudanças: $m_2 \rightarrow m_4$ e $m_1 \rightarrow (E_1 + E_2)/c^2$. Então, analogamente, concluímos que:

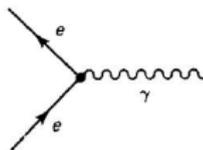
$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{S |\mathcal{M}|^2 |\vec{p}_f|}{(E_1 + E_2)^2 |\vec{p}_i|}},$$

onde $|\vec{p}_f|$ é a magnitude de qualquer momento de saída e $|\vec{p}_i|$ é a magnitude de qualquer momento de entrada.

(Obs.: $[\sigma] = \text{barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2$; $[\mathcal{M}] = (mc)^{4-n}$, onde n é o número de linhas externas.)

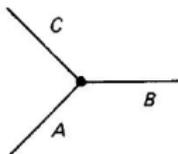
As regras de Feynman para uma teoria de brinquedo

- Veremos agora como calcular \mathcal{M} usando as regras de Feynman para avaliar os diagramas relevantes;
- Um vértice primitivo:



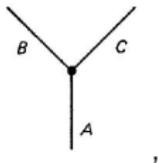
envolve partículas de spin $\frac{1}{2}$ (elétrons) com partículas de spin 1 (fóton), isto traz uma complicação a qual trataremos somente no capítulo 7. Por isso, chamaremos esta teoria “de brinquedo”;

- Imagine um mundo em que existam só 3 partículas (todas de spin 0 e antipartículas de si mesmas): A , B e C , com massas m_A , m_B e m_C . Há um único vértice primitivo:

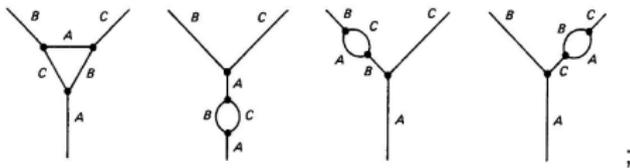


As regras de Feynman para uma teoria de brinquedo

- Seja $m_A > m_B + m_C$, tal que $A \rightarrow B + C$ seja possível. O diagrama de mais baixa ordem desta desintegração é:

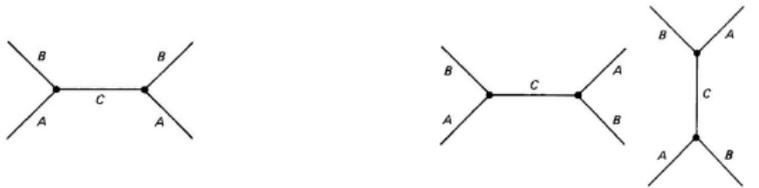


ao qual adicionamos pequenas correções de 3ª ordem:



- Vamos calcular (na mais baixa ordem):

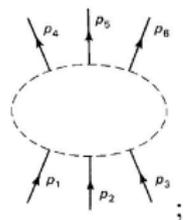
- ▶ o tempo de vida de A ;
- ▶ as seções de choque dos espalhamentos $A + A \rightarrow B + B$ (1 à esquerda) e $A + B \rightarrow A + B$ (2 à direita):



As regras de Feynman para uma teoria de brinquedo

- Para calcular \mathcal{M} , seguimos os seguintes passos:

- 1 **Notação.** Denote os quadrimomentos de entrada e de saída p_1, p_2, \dots, p_n e os momentos internos q_1, q_2, \dots, q_n . Estabeleça com setas uma direção positiva (abitrária para linhas internas):



- 2 **Constante de acoplamento.** Para cada vértice, escreva um fator:

$$-ig,$$

onde g é a *constante de acoplamento*, que especifica a intensidade da interação. Nesta teoria, g tem dimensão de momento;

- 3 **Propagador.** Para cada linha interna, escreva um fator:

$$\frac{i}{q_j^2 - m_j^2 c^2},$$

onde q_j é o quadrimomento da linha ($q_j^\mu q_{j\mu}$) e m_j a massa da partícula da linha;

As regras de Feynman para uma teoria de brinquedo

- 4 *Conservação de energia e momento.* Para cada vértice, escreva uma função delta:

$$(2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3),$$

onde os k s são os quadrimomentos *entrando* no vértice (ou *saindo* com sinal menos);

- 5 *Integrar sobre todos os momentos internos.* Para cada linha interna, escreva um fator:

$$\frac{1}{(2\pi)^4} d^4 q_j$$

e integre sobre todos os momentos internos;

- 6 *Cancelar a delta remanescente.* Cancele do resultado uma função delta:

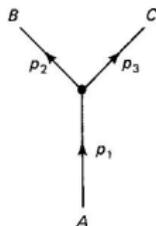
$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + \dots - p_n),$$

que reforça a conservação de energia e momento global.

Vai sobrar $-i\mathcal{M}$.

O tempo de vida de A

- O diagrama mais simples é o do decaimento $A \rightarrow B + C$ na mais baixa ordem, que não possui linhas internas:



- ▶ Da regra 2: $-ig$;
- ▶ Da regra 4: $(2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3)$;
- ▶ Da regra 6: $(2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3)$.

Então:

$$-i\mathcal{M} = -ig \Rightarrow \mathcal{M} = g$$

e a taxa de decaimento é:

$$\Gamma = \frac{g^2 |\vec{p}|}{8\pi \hbar m_A^2 c},$$

onde:

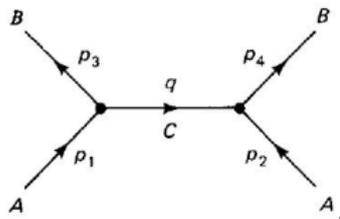
$$|\vec{p}| = \frac{c}{2m_A} \sqrt{m_A^4 + m_B^4 + m_C^4 - 2m_A^2 m_B^2 - 2m_A^2 m_C^2 - 2m_B^2 m_C^2}.$$

E o tempo de vida de A é:

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} = \frac{8\pi \hbar m_A^2 c}{g^2 |\vec{p}|}.$$

Espalhamento

- O diagrama mais simples, de mais baixa ordem, para o processo $A + A \rightarrow B + B$ é mostrado na figura:



- ▶ Há 2 vértices, da regra 2: $(-ig)^2$;
- ▶ Há 1 linha interna, da regra 3, vem o propagador:

$$\frac{i}{q^2 - m_C^2 c^2};$$

- ▶ Há 2 vértices, da regra 4, 2 funções delta:

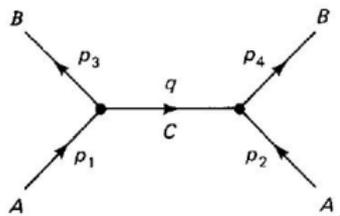
$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_3 - q) \text{ e } (2\pi)^4 \delta^4(p_2 + q - p_4);$$

- ▶ Da regra 5, 1 integral em:

$$\frac{1}{(2\pi)^4} d^4 q;$$

Espalhamento

- O diagrama mais simples, de mais baixa ordem, para o processo $A + A \rightarrow B + B$ é mostrado na figura:



Então, temos até aqui:

$$-g^2(2\pi)^4 \int \frac{i}{q^2 - m_C^2 c^2} \delta^4(p_1 - p_3 - q) \delta^4(p_2 + q - p_4) d^4 q.$$

A segunda delta exige que: $q = p_4 - p_2$, então:

$$-ig^2 \frac{1}{(p_4 - p_2)^2 - m_C^2 c^2} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) d^4 q,$$

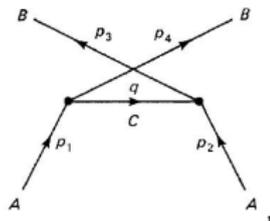
- onde já cancelamos acima o termo correspondente da regra 6 (conservação de energia/momento global);

Portanto:

$$\mathcal{M} = \frac{g^2}{(p_4 - p_2)^2 - m_C^2 c^2}.$$

Espalhamento

- Mas, esta não é toda a estória, pois há outro diagrama de ordem g^2 para o processo $A + A \rightarrow B + B$:



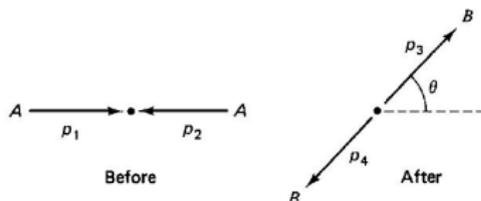
com p_3 conectando-se agora com p_2 .

Procedendo o cálculo analogamente, adiciona-se um termo:

$$\mathcal{M} = \frac{g^2}{(p_4 - p_2)^2 - m_C^2 c^2} + \frac{g^2}{(p_3 - p_2)^2 - m_C^2 c^2}$$

Espalhamento

- Agora, vamos calcular a seção de choque diferencial para o processo $A + A \rightarrow B + B$ no sistema do CM:



Sejam, por simplicidade, $m_A = m_B = m$, $m_C = 0$.

$$(p_4 - p_2)^2 - \cancel{m}c^2 c^2 = p_4^2 + p_2^2 - 2p_2 \cdot p_4 = -2\vec{p}^2(1 - \cos \theta),$$

$$(p_3 - p_2)^2 - \cancel{m}c^2 c^2 = p_3^2 + p_2^2 - 2p_2 \cdot p_3 = -2\vec{p}^2(1 + \cos \theta),$$

onde \vec{p} é o momento incidente da partícula 1, daí:

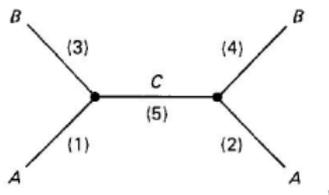
$$\mathcal{M} = \frac{g^2}{-2\vec{p}^2(1 - \cos \theta)} + \frac{g^2}{-2\vec{p}^2(1 + \cos \theta)} = -\frac{g^2}{\vec{p}^2 \sin^2 \theta}.$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{S|\mathcal{M}|^2}{(E_1 + E_2)^2} \frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|} = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{|\mathcal{M}|^2}{(2E)^2} \frac{|\vec{p}|}{|\vec{p}|}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar c g^2}{16\pi E \vec{p}^2 \sin^2 \theta} \right)^2}$$

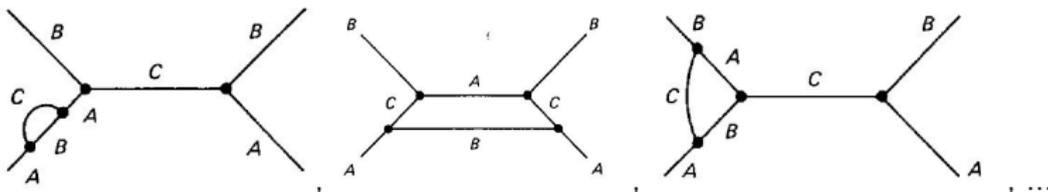
Diagramas de mais alta ordem

- Calculamos até aqui apenas o diagrama de mais baixa ordem (2 vértices):



com \mathcal{M} proporcional a g^2 .

- Alguns diagramas com 4 vértices:



Partindo da linha 1 são 5¹, da linha 2 são mais 4, ...:

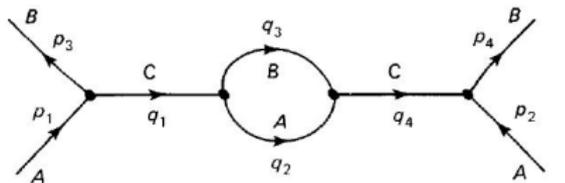
$$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$$

e mais 15 para o diagrama “torcido”.

¹Linha 1 com ela mesma, mais linha 1 com as outras.

Diagramas de mais alta ordem

- Calculemos um diagrama de 4 vértices em especial (com 1 laço na linha interna):



- Aplicando-se as regras de 1 a 5, obtemos:

$$g^4 \int \frac{\delta^4(p_1 - q_1 - p_3) \delta^4(q_1 - q_2 - q_3) \delta^4(q_2 + q_3 - q_4) \delta^4(q_4 + p_2 - p_4)}{(q_1^2 - m_C^2 c^2)(q_2^2 - m_A^2 c^2)(q_3^2 - m_B^2 c^2)(q_4^2 - m_C^2 c^2)} d^4 q_1 d^4 q_2 d^4 q_3 d^4 q_4$$

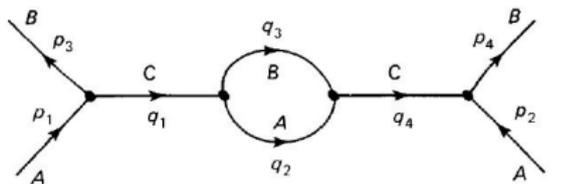
integrando-se em q_1 , substituindo $q_1 \rightarrow (p_1 - p_3)$, e em q_4 , substituindo $q_4 \rightarrow (p_4 - p_2)$, vem:

$$\frac{g^4}{[(p_1 - p_3)^2 - m_C^2 c^2][(p_4 - p_2)^2 - m_C^2 c^2]}$$

$$\times \int \frac{\delta^4(p_1 - p_3 - q_2 - q_3) \delta^4(q_2 + q_3 - p_4 + p_2)}{(q_2^2 - m_A^2 c^2)(q_3^2 - m_B^2 c^2)} d^4 q_2 d^4 q_3.$$

Diagramas de mais alta ordem

- Calculemos um diagrama de 4 vértices em especial (com 1 laço na linha interna):



Agora, integrando-se em q_2 , a primeira delta substitui $q_2 \rightarrow (p_1 - p_3 - q_3)$ e a segunda delta fica:

$$\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4),$$

que, pela regra 6, é cancelada.

Assim:

$$\mathcal{M} = i \left(\frac{g^4}{2\pi} \right)^4 \frac{1}{[(p_1 - p_3)^2 - m_C^2 c^2]^2} \times \int \frac{1}{[(p_1 - p_3 - q)^2 - m_A^2 c^2](q^2 - m_B^2 c^2)} d^4 q,$$

onde $q \equiv q_3$. Para grandes q , o integrando tende a $1/q^4$, tal que:

$$\int^{\infty} \frac{1}{q^4} q^3 dq = \ln q|_{\infty} = \infty,$$

que é um grande problema para a teoria. Ela deve ser *renormalizada*.