Introdução à Física de Partículas Elementares (NHZ3024)

Prof. Dr. Marcelo Augusto Leigui de Oliveira
Centro de Ciências Naturais e Humanas (CCNH)
Universidade Federal do ABC (UFABC)

LISTA DE EXERCÍCIOS #7

1. Dadas as matrizes:
$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
onde σ^i são as matrizes de Pauli 2×2, 1 são matrizes identidade 2×2 e 0 matrizes nulas 2×2 preenchendo o resto.
   (a) Mostre que $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$, onde $g^{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski e $\{A, B\} = AB + BA$ é o anticomutador;
   (b) Mostre que γ^0 comuta consigo mesma e anticomuta com as outras matrizes γ^i:
$$[\gamma^0, \gamma^0] = 0, \quad \{\gamma^0, \gamma^i\} = 0,\ i = 1, 2, 3$$
   (c) Mostre que γ^5 anticomuta com as outras matrizes γ^μ:
$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0,\ \mu = 0, 1, 2, 3.$$

2. Partindo das condições de normalização dos spinores de Dirac:
   (a) $u^{(1)\dagger}u^{(1)} = 2E/c$,
   (b) $v^{(2)\dagger}v^{(2)} = 2E/c$,

   mostre que a constante de normalização é: $N = \sqrt{(E + mc^2)/c}$.

3. Mostre as relações de fechamento:
   (a) para os elétrons: $\sum_{s=1,2} u^{(s)}\overline{u}^{(s)} = (\gamma^\mu p_\mu + mc)$,
   (b) para os pósitrons: $\sum_{s=1,2} v^{(s)}\overline{v}^{(s)} = (\gamma^\mu p_\mu - mc)$.

4. Seja o tensor da intensidade do campo:
$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$
e o quadrivetor densidade de corrente e carga:
$$J^\mu = (c\rho, \vec{J}).$$
   (a) Mostre que as equações inomogêneas de Maxwell podem ser escritas de uma forma mais compacta como:
$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu.$$

(b) Mostre, a partir da antissimetria de $F^{\mu\nu}$ ($F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$), a equação da continuidade:

$$\partial_\mu J^\mu = 0.$$

5. Seja o quadrivetor potencial:

$$A^\mu = (V, \vec{A}),$$

tal que:

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad , \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}.$$

(a) Mostre que as equações de Maxwell homogêneas decorrem naturalmente destas definições.
Dica: use que, em geral: $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$ e $\nabla \times (\nabla V) = 0$.

(b) Mostre que a *transformação de calibre*:

$$A'_\mu = A\mu + \partial_\mu \lambda,$$

não altera estes resultados, onde $\lambda = \lambda(ct, \vec{r})$ é uma função escalar da posição e do tempo.