# Introdução à Física de Partículas Elementares

Prof. Marcelo Augusto Leigui de Oliveira

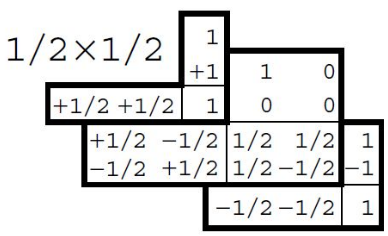
**Prova 2 (2025.1)**

Resolva as questões a seguir, escaneie a sua resolução e envie um arquivo em PDF (legível) para o e-mail: leigui@ufabc.edu.br, com o assunto "NHZ3024-P2", através de seu e-mail institucional, até as 21:00 do dia 15/04/2025.

**NOME:** **RA:**

1. Um quark e um antiquark estão ligados, num estado de momento angular zero, para formar um méson. Quais os possíveis valores de spin do méson?

   (a) Partindo da tabela de Clebsch-Gordan para o acoplamento $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, complete com os coeficientes adequados:




$$|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle = \boxed{\quad\quad}\ |11\rangle$$
$$|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\rangle = \boxed{\quad\quad}\ |10\rangle + \boxed{\quad\quad}\ |00\rangle$$
$$|\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle = \boxed{\quad\quad}\ |10\rangle - \boxed{\quad\quad}\ |00\rangle$$
$$|\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\rangle = \boxed{\quad\quad}\ |1-1\rangle$$

   (b) Invertendo-se as equações, determine os coeficientes dos estados do tripleto:

$$|11\rangle = \boxed{\quad\quad}\ |\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle$$
$$|10\rangle = \boxed{\quad\quad}\ |\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\rangle + \boxed{\quad\quad}\ |\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle$$
$$|1-1\rangle = \boxed{\quad\quad}\ |\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\rangle$$

   e do singleto:

$$|00\rangle = \boxed{\quad\quad}\ |\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\rangle - \boxed{\quad\quad}\ |\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle$$

2. Mostre, para as matrizes de Pauli, que:

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k,$$

onde $\delta_{ij}$ é o delta de Kronecker e $\epsilon_{ijk}$ é o tensor de Levi-Civita, isto é, explicitamente, mostre que:

(a) $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1$;

(b) $\sigma_x\sigma_y = -\sigma_y\sigma_x = i\sigma_z$;

(c) $\sigma_y\sigma_z = -\sigma_z\sigma_y = i\sigma_x$;

(d) $\sigma_z\sigma_x = -\sigma_x\sigma_z = i\sigma_y$;

(e) suas relações de comutação: $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$;

(f) e de anticomutação: $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$;

**NOME:** **RA:**

3. Partindo da função de onda do átomo de hidrogênio no nível fundamental:

$$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a},$$

calcule, para o estado fundamental do positrônio, a probabilidade de o encontrarmos na origem, $|\psi_{100}(0)|^2$.

4. Dado que pode-se calcular a massa dos mésons por:

$$M_{meson} = m_1 + m_2 + A\frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{m_1 m_2},$$

calcule a massa dos mésons pseudoescalares, usando que $m_u = m_d = 308$ MeV/$c^2$, $m_s = 483$ MeV/$c^2$ e o parâmetro é: $A = (2m_u/\hbar)^2 159$ MeV/c$^2$.

**NOME:** **RA:**

5. Seja o espalhamento: $A + A \to B + B$ no referencial de laboratório.

   (a) Encontre os 2 diagramas de mais baixa ordem na teoria de brinquedo ABC e mostre, assumindo que $m_C = 0$, que a amplitude de espalhamento é dada por:

   $$\mathcal{M} = \frac{g^2}{(p_4 - p_2)^2} + \frac{g^2}{(p_3 - p_2)^2};$$

   Justifique, explicitando as regras de Feynman nessa teoria.

   (b) Utilize agora o referencial de laboratório no espalhamento $1 + 2 \to 3 + 4$. Sejam $E$ a energia e $\vec{p}$ o momento da partícula incidente e assuma que $m_B = 0$, ou seja:

   $$p_1 = (E/c, \vec{p}) \ , \ p_2 = (mc, \vec{0}).$$

   Definindo os quadrimomentos das partículas produzidas como:

   $$p_3 = E_3/c \, (1, \hat{p}_3) \ , \ p_4 = E_4/c \, (1, \hat{p}_4),$$

   calcule os termos dos denominadores do item anterior;

   (c) Mostre, por conservação de energia e de momento, que todas as energias são aproximadamente as mesmas:

   $$E \approx E_3 \approx E_4 \approx mc^2$$

   no limite não relativístico ($mc^2 >> pc$).

   (d) Encontre o módulo quadrado da amplitude de espalhamento, $|\mathcal{M}|^2$, em função da massa $m$.

**Rascunho**

**Formulário:**

As matrizes de Pauli:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

O delta de Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, se } i = j; \\ 0 & \text{, se } i \neq k. \end{cases}$$

O tensor de Levi-Civita:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{, se } ijk \text{ estão em permutações pares de } 123; \\ -1 & \text{, se } ijk \text{ estão em permutações ímpares de } 123; \\ 0 & \text{, para 2 ou 3 índices iguais.} \end{cases}$$

Relações de comutação e anticomutação:

$$[A, B] = AB - BA \ \ , \ \ \{A, B\} = AB + BA$$

$$\int |\psi(r)|^2 \, dV = 4\pi \int |\psi(r)|^2 \, r^2 \, dr$$

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 \Rightarrow S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\vec{S}_1 + \vec{S}_2 \Rightarrow \vec{S}_1 + \vec{S}_2 = \frac{1}{2}(S^2 - S_1^2 - S_2^2)$$

$$S^2 | \, \psi >= \hbar^2 s(s+1) | \, \psi >$$

| partícula | quarks | carga [$e$] | $L_e$ | $L_\mu$ | A | S | massa [MeV/c$^2$] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\pi^\pm$ | $u\bar{d}$, $d\bar{u}$ | $\pm 1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 139,6 |
| $\pi^0$ | $(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 135,0 |
| $K^\pm$ | $d\bar{s}$, $s\bar{d}$ | $\pm 1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 493,7 |
| $K^0$ | $d\bar{s}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 497,7 |
| $\eta$ | $(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})/\sqrt{6}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 548,8 |

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

$$E = \gamma mc^2 \quad , \quad \vec{p} = \gamma m\vec{v}$$

$$p^\mu = (E/c, \vec{p}) \qquad \Rightarrow \qquad p_\mu p^\mu = m^2c^2 = E^2/c^2 - p^2$$

**Dados:**

Velocidade da luz no vácuo:

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Carga elementar:

$$e \approx 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Constante de Planck:

$$h \approx 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

Raio de Bohr:

$$a = \frac{\hbar^2}{me^2} \approx 5,29 \times 10^{-11} \text{ m}$$

Constante de estrutura fina:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137} \text{ (adimensional)}$$

Fatores de conversão:

$$1 \text{ eV} \equiv 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$\hbar c \approx 3,161 \cdot 10^{-26} \text{ J} \cdot \text{m} \approx 197,3 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$$

$$ke^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = \alpha\hbar c \approx 1,44 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$$