

Notas de Aula de Introdução à Física Nuclear (NHZ3026)

Prof. Dr. Marcelo Augusto Leigui de Oliveira
 Centro de Ciências Naturais e Humanas (CCNH)
 Universidade Federal do ABC (UFABC)
 Santo André - SP

AULA #3: O ESPALHAMENTO RUTHERFORD

I. O EXPERIMENTO DE RUTHERFORD, GEIGER E MARSDEN

Em 1909, Rutherford¹ e seus alunos Geiger² e Marsden³ realizaram o experimento de espalhamento de partículas α numa fina folha de ouro:



Figura 1: (a) Ernst Rutherford ; (b) Rutherford e seus alunos no laboratório; (c) o espalhamento de partículas alfa numa folha de ouro.

→ foram contados eventos com $\theta > 90^\circ$, impossíveis pelo modelo de Thomson:

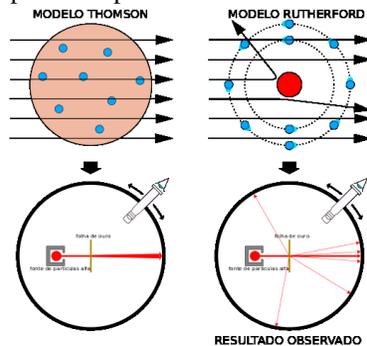


Figura 2: Resultados esperados pelo modelo de Thomson e pelo modelo de Rutherford .

¹Ernest Rutherford (1871-1937), físico neozelandês; Nobel de Química (1908).

²Johannes "Hans" Wilhelm Geiger (1882-1945), físico alemão.

³Sir Ernest Marsden (1889-1970), físico inglês.

II. O ESPALHAMENTO COULOMBIANO

Consideremos o espalhamento de acordo com a figura:

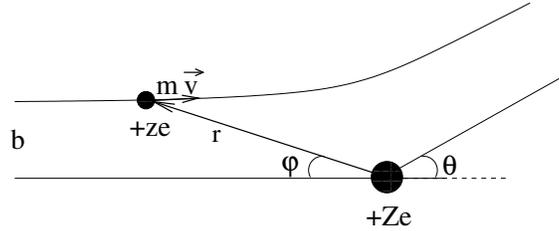


Figura 3: Espalhamento coulombiano.

A força coulombiana é central:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_\alpha Q_{nucl}}{r^2} \hat{r} = k \frac{zZe^2}{r^2} \hat{r}.$$

Portanto, o momento angular é conservado: $L = m_\alpha v b = m_\alpha v' b'$. Como estamos tratando de colisões elásticas:

$$\frac{1}{2} m_\alpha v^2 = \frac{1}{2} m_\alpha v'^2 \Rightarrow v = v',$$

que, juntamente com a conservação do momento angular, indica que o parâmetro de impacto se conserva: $b = b'$.

A distância de maior aproximação da partícula α do núcleo para uma colisão frontal ($b = 0$), r_d , se dá quando a energia cinética é toda convertida em energia potencial:

$$E_c = E_p \Rightarrow \frac{1}{2} m_\alpha v^2 = k \frac{zZe^2}{r_d} \Rightarrow r_d = \frac{zZke^2}{m_\alpha v^2/2} \quad (1)$$

Sabendo que a *constante de estrutura fina*:

$$\alpha = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{\hbar c} = \frac{ke^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$$

é uma grandeza adimensional, podemos determinar o valor das grandezas eletromagnéticas ke^2 em unidades de MeV·fm:

$$ke^2 = \alpha \hbar c = \frac{197,3}{137} \Rightarrow ke^2 = 1,44 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$$

Assim, por exemplo, no caso de uma partícula α com energia cinética de 7,7 MeV, a distância de máxima aproximação para uma colisão frontal com um núcleo de ouro é:

$$r_d = \frac{zZke^2}{m_\alpha v^2/2} = \frac{2 \cdot 79 \cdot 1,44 [\text{MeV} \cdot \text{fm}]}{7,7 [\text{MeV}]} = 29,5 \text{ fm} = 29,5 \text{ F}$$

e a distância de maior aproximação para outros parâmetros de impacto é um pouco maior.

Rutherford estimou que o raio do núcleo era da ordem de 10^{-14} m.

Exemplo 1:

Um experimento de espalhamento de elétrons de alta energia fornece o raio de núcleos de ouro de 6,6 F. Calcule a energia cinética que partículas α deveriam ter para tocar a superfície destes núcleos (suponha colisão frontal).

$$r_d = \frac{zZke^2}{m_\alpha v^2/2} = \frac{zZke^2}{E_\alpha} \Rightarrow E_\alpha = \frac{zZke^2}{r_d} = \frac{2 \cdot 79 \cdot 1,44}{6,6} = 34,5 \text{ MeV}$$

■

A trajetória da partícula α é uma hipérbole, cuja equação em coordenadas polares é:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{b} \sin \varphi + \frac{r_d}{2b^2} (\cos \varphi - 1), \quad (2)$$

que, quando a distância é muito grande ($r \rightarrow \infty$):

$$\frac{1}{r} \rightarrow 0 \text{ e os ângulos: } \varphi + \theta \rightarrow \pi \Rightarrow \begin{cases} \sin \varphi = \sin \theta \\ \cos \varphi = -\cos \theta \end{cases},$$

então, a equação da trajetória tende a:

$$\rightarrow 0 = \frac{1}{b} \sin \theta - \frac{r_d}{2b^2} (\cos \theta + 1) \Rightarrow \frac{\cos \theta + 1}{\sin \theta} = \cotg \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{2b}{r_d} \Rightarrow$$

$$\boxed{b = \frac{kzZe^2}{m_\alpha v^2} \cotg \left(\frac{\theta}{2} \right)}, \quad (3)$$

onde substituímos, na última passagem, a equação 1.

III. SEÇÃO DE CHOQUE

Seja um fluxo incidente de partículas α com F_0 partículas por unidade de área por segundo [$\text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$].

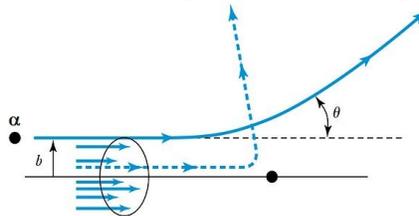


Figura 4: Área seccional associada a ângulos de espalhamento $\geq \theta$.

Multiplicando-se F_0 pela área da seção reta em torno do parâmetro de impacto b , temos o número de partículas por segundo [s^{-1}] que são espalhadas com ângulo $\geq \theta$ por núcleo do alvo: $\pi b^2 F_0$. Esta área define a *seção de choque* do espalhamento:

$$\boxed{\sigma \equiv \pi b^2}.$$

Adotamos a interpretação heurística de que a seção de choque é a **probabilidade** que as partículas do feixe incidente têm de espalharem-se com ângulo $\geq \theta$. A unidade adotada para a seção de choque, no SI, é o *barn*: $[\sigma] = 1 \text{ b} \equiv 10^{-28} \text{ m}^2$.

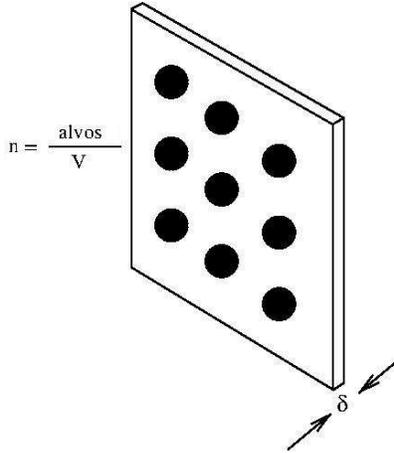


Figura 5: Chapa de área unitária e espessura δ de um material com densidade volumétrica ρ .

O número de núcleos por unidade de volume é:

$$n = \frac{\rho N_A}{M},$$

onde ρ é a densidade do material, N_A o número de Avogadro e M a massa molar.

Se δ é a espessura da placa do alvo, o número de núcleos na região do feixe é $nA\delta$ e o número total de partículas por segundo que são espalhadas com ângulo $\geq \theta$: $(\pi b^2 F_0)(nA\delta)$. Dividindo-se este número pelo fluxo F_0 e pela área A , vem:

$$f = \pi b^2 n \delta,$$

que é a fração das partículas espalhadas com ângulo $\geq \theta$.

Exemplo 2:

a) Qual parâmetro de impacto b devem ter partículas α com energia cinética de 5 MeV para serem espalhadas numa folha de ouro a 90° ou mais? Dado: ${}^{197}_{79}\text{Au}$.

$$b = \frac{kzZe^2}{m_\alpha v^2} \cotg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{zZke^2}{2E_\alpha} \cotg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2 \cdot 79 \cdot 1,44}{2 \cdot 5} \cotg 45^\circ = 22,8 \text{ fm} \Rightarrow$$

$$b = 22,8 \text{ F}$$

b) Calcule a fração de partículas α espalhadas com ângulo de espalhamento $\geq 90^\circ$ se a espessura da folha de ouro é de $1\mu\text{m}$. Dados: $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, $\rho_{Au} = 19,3 \text{ g/cm}^3$.

$$n = \frac{\rho N_A}{M} = \frac{19,3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{197} = 5,90 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3} = 5,90 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

$$f = \pi b^2 n \delta = \pi (2,28 \cdot 10^{-14})^2 \cdot 5,90 \cdot 10^{28} \cdot 10^{-6} = 9,62 \cdot 10^{-5} = \frac{1}{10.395} \approx 10^{-4}.$$

■

A. Número de partículas espalhadas a um ângulo θ qualquer

Dado um ângulo de espalhamento num intervalo infinitesimal entre θ e $\theta + d\theta$, somente as partículas que passarem dentro de anéis infinitesimais de parâmetro de impacto b , entre b e $b + db$, vão espalhar-se nesta direção. Estes anéis infinitesimais possuem área $2\pi b db$.

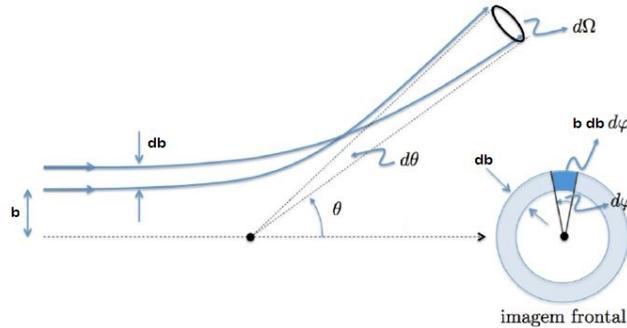


Figura 6: Espalhamento no intervalo entre b e $b + db$ por ângulos entre θ e $\theta + d\theta$.

Retomando-se a equação 3 na forma $b = \frac{r_d}{2} \cotg(\theta/2)$ e lembrando-se de que: $\frac{d}{dx} \cotg x = -\frac{1}{\sin^2 x}$, vem:

$$2\pi b db = 2\pi \left[\frac{r_d \cos(\theta/2)}{2 \sin(\theta/2)} \right] \left[\frac{-r_d}{4} \frac{d\theta}{\sin^2(\theta/2)} \right] = -\frac{\pi r_d^2}{8} \frac{\sin \theta d\theta}{\sin^4(\theta/2)},$$

onde usamos, na última passagem, que $\sin \theta = 2 \cos(\theta/2) \sin(\theta/2)$.

Agora, dentro dessas áreas há $n\delta 2\pi b db$ núcleos se o alvo for uma folha fina o suficiente, tal que, para cada partícula incidente, nenhum núcleo se superponha a outro. Nesta condição, o número de partículas espalhadas por segundo ao ângulo θ é proporcional à probabilidade dela passar dentro do anel infinitesimal de parâmetro de impacto:

$$dN = N(\theta)d\theta = -I_0 p(b)db = -I_0 n\delta 2\pi b db,$$

onde a constante de proporcionalidade é a intensidade do feixe incidente I_0 [s^{-1}]. Note o sinal de menos que indica apenas que quanto maior é b menor é θ .

Assim:

$$dN = I_0 n\delta \frac{r_d^2}{16} \frac{(2\pi \sin \theta d\theta)}{\sin^4(\theta/2)} = I_0 n\delta \frac{(zZke^2/E_\alpha)^2}{16} \frac{d\Omega}{\sin^4(\theta/2)} = (I_0 n\delta d\Omega) \left(\frac{Zke^2}{2E_\alpha} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)},$$

onde substituímos a definição de ângulo sólido ($d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$), a expressão de r_d da equação 1 e $z = 2$ da partícula α .

Finalmente, tomando-se um detector de área A_{det} posicionado a uma distância r do alvo, o ângulo sólido fica determinado por: $\Delta\Omega = A_{det}/r^2$ e o número de partículas espalhadas a um ângulo qualquer θ pode ser calculado pela expressão:

$$\Delta N = \left(\frac{I_0 A_{det} n\delta}{r^2} \right) \left(\frac{Zke^2}{2E_\alpha} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad (4)$$

A dependência angular $N \propto [\sin(\theta/2)]^{-4}$ é bem conhecida, para a seção de choque de espalhamento de Rutherford, ou coulombiana.

Exemplo 3:

Um feixe de partículas α de 6 MeV de energia cinética incide numa folha de prata com $1 \mu\text{m}$ de espessura. A corrente do feixe é de 1 nA. Quantas partículas α serão contadas por um detector de 5 mm^2 de área situado a 2 cm da folha a um ângulo de espalhamento de 75° ? Dados: ${}_{47}^{108}\text{Ag}$ e $\rho = 10,5 \text{ g/cm}^3$.

1. Intensidade do feixe:

$$I_0 = \frac{i}{ze} = \frac{10^{-9}}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 3,12 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$$

2. Densidade numérica de núcleos de prata:

$$n = \frac{\rho N_A}{M} = \frac{10,5 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{108} = 5,85 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3} = 5,85 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

3. Número de partículas espalhadas:

$$\begin{aligned} \Delta N &= \left(\frac{I_0 A_{det} n \delta}{r^2} \right) \left(\frac{Zke^2}{2E_\alpha} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} = \\ &= \left(\frac{3,12 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 5,85 \cdot 10^{28} \cdot 10^{-6}}{(0,02)^2} \right) \left(\frac{47 \cdot 1,44 \cdot 10^{-15}}{2 \cdot 6} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(75^\circ/2)} \Rightarrow \boxed{N = 528 \alpha/s} \end{aligned}$$

■

IV. O MODELO DE RUTHERFORD

Em 1911, baseando-se nos resultados do experimento de espalhamento de partículas α numa folha de ouro, Rutherford propõe o seu modelo para o átomo:

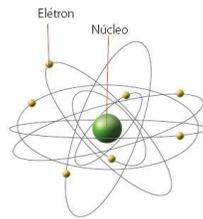


Figura 7: Modelo atômico de Rutherford.

O átomo é composto por um núcleo de carga positiva que concentra, praticamente, toda a sua massa em dimensões $\sim 10^{-14} \text{ m}$; os elétrons de carga negativa orbitam o núcleo atraídos pela força coulombiana. Rutherford imaginou o átomo com A prótons, Z elétrons e $(A-Z)$ elétrons nucleares.

Contudo, algumas questões permaneceram em aberto:

1. O que mantém o núcleo coeso (partículas positivas ligadas no núcleo)?
2. Por que os elétrons não irradiam (partículas carregadas aceleradas)?
3. Por que existem os espectros discretos?

V. EXERCÍCIOS

1. Mostre que a seção de choque tem dimensão de área.
2. Dado que um elemento de ângulo sólido infinitesimal é $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$, mostre, por integração direta, que o ângulo sólido total para todas as direções possíveis é $\Omega_T = 4\pi$ sr.
3. Mostre que, para uma partícula α de massa m e velocidade v , a repulsão coulombiana de um núcleo alvo de carga $+Ze$, em colisão frontal, leva a uma aproximação máxima dada por:

$$r_d = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{mv^2}.$$

4. Mostre, partindo da equação 2 que, para $r \rightarrow \infty$ e $\theta = \pi - \varphi$, vem:

$$\cotg \frac{\theta}{2} = \frac{2b}{r_d}.$$

5. Partindo do resultado do exercício anterior, mostre as 2 relações:

$$db = -\frac{r_d}{2} \frac{d\theta/2}{\sin^2(\theta/2)} \Rightarrow b db = -\frac{r_d^2}{16} \frac{\sin\theta d\theta}{\sin^4(\theta/2)}$$

Dica para a segunda demonstração: $\sin\theta = 2\cos(\theta/2)\sin(\theta/2)$.

6. Em um experimento de espalhamento de partículas α por uma folha de ouro, o feixe incidente de partículas α sobre uma chapa de área unitária tem densidade de corrente de 10^{-11} A/cm². Foi posicionado um detector de área 10^{-5} m² a 10 cm da folha de ouro, sob um ângulo de espalhamento de 30°. Se a folha de ouro tem densidade superficial de 10^{-1} kg/m² e a seção de choque diferencial relativa à emissão a 30° é de $1,3 \times 10^{-3}$ b/sr, calcule a taxa de eventos detectados. Dados: ^{197}Au e $u = 1,66 \times 10^{-27}$ kg/núcleo.

Dica: a seção de choque diferencial é definida por:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{F} \frac{dN}{d\Omega},$$

onde $F = I_0 n \delta$ é o fluxo incidente de partículas sobre a chapa por unidade de tempo e por unidade de área.

Resposta: 12,4 partículas/s.