

## Notas de Aula de Introdução à Física Nuclear (NHZ3026)

Prof. Dr. Marcelo Augusto Leigui de Oliveira  
 Centro de Ciências Naturais e Humanas (CCNH)  
 Universidade Federal do ABC (UFABC)  
 Santo André - SP

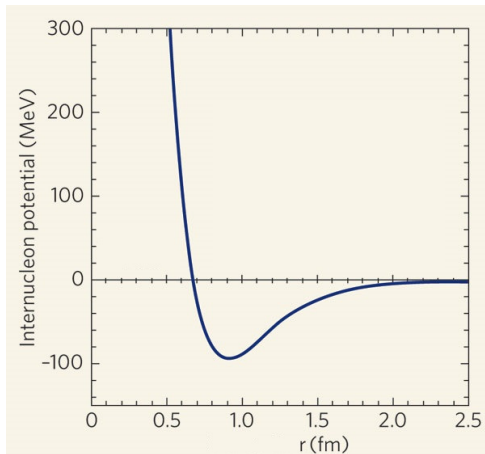
### AULA #4: Interações nucleares

Sistemas físicos com dimensões da ordem ou menores que 1 nanômetro ( $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$ ) devem ser descritos pelo formalismo da mecânica quântica, incluindo-se moléculas, átomos, núcleos atômicos e partículas elementares. O átomo de hidrogênio foi o primeiro sistema a ser descrito com este formalismo, inicialmente, com o modelo de Bohr (1913), depois com as teorias de Schrödinger (1925) e Heisenberg (1926). O átomo de hidrogênio é um *sistema de 2 corpos* (o próton e o elétron) que interagem via a força de atração coulombiana.

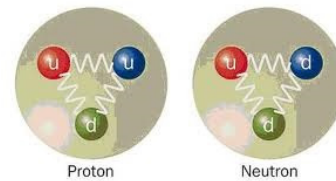
Na física nuclear, o sistema de 2 corpos mais simples é o dêuteron:

$$d = {}^2\text{H}^+,$$

que vai ser usado para obtermos mais informações a respeito da força nuclear, ou da *interação núcleon-núcleon*. O dêuteron corresponde ao estado ligado ( $p + n$ ) mais simples no núcleo; não existem evidências de estados ligados  $p + p$  ou  $n + n$ . O potencial da interação nuclear tem a forma ilustrada na figura 2(a).



(a) Potencial radial para a interação núcleon-núcleon.



(b) Representação de um dêuteron com sua estrutura de quarks.

Figura 1: Interação núcleon-núcleon.

Experimentalmente, verifica-se os seguintes aspectos das interações núcleon-núcleon:

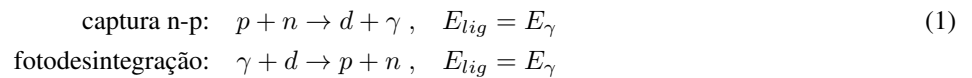
- predominantemente atrativa;
- de curto alcance ( $\lesssim 10^{-14}$  m);
- interação entre núcleons vizinhos;
- algumas partículas não a sofrem, p.ex.: elétrons, múons e neutrinos (os *léptons*);
- independente do tipo de núcleon: igual para prótons ou nêutrons;
- depende do alinhamento do spin: paralelos ou antiparalelos;
- depende de uma componente tensorial que não conserva o momento angular orbital.

Ademais, conhecemos, para o dêuteron:

a) A energia de ligação: a massa do dêuteron é menor que a soma das massas do próton e do nêutron:

$$m_d < m_p + m_n \Rightarrow E_{lig} = -\Delta mc^2,$$

onde  $-\Delta m$  é o *déficit de massa*. A energia de ligação pode ser medida através deste balanço de massas, ou através das reações:



$$E_{lig} = (2,22464 \pm 0,00005) \text{ MeV};$$

b) O momento angular e a paridade:  $J = 1$  e  $\pi = +$ ;

c) O momento de dipolo magnético:

$$\mu_d/\mu_p = 0,30701218 \pm 0,00000002$$

$$\mu_d = (0,857393 \pm 0,000001)\mu_N,$$

onde  $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p} = 3,1525 \cdot 10^{-8}$  eV/T é o *magneton nuclear*;

d) O momento de quadrupolo elétrico:  $Q = 0,00282 \text{ b}^1$ .

De acordo com Rabi (1933), o núcleo é um *esferóide prolato*, isto é, se para uma distribuição esfericamente simétrica esperamos:

$$\langle r^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle + \langle z^2 \rangle \approx 3 \langle z^2 \rangle.$$

Para o dêuteron, temos:

$$\frac{\langle z^2 \rangle}{\langle r^2 \rangle} = \frac{1,14}{3} > \frac{1}{3};$$

e) O raio do dêuteron é, de acordo com Hofstadter et al (1962):  $r_d = 2,1$  fm. Para efeito de comparação:  $r_p = 0,8$  fm.

<sup>1</sup>Def.:  $1 \text{ b} \equiv 10^{-24} \text{ cm}^2$  (barn).

## I. TEORIA QUÂNTICA PARA O NÚCLEO (SISTEMA DE DOIS NÚCLEONS)

A teoria quântica para o núcleo segue o mesmo formalismo de um problema de 2 corpos sendo reduzido a um problema de 1 corpo. Fazemos isso, introduzindo a *massa reduzida* e considerando que os núcleons movem-se em torno de um centro de massa comum:

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\psi(\vec{r}) + V(\vec{r})\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}), \quad (2)$$

onde  $M = \frac{m_p m_n}{m_p + m_n}$  é a *massa reduzida* e  $V(\vec{r})$  é o potencial que descreve a força entre o próton e o nêutron.  $V(\vec{r})$  não é completamente conhecido, mas faremos algumas suposições.

Para um potencial esfericamente simétrico:  $V(\vec{r}) = V(r)$ , a função de onda  $\psi(\vec{r})$  é separável nas partes radial e angular:

$$\psi(\vec{r}) = \frac{u(r)}{r} Y_m^l(\theta, \varphi),$$

onde os índices  $l$  e  $m$  assumem os valores:

$$l = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$$

$$m = -l, -l+1, \dots, l$$

$Y_m^l(\theta, \varphi)$  são os harmônicos esféricos e a função  $u(r)$  é a solução da equação radial (exercício 1):

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \frac{2M}{\hbar^2} \left[ E - V(r) - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2Mr^2} \right] u(r) = 0, \quad (3)$$

onde  $M = \frac{m_p m_n}{m_p + m_n}$  é a *massa reduzida*.

De onde pode-se definir um *potencial efetivo*:

$$V_{ef} = V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2Mr^2}$$

e o segundo termo é denominado *barreira de momento angular* ou *potencial centrífugo*.

Definindo-se uma função  $u(r) = r\psi(r)$ , a equação 3, no caso  $l = 0$ , se reduz a (exercício 2):

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + V(r)u(r) = Eu(r). \quad (4)$$

Para partículas ligadas ( $E = -E_0$ ) as soluções da equação 4 são (exercício 3):

$$r < R: \quad u(r) = A \sin(k_1 r) + B \cos(k_1 r), \quad \text{onde } k_1 = \sqrt{2M(V_0 - E_0)}/\hbar \quad (5)$$

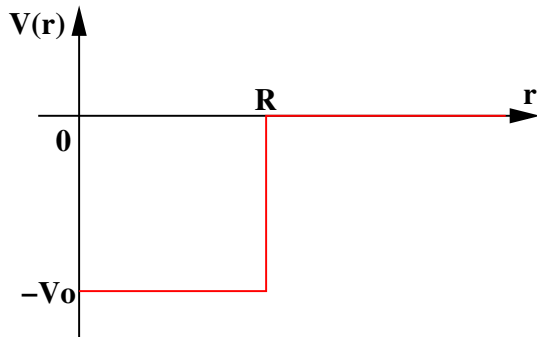
$$r > R: \quad u(r) = C e^{-k_2 r} + D e^{k_2 r}, \quad \text{onde } k_2 = \sqrt{2ME_0}/\hbar \quad (6)$$

Agora, a função  $u(r)$  deve ser finita e contínua em todo seu intervalo de validade ( $0 \leq r \leq \infty$ ), o que significa que temos que anular os coeficientes  $B$  (para  $r \rightarrow 0$ ) e  $D$  (para  $r \rightarrow \infty$ ). Ainda, a partir da continuidade na fronteira  $r = R$ , vem (exercício 4):

$$k_1 \cotg(k_1 R) = -k_2 \quad (7)$$

Note que a energia de ligação do dêuteron é muito pequena comparada à profundidade do poço de potencial (exercício 4), isso mostra o quanto fraca é a ligação do dêuteron. Caso a força nuclear fosse um pouco mais fraca, o dêuteron não seria um estado ligado.

Um potencial bem simples é o potencial degrau radial:



(a) Gráfico da função.

$$V(x) = \begin{cases} -V_0, & r < R; \\ 0, & r > R. \end{cases}$$

(b) Expressão matemática.

Figura 2: Potencial degrau radial.

Vimos que, experimentalmente, para o dêuteron:  $J = 1$  e  $\pi = +$ . Como os spins do próton e do nêutron são  $s = 1/2$ , seus spins estão somados (alinhados paralelamente), tal que:  $1/2 + 1/2 = 1$ . Os estados possíveis de momento angular  $l$  e spin  $s$  do dêuteron, resultando em  $j = 1$ , são:

$$\begin{aligned} l = 0, s = 1 &\Rightarrow {}^3S_1, \\ l = 1, s = 0 &\Rightarrow {}^1P_1, \\ l = 1, s = 1 &\Rightarrow {}^3P_1, \\ l = 2, s = 1 &\Rightarrow {}^3D_1, \end{aligned} \quad (8)$$

onde adotamos a *notação espectroscópica*:  $\boxed{{}^{2s+1}L_J}$ , com  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ .

Assim, o estado do dêuteron só pode ser uma combinação de 2 estados pares ou 2 estados ímpares:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= a_1({}^3S_1) + b_1({}^3D_1), \\ \psi_2 &= a_2({}^1P_1) + b_2({}^3P_1), \end{aligned}$$

tal que, “somados”, resultam num estado par ( $\pi = \pi_a \cdot \pi_b = +$ ).

Agora, para decidir, qual das combinações acima mais se aproximam da realidade, somente observando nos resultados experimentais as propriedades das funções que descrevem o dêuteron.

## II. TEORIA DE YUKAWA

Em 1935, H. Yukawa formula a hipótese do *méson* para as interações nucleares e estimou qual seria a sua massa. Os núcleons interagem via a troca de uma partícula intermediária: o méson  $\pi$  ou *píon*.

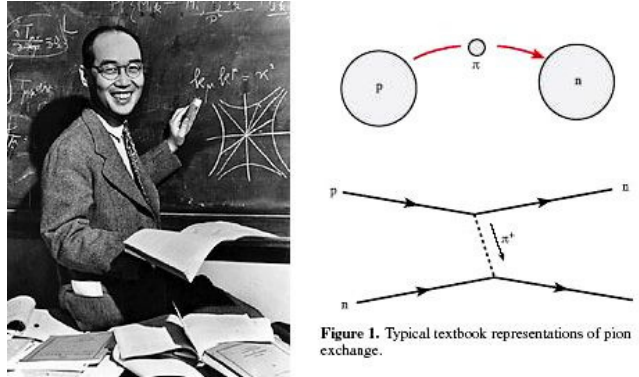


Figure 1. Typical textbook representations of pion exchange.

Figura 3: H. Yukawa e a hipótese do píon, mediador das interações nucleares.

O alcance  $R$  da interação é a mesma das dimensões nucleares ( $\sim 1,4 \text{ F}$ ) e depende da massa do quantum mediador desta interação:

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar \Rightarrow m_\pi c^2 \Delta t \geq \hbar \Rightarrow$$

$$R = c \Delta t \geq \frac{\hbar}{m_\pi c} \Rightarrow m_\pi = \frac{\hbar}{Rc} = \frac{\hbar c}{Rc^2} \approx \frac{197,3 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{1,4 \text{ fm} \cdot c^2} \approx 140 \text{ MeV}/c^2$$

O potencial da interação de Yukawa pode ser deduzido na mecânica quântica relativística. Partindo-se da fórmula da energia relativística:

$$E^2 = m_\pi^2 c^4 + p^2 c^2,$$

introduzindo-se os operadores momento linear e energia:

$$\vec{p} \leftrightarrow -i\hbar \vec{\nabla}, \quad E \leftrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

e aplicando-se a uma função de onda  $\phi$ , vem que:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = m_\pi^2 c^4 \phi - \hbar^2 c^2 \nabla^2 \phi$$

Agora, a parte estática desta equação (ou independente do tempo) é a equação de Klein-Gordon:

$$\nabla^2 \phi - \left( \frac{m_\pi c}{\hbar} \right)^2 \phi = 0, \quad (9)$$

ou  $\nabla^2 \phi - \mu^2 \phi = 0$ , onde  $\mu = m_\pi c/\hbar$ .

Cuja solução é (exercício 5):

$$\phi(r) = -G \frac{e^{-\mu r}}{r}, \quad (10)$$

onde  $G \approx 15\hbar c$  é a constante de acoplamento forte.

### III. INTERAÇÕES FUNDAMENTAIS

Existem 4 interações que acredita-se explicar todos os fenômenos físicos: a gravitacional, a eletromagnética e as nucleares forte e fraca. De acordo com a teoria, as interações entre as partículas de matéria, denominadas *férmions*, são mediadas por partículas de campo, denominadas *bósons*. Os férmions são partículas de spin semi-inteiro ( $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ ) e seguem o princípio de exclusão de Pauli, para o qual 2 partículas idênticas não podem ocupar um dado estado quântico. Já os bósons são partículas de spin inteiro (0, 1, 2, ...) que não seguem o princípio de exclusão e, portanto, podem ocupar infinitamente um estado quântico. Os bósons transmitem a informação sobre as interações para os férmions que efetivamente estão sujeitos às forças. A tabela abaixo apresenta as principais características das 4 interações fundamentais:

Interação	Gravitacional	Eletromagnética	Nuclear Forte	Nuclear Fraca
Exemplo	atração da Terra pelo Sol	atração do elétron pelo núcleo	força que mantém o núcleo coeso	decaimento beta
Alcance	$\infty$	$\infty$	$10^{-15}$ m	$10^{-18}$ m
Intensidade	$10^{-38}$	$\frac{1}{137}$	1	$10^{-5}$
Férmions	partículas massivas	partículas carregadas	matéria nuclear: hádrons (quarks)	quarks e léptons
Bósons	gráviton	fóton	mésons (glúons)	$W^+, W^-, Z^0$

Tabela 1  
Principais características das 4 interações fundamentais.

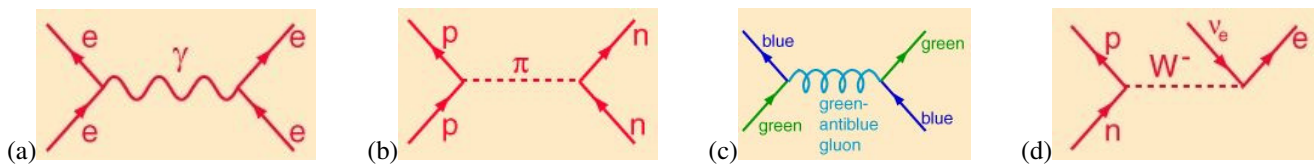


Figura 4: Exemplos de diagramas de Feynman para alguns processos envolvendo as seguintes interações:  
(a) eletromagnética; (b) nuclear forte (hádrons); (c) nuclear forte (quarks); (d) nuclear fraca.

#### IV. PARTÍCULAS ELEMENTARES

A matéria é composta por átomos ( $\sim 10^{-10}$  m) que se ligam para formar moléculas ( $\sim 10^{-9}$  m). Os átomos são formados por um núcleo ( $\sim 10^{-14}$  m) que contém praticamente toda a sua massa, circundado pelos elétrons ( $< 10^{-18}$  m) da camada eletrônica. O núcleo é composto por núcleons (prótons ou nêutrons com  $\sim 10^{-15}$  m) que, por sua vez, são compostos por quarks ( $< 10^{-19}$  m). Existem outras partículas com propriedades similares às dos elétrons, conhecidas como *léptons*, assim, podemos dizer que a matéria é composta por quarks e léptons.

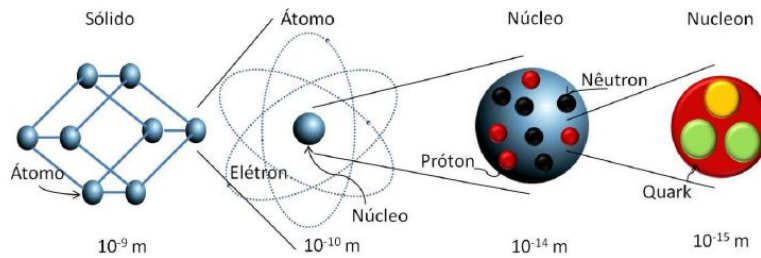


Figura 5: Estrutura da matéria.

As tabelas abaixo resumem algumas das propriedades de partículas elementares.

Quarks: os quarks são partículas de spin  $\frac{1}{2}$ , constituintes dos *hádrons*, que estão sujeitas a todas as interações, especialmente à força nuclear forte.

Quark	u	d	s	c	b	t
Carga (e)	2/3	-1/3	-1/3	2/3	-1/3	2/3
Massa (MeV)	2,3	4,8	95	1275	4180	173500

Léptons: os léptons são partículas de spin  $\frac{1}{2}$  que não estão sujeitas à força nuclear forte. Os elétrons e os neutrinos fazem parte dessa classe.

Lépton	e	$\nu_e$	$\mu$	$\nu_\mu$	$\tau$	$\nu_\tau$
Carga (e)	-1	0	-1	0	-1	0
Massa	0,511 MeV	$< 2$ eV	105,7 MeV	$< 190$ keV	1776,8 MeV	$< 18,2$ MeV

Bósons: os bósons são partículas de spin 1 e são os medidores das interações.

Bóson	$\gamma$	glúon	$W^\pm$	$Z^0$
Carga (e)	0	0	$\pm 1$	0
Massa (GeV)	0	0	80,4	91,2
Interação	Eletromagnética	Forte	Fraca	Fraca

As tabelas abaixo resumem algumas das propriedades de partículas compostas.

**Hádrons:** os *hádrons* se dividem em *bárions* e *mésons*, formados, respectivamente, por 3 quarks e por 2 quarks. Pela teoria, as combinações entre os quarks ocorrem de forma a anular o número quântico cor, o que resulta, para os bárions em quarks com 3 cores diferentes e para os mésons em 1 quark e 1 antiquark. As interações hadrônicas são consequência da interação forte e as responsáveis pela formação dos prótons, dos nêutrons e dos núcleos atômicos.

Bárion	p	n	$\Lambda$	$\Sigma^-$	$\Lambda_c^+$	$\Delta^-$	$\Omega^-$
Composição	$uud$	$udd$	$uds$	$dds$	$udc$	$ddd$	$sss$
Carga (e)	+1	0	0	-1	+1	-1	-1
Massa (MeV)	938,3	939,7	1115,6	1197,3	2281	1232	1672
Spin	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	3/2	3/2

Méson	$\pi^\pm$	$\pi^0$	$K^\pm$	$K^0, \bar{K}^0$	$\phi$	$J/\psi$
Composição	$u\bar{d}, d\bar{u}$	$(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$	$u\bar{s}, s\bar{u}$	$d\bar{s}, s\bar{d}$	$s\bar{s}$	$c\bar{c}$
Carga (e)	$\pm 1$	0	$\pm 1$	0	0	0
Massa (MeV)	139,6	134,6	493,7	497,7	1020	3097
Spin	0	0	0	0	1	1

## V. EXERCÍCIOS

1. Partindo da equação de Schrödinger, em coordenadas esféricas, para um potencial radial  $V(r)$ :

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right) \right\} + V(r)\psi = E\psi,$$

mostre, por separação de variáveis:  $\psi(r, \theta, \varphi) = \psi(r)f(\theta)g(\varphi)$ , a validade da parte radial da equação diferencial (equação 3). Dica: tome a constante de separação igual a  $l(l+1)$ .

2. Seja  $\psi(r) = u(r)/r$ , calcule a primeira e segunda derivadas:  $\frac{d\psi}{dr}$  e  $\frac{d^2\psi}{dr^2}$ . Substitua-nas na equação 3 para as ondas de mais baixa energia (ondas  $s$ , com  $l = 0$ ) e demonstre a equação 4.
3. Verifique que as funções 5 e 6 são soluções da equação 4 na condição  $E < 0$ .
4. (a) Mostre a validade da equação 7, através das condições de continuidade para  $u$  e  $\frac{du}{dr}$  na fronteira  $r = R$ ;  
(b) Encontre, por solução numérica iterativa com  $E_0 = 2,225$  MeV e  $R = 2,1$  fm, a raiz de  $V_0$  na equação 7.
5. Mostre que a solução 10 satisfaz à equação de Klein-Gordon 9.
6. Verifique se as reações abaixo podem ocorrer, de acordo com o conteúdo quarkônico das partículas envolvidas:

$$p + K^+ \rightarrow K^0 + K^+ + \Omega^-$$

$$n + \pi^- \rightarrow \pi^0 + \Delta^-$$