

## Notas de Aula de Introdução à Física Nuclear (NHZ3026)

Prof. Dr. Marcelo Augusto Leigui de Oliveira  
 Centro de Ciências Naturais e Humanas (CCNH)  
 Universidade Federal do ABC (UFABC)  
 Santo André - SP

### AULA #5: Momentos nucleares

#### I. MOMENTO ANGULAR TOTAL DO NÚCLEO

O núcleo é um estado quântico composto de  $A$  núcleons com spins semi-inteiro, pois cada núcleon é um férmion. Uma vez que o momento angular orbital contribui somente com valores inteiros de  $\hbar$ , o momento angular total do núcleo é, então:

$$J = \begin{cases} n\hbar, & \text{se } A \text{ é par;} \\ (n + \frac{1}{2})\hbar, & \text{se } A \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Além disso, resultados experimentais (perturbação magnética nuclear na estrutura hiperfina de espectros atômicos) levam a condições adicionais, respectivamente, para  $Z$  e  $N$ :

$$J = \begin{cases} n\hbar, & \text{para núcleos ímpar-ímpar;} \\ (n + \frac{1}{2})\hbar, & \text{para núcleos ímpares (par-ímpar ou ímpar-par);} \\ 0, & \text{para núcleos par-par;} \end{cases}$$

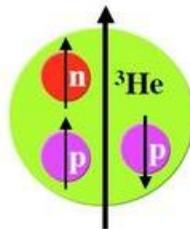


Figura 1: Estado final de spin do trítio.

Em geral, tem-se um potencial central,  $V = V(r)$ , portanto, o momento angular é conservado:  $\vec{L} = const.$  (exercício 1).

Definindo-se o operador  $L^2$  em coordenadas esféricas, pode-se separar a parte angular da equação diferencial em:

$$L^2|\psi\rangle = l(l+1)\hbar^2|\psi\rangle,$$

onde  $l = 0, 1, 2, \dots$  é um número inteiro. Esta é uma equação de autovalores,  $l(l+1)\hbar^2$ , e autovetores,  $|\psi\rangle$ , cujas soluções são os harmônicos esféricos. Desta forma, a condição de quantização para o momento angular é:

$$L = |\vec{L}| = \sqrt{l(l+1)}\hbar, \text{ onde } l = 0, 1, 2, \dots$$

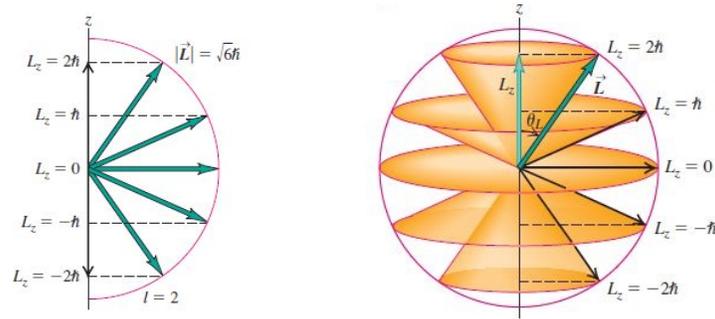


Figura 2: O modelo vetorial para a quantização do momento angular ( $l = 2$ ).

Por outro lado, as projeções de  $\vec{L}$  no eixo  $z$  satisfazem à equação de autovalores e autovetores:

$$L_z|\psi\rangle = m_l\hbar|\psi\rangle,$$

onde  $m_l$  são números inteiros no intervalo  $-l \leq m_l \leq +l$ . Formam-se, assim,  $(2l + 1)$  estados possíveis para cada valor de  $l$ .

Ademais, como os núcleons são férmions (de spin  $1/2$ ), para cada um:

$$S^2|\psi\rangle = s(s + 1)\hbar^2|\psi\rangle,$$

onde  $s$  é um número semi-inteiro. E as projeções de  $\vec{S}$  no eixo  $z$  satisfazem:

$$S_z|\psi\rangle = m_s\hbar|\psi\rangle,$$

onde  $m_s = \pm 1/2$ , formando 2 estados possíveis.

O momento angular total é a soma vetorial do momento angular orbital com o spin:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S};$$

$$J_z = L_z + S_z.$$

Assim, para cada núcleon:

$$\begin{cases} J^2|\psi\rangle = j(j + 1)\hbar^2|\psi\rangle & , \text{ onde } j \text{ é um número semi-inteiro;} \\ J_z|\psi\rangle = m_j\hbar|\psi\rangle & , \text{ onde } m_j = m_l + m_s = m_l \pm 1/2 \text{ é um semi-inteiro no intervalo: } |l - 1/2| \leq m_j \leq l + 1/2. \end{cases}$$

Em notação espectroscópica nuclear:

$$l_j = \begin{cases} S_{1/2} : l = 0 \Rightarrow j = 0 + 1/2 = 1/2 \\ P_{1/2} : l = 1 \Rightarrow j = 1 - 1/2 = 1/2 \\ P_{3/2} : l = 1 \Rightarrow j = 1 + 1/2 = 3/2 \\ D_{3/2} : l = 2 \Rightarrow j = 2 - 1/2 = 3/2 \\ D_{5/2} : l = 2 \Rightarrow j = 2 + 1/2 = 5/2 \\ \vdots \end{cases}$$

Rigorosamente, temos que somar as contribuições dos estados de cada núcleon:

$$\vec{J}_{nucl} = \sum_{i=1}^A \vec{J}_i = \sum_{i=1}^A (\vec{L}_i + \vec{S}_i).$$

Para estados em que há um caroço de estados preenchidos (com spins acoplados) e núcleons de valência:

$$\begin{cases} \vec{J} = \vec{j}^v & , \text{onde } A \text{ é ímpar e } \vec{J} \text{ é semi-inteiro;} \\ \vec{J} = \vec{j}_1^v + \vec{j}_2^v & , \text{onde } A \text{ é par e } \vec{J} \text{ é inteiro;} \\ \vdots & \end{cases}$$

onde  $\vec{j}_i^v$  é(são) o(s) momento(s) angular(es) do(s) núcleon(s) de valência.

As três coordenadas dos vetores  $\vec{J}$ ,  $\vec{L}$  e  $\vec{S}$  seguem a álgebra de comutação SU(2):

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} i\hbar L_k,$$

$$[S_i, S_j] = \epsilon_{ijk} i\hbar S_k,$$

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk} i\hbar J_k,$$

onde  $\epsilon_{ijk}$  é o tensor de Levi e Civita.

## II. ISOSPIN

Verifica-se, experimentalmente, que a massa do próton é muito próxima da massa do nêutron ( $m_p \approx m_n$ ) e há vários casos que podem ser encontrados ( $m_{\pi^0} \approx m_{\pi^\pm}$ ), analogamente. Em 1932, Heisenberg sugeriu que os núcleons são 2 estados de uma mesma partícula de **isospin**  $t = 1/2$ , gerando  $(2t + 1) = 2$  estados de carga possíveis: os prótons ou os nêutrons.

De tal forma que temos para  $\vec{T}$ :

$$T^2|\psi\rangle = t(t+1)\hbar^2|\psi\rangle,$$

onde  $t$  é um número semi-inteiro para o caso dos núcleons (prótons e nêutrons).

As projeções de  $\vec{T}$  no eixo z satisfazem:

$$T_z|\psi\rangle = m_t\hbar|\psi\rangle,$$

onde  $m_t = \pm 1/2$ , formando 2 estados de carga possíveis:

$$\begin{cases} p (\uparrow) & : m_t = +1/2; \\ n (\downarrow) & : m_t = -1/2. \end{cases}$$

Analogamente, podemos estender o conceito para outros conjuntos de partículas com massas muito próximas:

$$\begin{cases} \pi^+ (\uparrow) & : m_t = +1; \\ \pi^0 (\rightarrow) & : m_t = 0; \\ \pi^- (\downarrow) & : m_t = -1. \end{cases}$$

Ademais, temos a mesma álgebra SU(2) para as componentes de  $\vec{T}$ :

$$[T_i, T_j] = \epsilon_{ijk} i\hbar T_k.$$

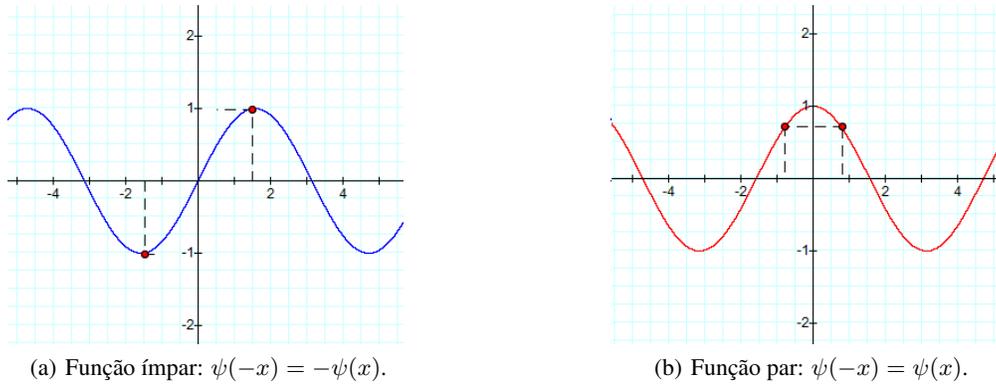


Figura 3: Paridade das funções de onda.

### III. PARIDADE

Seja um estado quântico descrito pela função de onda  $\psi(\vec{r})$ , definimos a **paridade** da função de onda conforme suas propriedades sob uma inversão de coordenadas:

$$\begin{cases} \psi(-\vec{r}) = \psi(\vec{r}), & \text{para uma função de onda } \mathbf{par} \Rightarrow \Pi = +1; \\ \psi(-\vec{r}) = -\psi(\vec{r}), & \text{para uma função de onda } \mathbf{ímpar} \Rightarrow \Pi = -1; \end{cases}$$

Podemos, então, definir o **operador paridade**, tal que:

$$\hat{\Pi}\psi(\vec{r}) = \psi(-\vec{r}) = \pm\psi(\vec{r}),$$

com autovalor +1 para o estado  $\psi(\vec{r})$  par ou -1 para o estado  $\psi(\vec{r})$  ímpar.

As funções de onda de um potencial esfericamente simétrico,  $\psi_{nlm}(\vec{r}) = R_n(r)Y_m^l(\theta, \varphi)$ , são, sob a ação de um operador de paridade:

$$\hat{\Pi}\psi_{nlm}(\vec{r}) = \psi_{nlm}(-\vec{r}) = R_n(r)Y_m^l(\pi - \theta, \varphi + \pi) = R_n(r)(-1)^l Y_m^l(\theta, \varphi) = (-1)^l \psi_{nlm}(\vec{r}),$$

ou seja, a paridade das funções dependem do momento angular orbital:  $\Pi = (-1)^l$ .

No caso de 2 partículas que não interagem, descritas pela função de onda  $\psi(\vec{r}_1) \cdot \psi(\vec{r}_2)$ , a paridade do sistema é do produto das paridades:

$$\Pi = \Pi_1 \cdot \Pi_2,$$

ou seja, a paridade é um número quântico multiplicativo.

As partículas apresentam, também, uma **paridade intrínseca**, que deve ser multiplicada à paridade orbital, isto é:

$$\begin{cases} \Pi = (-1)^l, & \text{para partículas com paridade intrínseca positiva;} \\ \Pi = (-1)^{l+1}, & \text{para partículas com paridade intrínseca negativa.} \end{cases}$$

Verifica-se, experimentalmente, que, para os núcleons:  $\Pi_p = \Pi_n = +1$ , e, para os píons:  $\Pi_\pi = -1$ .

Denotaremos:  $J^\Pi$ , por exemplo:  $0^+, 1^-, 1^+, 1/2^+, 3/2^-, \dots$

#### IV. MOMENTOS ELETROMAGNÉTICOS NUCLEARES

O potencial elétrico pode ser expandido numa série de momentos eletromagnéticos:

$$\phi(r) = \frac{q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{ij} Q_{ij} \frac{r_i r_j}{r^5} + \dots,$$

onde  $q$  é o momento de monopolo,  $\vec{p}$  é o momento de dipolo e  $Q_{ij}$  é o tensor momento de quadrupolo.

Como  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ , vem:

$$\vec{E} \propto 1/r^2 \text{ (monopolo)}$$

$$\vec{E} \propto 1/r^3 \text{ (dipolo)}$$

$$\vec{E} \propto 1/r^4 \text{ (quadrupolo)}$$

Os momentos de multipolo magnéticos comportam-se similarmente, com a exceção de que o momento de monopolo magnético não existe — ou é extremamente raro —, o que torna possível a definição do potencial vetor  $\vec{A}$ , tal que o campo magnético é dado por:  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ . O termo mais importante do potencial vetor é o dipolo magnético:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\vec{\mu} \times \vec{r}}{r^3} + \dots,$$

onde  $\vec{\mu}$  é o momento de dipolo magnético.

##### A. Valores esperados

O valor esperado para um momento de multipolo  $\hat{O}$  é:

$$\langle \hat{O} \rangle = \int \psi^* \hat{O} \psi d^3r,$$

onde a integral dá zero se o operador for ímpar.

Agora, sabe-se que a paridade dos momentos de multipolo dependem da sua ordem  $L$ , de acordo com:

$$\begin{aligned} \Pi &= (-1)^L, & \text{para os momentos elétricos;} \\ \Pi &= (-1)^{L+1}, & \text{para os momentos magnéticos,} \end{aligned}$$

onde  $L = 0$  (monopolo), 1 (dipolo), 2 (quadrupolo), ...

Assim  $\langle \hat{O} \rangle = 0$  para o monopolo magnético, dipolo elétrico, quadrupolo magnético, octupolo elétrico, hexadecupolo magnético, etc. Os momentos de ordem mais baixa que dão maiores informações sobre a estrutura nuclear são:

$$\begin{aligned} \text{monopolo elétrico:} & \quad q = \int \rho(\vec{r}') d^3r', \\ \text{dipolo magnético:} & \quad \vec{\mu} = \frac{1}{2} \int (\vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}')) d^3r', \\ \text{quadrupolo elétrico:} & \quad Q_{ij} = \int (3r'_i r'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\vec{r}') d^3r', \end{aligned} \tag{1}$$

onde  $\rho(\vec{r})$  é a densidade de carga e  $\vec{J}(\vec{r})$  a densidade de corrente.

## B. Magnéton nuclear

Seja uma espira circular de raio  $r$ , com 1 carga elementar  $e$ , circulando com corrente  $i$ . O dipolo magnético é definido pelo produto corrente x área:



$$\mu = i\pi r^2 = \frac{e}{T}\pi r^2 = \frac{e}{2\pi r/v}\pi r^2 = \frac{e}{2}(vr) = \frac{e}{2}\left(\frac{l}{m}\right),$$

onde usamos que o momento angular, neste caso, é:  $l = mvr$ . Substituindo o momento angular clássico pelo observável quântico ( $l \rightarrow L_z$ ) e tomando sua máxima projeção<sup>1</sup>, vem que:

$$\mu = \frac{e}{2m}(l\hbar) = \left(\frac{e\hbar}{2m}\right)l \equiv \mu l,$$

onde, para o caso atômico ( $m = m_e$ ):  $\mu = \mu_B$  é o *magnéton de Bohr*; e para o caso nuclear ( $m = m_p$ ):  $\mu = \mu_N$  é o *magnéton nuclear*:

$$\mu_B = 5,7884 \cdot 10^{-5} \text{ eV/T},$$

$$\mu_N = 3,1525 \cdot 10^{-8} \text{ eV/T},$$

onde usamos que a energia potencial de um dipolo magnético  $\vec{\mu}$  sob a ação de um campo magnético  $\vec{B}$  é  $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$  e, por isso, em física nuclear, a unidade adotada para o dipolo magnético é eV/T. Como  $\mu_N \ll \mu_B$ , verificamos que os efeitos magnéticos atômicos são muito mais importantes que os nucleares.

## C. O fator-g de Landé

Reescrevendo:  $\mu = g_l \mu_N l$ , onde  $g_l$  é o **fator-g** de Landé, teremos, no caso orbital:

$$\begin{cases} \text{prótons:} & g_l = 1 \\ \text{nêutrons:} & g_l = 0 \end{cases}$$

E, reescrevendo, para o spin:  $\mu = g_s \mu_N s$ , esperaríamos (para  $s = 1/2$ ):

$$\begin{cases} \text{prótons ou elétrons:} & g_s = 2 \\ \text{nêutrons:} & g_s = 0 \end{cases}$$

mas,

$$\begin{cases} \text{elétrons:} & g_s = 2,0023 & \leftarrow \text{ok (eletrodinâmica quântica)} \\ \text{prótons:} & g_s = 5,5857 & \sim 2 + 3,6 \\ \text{nêutrons:} & g_s = -3,8261 & \sim 0 - 3,8 \end{cases}$$

os desvios são por valores parecidos e verifica-se que o nêutron (sem carga elétrica) tem  $g_s \neq 0$ , que é um indício de sua estrutura interna: as correntes internas dos constituintes (quarks) geram o spin.

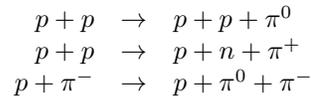
▷ Medida do fator-g do múon.

<sup>1</sup>Os autovalores de  $L_z$  são  $m_l \hbar$ , onde  $-l \leq m_l \leq l$ . Assim o maior valor possível é  $L_z = l \hbar$ .

## V. EXERCÍCIOS

1. Mostre que para um potencial esfericamente simétrico,  $V = V(r)$ , o momento angular é conservado.  
Dicas: tome  $\vec{F} = -\nabla V(r)$  em coordenadas esféricas e  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ .

2. Observe as seguintes reações:



Note que o número de núcleons (bárions) mantém-se constante, antes e depois das reações, o que sugere a introdução do **número bariônico**,  $B$ , tal que:

$$B_p = B_n = 1, B_\pi = 0, B_{e,\nu} = 0, \dots$$

$$B_{\text{bárions}} = 1, B_{\text{mésons}} = B_{\text{léptons}} = 0.$$

Mostre que, nessas reações, a carga é conservada:

$$q = m_t + B/2,$$

onde  $m_t$  é o autovalor de isospin de cada partícula.

3. Determine a paridade dos estados  $S_{1/2}$ ,  $P_{1/2}$ ,  $P_{3/2}$  e  $D_{5/2}$ , sabendo que  $\Pi = (-1)^l$ . Expresse sua resposta utilizando-se da notação  $J^{\Pi}$ .
4. Sabendo que o elétron, o próton e o nêutron têm spin  $1/2$  e que o spin do deutério é  $1$ , mostre porque não pode haver (A-Z) elétrons nucleares.

## VI. REFERÊNCIAS

- [1] R. Eisberg & R. Resnick, *Física Quântica*, Elsevier (1979).  
[2] Introdução à Física Nuclear, H. Schechter, Ed. UFRJ (2007).