

## Notas de Aula de Introdução à Física Nuclear (NHZ3026)

Prof. Dr. Marcelo Augusto Leigui de Oliveira  
 Centro de Ciências Naturais e Humanas (CCNH)  
 Universidade Federal do ABC (UFABC)  
 Santo André - SP

### AULA #6: Distribuição de carga, raio nuclear e fator de forma

A lista de parâmetros para caracterizar um nuclídeo de  $A = 50$  é da ordem de todas as combinações possíveis entre seus constituintes:

$${}^{50}X \Rightarrow 50! \approx 10^{64}$$

Além disso, podemos classificar as propriedades como:

1. Estáticas: carga elétrica, raio, massa, energia de ligação, momento angular, paridade, dipolo magnético, quadrupolo elétrico, energia dos estados excitados, ...
2. Dinâmicas: probabilidades de decaimento, seções de choque de interações e de reações.

#### I. DENSIDADE DE CARGA NUCLEAR

Experimentalmente, verifica-se a densidade de carga de núcleos através do espalhamento de elétrons de alta energia, raios X ou raios gama. O acelerador linear de Stanford (SLAC) provê elétrons com momentos entre  $100 \text{ MeV}/c < p_e < 1 \text{ GeV}/c$ , ou seja, 10 vezes maiores que o exigido para investigar nas dimensões nucleares ( $\lambda \lesssim 10 \text{ fm}$ ):

$$\Delta p \Delta x \gtrsim \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \Delta p \cdot \lambda \gtrsim \frac{\hbar c}{2c} \Rightarrow \Delta p \gtrsim \frac{197,3 \text{ [MeV} \cdot \text{fm]}}{2 \cdot 10 \text{ [fm]} \cdot c} \approx 9,87 \text{ MeV}/c.$$

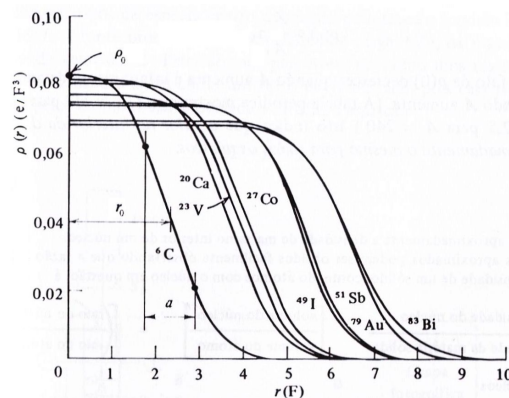


Figura 1: Distribuição de densidade de carga no interior do núcleo [1].

### A. Raio nuclear

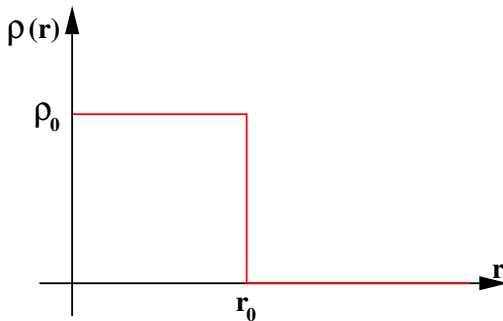
Note (vide figura 1) que a densidade de carga se mantém aproximadamente constante no interior do núcleo. Resultados similares são obtidos com espalhamentos de nêutrons, portanto, podemos estender este resultado para todos os núcleons, isto é, a densidade interna de constituintes é aproximadamente constante.

Então:

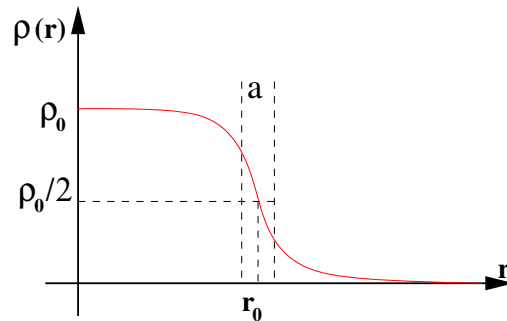
$$\rho = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi r^3} \sim \text{const.} \Rightarrow r \propto A^{1/3} \Rightarrow \boxed{r = r_0 A^{1/3}}, \quad (1)$$

onde  $r_0 \approx 1,16$  fm, conhecida como *constante do raio* (este valor pode ser entendido como o raio médio ocupado por cada núcleon dentro de um núcleo esférico).

Vamos propor 2 modelos para a distribuição de carga nuclear:



(a) Modelo I: raio nuclear precisamente definido.



(b) Modelo II: forma de Saxon-Woods.

Modelo I:

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & , \text{para } r < r_0 \\ 0 & , \text{para } r > r_0 \end{cases}$$

Modelo II:

$$\text{distribuição de Fermi: } \rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left(\frac{r-r_0}{a}\right)}, \quad (2)$$

onde define-se:

- o *raio médio* ( $r_0$ ), como o raio em que a densidade de carga cai à metade:  $\rho(r_0) = \rho_0/2$ ;
- a *espessura de pele* ( $a$ ), como o intervalo em que a densidade de carga cai de  $0,62\rho_0$  a  $0,38\rho_0$ .

### B. Seção de choque de espalhamento elástico

A *seção de choque infinitesimal* é definida por:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{F} \frac{dN}{d\Omega}}$$

onde  $F$  é o fluxo incidente de partículas por unidade de tempo e por unidade de área.

Obtivemos, na aula passada, a fórmula clássica para o espalhamento Rutherford:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{F} \frac{dN}{d\Omega} = \left( \frac{Zke^2}{2E_\alpha} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}.$$

Um cálculo mais detalhado nos leva à fórmula relativística do espalhamento Mott:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{Zke^2}{2E_\alpha} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \theta/2} \left[ 1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta/2 \right].$$

Note que, em ambos os casos, a seção de choque diferencial é proporcional ao módulo quadrado de uma função do ângulo de espalhamento:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = Z^2 e^2 |f(\theta)|^2}, \quad (3)$$

que é a expressão válida para alvos pontuais.

### C. Amplitude de espalhamento

Para núcleos finitos (alvos com dimensão não nula), temos, para cada elemento de carga infinitesimal  $dq = d(Ze)$  do alvo, que a amplitude do espalhamento depende do elemento de carga, de uma função do ângulo de espalhamento  $\theta$  e de uma fase óptica, que é devida à diferença de caminho percorrido pela frente da onda através do núcleo com dimensão finita, isto é:

$$A(\theta) \propto dq \cdot f(\theta) \cdot e^{-i\delta},$$

onde  $\delta$  é a fase óptica.

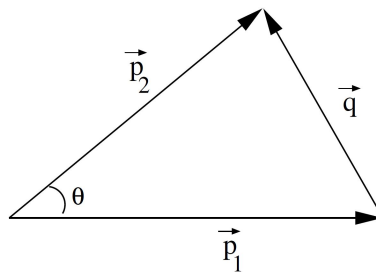


Figura 2: Momentos lineares da partícula incidente no espalhamento: inicial ( $\vec{p}_1$ ), final ( $\vec{p}_2$ ) e transferido ( $\vec{q}$ ).

Agora, consideremos um espalhamento em que partícula incide com momento linear  $\vec{p}_1$  e é espalhada com momento linear  $\vec{p}_2$  e seja  $\vec{q}$  o momento linear transferido na colisão:

$$\vec{q} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \hbar(\vec{k}_2 - \vec{k}_1).$$

O momento transferido ao núcleo é:

$$\vec{q}' = -\vec{q} = \hbar(\vec{k}_1 - \vec{k}_2).$$

Calculando a probabilidade de transição:

$$F(\vec{k}_2, \vec{k}_1) = \int \psi_2^* V(r) \psi_1 dV = \int e^{-i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}} \left\{ -Zke^2 \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \right\} e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} dV =$$

$$= \int \rho(\vec{r}') \cdot f(\theta) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}'/\hbar} dV = \int \rho(\vec{r}') \cdot f(\theta) e^{i\vec{q}' \cdot \vec{r}'/\hbar} dV.$$

Seja  $p = |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$  (espalhamento elástico):

$$q^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos \theta = 2p^2(1 - \cos \theta) = 2p^2[1 - \cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2)] = 4p^2 \sin^2(\theta/2) \Rightarrow$$

$$q = 2p \sin(\theta/2). \quad (4)$$

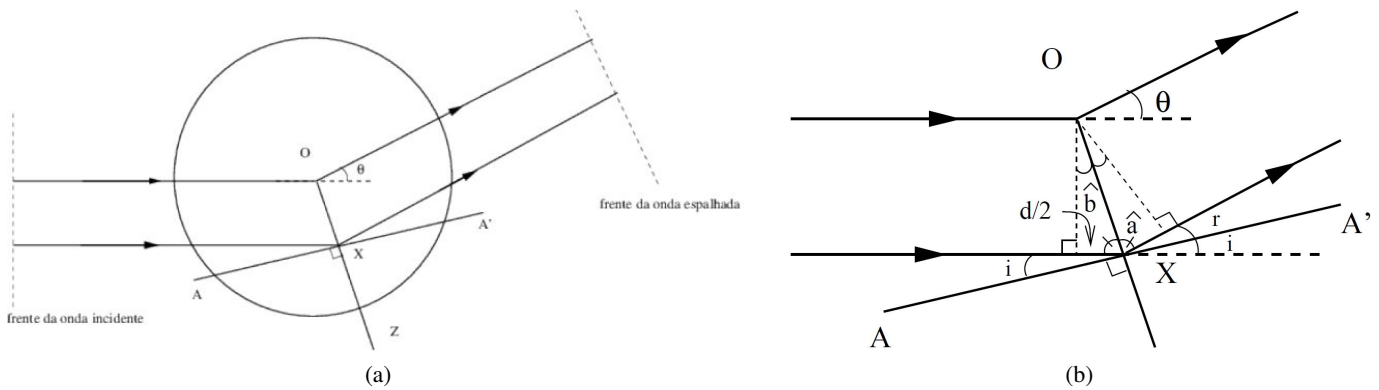


Figura 3: Difração de Fraunhofer.

Calculando  $\delta$  (difração de Fraunhofer):

$$\theta = i + r = 2i \Rightarrow i = \theta/2;$$

$$2\hat{b} = \theta \Rightarrow \hat{b} = \theta/2;$$

$$\hat{a} = 90^\circ - \theta/2.$$

Seja  $d$  a diferença de caminho óptico:

$$\sin \hat{b} = \sin(\theta/2) = \frac{d/2}{\overline{OX}} \Rightarrow d = 2 \overline{OX} \sin(\theta/2)$$

Usando que  $\delta = kd$  e que  $p = \hbar k$ , vem que a diferença de fase é:

$$\delta = kd = \frac{p}{\hbar} d = \frac{2p \sin(\theta/2)}{\hbar} \overline{OX} = \frac{q}{\hbar} \overline{OX},$$

onde, na última passagem, substituímos a expressão para o momento transferido  $q$  da equação 4.

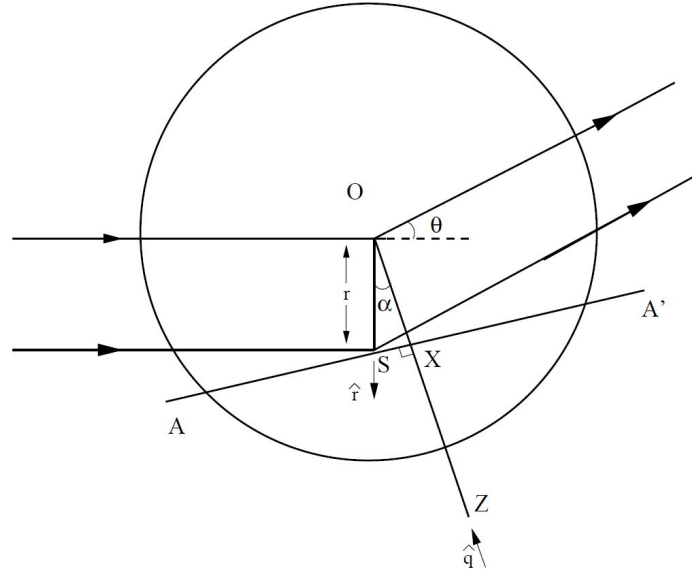


Figura 4: Definição do vetor radial ( $\hat{r}$ ) e do vetor na direção do momento transferido ( $\hat{q}$ ), tais que:  $\hat{q} \cdot \hat{r} = -\cos \alpha$ .

Agora, a condição  $i = \theta/2$  vale sobre todo o plano  $AA'$ . Vamos tomar um ponto  $S$  sobre este plano (diferente de  $X$ ) e definir a distância radial como:  $r = OS$  (conforme a figura 4).  $\overline{OX}$  e o seu prolongamento  $\overline{OZ}$  são paralelos ao vetor  $\hat{q}$ , tal que:

$$\hat{q} \cdot \hat{r} = -\cos \alpha.$$

A carga  $\rho(r)dV$  é integrada sobre todo o núcleo, onde o diferencial de volume é:  $dV = r^2 dr \sin \alpha d\alpha d\beta$ , onde  $\beta$  é o ângulo azimutal, saindo do plano da figura e  $\alpha$  o ângulo zenital (obs.: não confundir com o  $\theta$ ).

Voltando agora à amplitude infinitesimal do espalhamento:

$$A(r, \theta) = \rho(r)dV \cdot f(\theta) \cdot e^{-i\delta} = \rho(r) r^2 dr \sin \alpha d\alpha d\beta \cdot f(\theta) \cdot e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}/\hbar},$$

onde usamos que:  $\delta = (q/\hbar)\overline{OX} = (q/\hbar) r \cos \alpha = -\vec{q} \cdot \vec{r}/\hbar$ .

A amplitude total do espalhamento é calculada integrando-se sobre todo o núcleo:

$$A(\theta) = f(\theta) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr \sin \alpha d\alpha d\beta e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}/\hbar} = 2\pi f(\theta) \int_0^\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr \sin \alpha d\alpha e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}/\hbar}.$$

Como a carga total é:  $Ze = 2\pi \int_0^\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr \sin \alpha d\alpha$ , podemos escrever:

$$A(\theta) = Ze f(\theta) \frac{\int_0^\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr \sin \alpha d\alpha e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}/\hbar}}{\int_0^\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr \sin \alpha d\alpha} \equiv Ze f(\theta) F(q^2),$$

onde  $F(q^2)$  é a *amplitude do fator de forma* do núcleo, que altera o cálculo da seção de choque para:

$$\boxed{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{finito} = |F(q^2)|^2 \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{puntual}}. \quad (5)$$

## II. FATOR DE FORMA

O fator de forma determina o efeito da forma do núcleo no cálculo da seção de choque e, matematicamente, corresponde à transformada de Fourier da distribuição de carga do núcleo. De uma forma mais compacta, podemos escrever:

$$F(q^2) = \frac{\int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} dV}{\int \rho(\vec{r}) dV} = \frac{1}{Ze} \int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} dV. \quad (6)$$

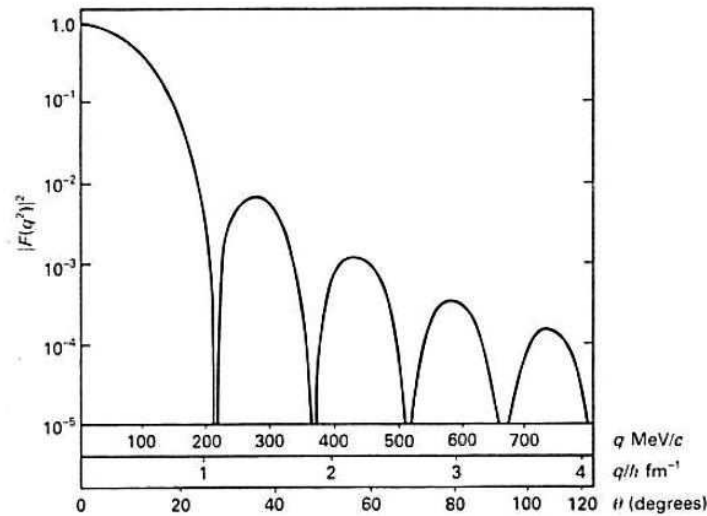


Figura 5: Intensidade do fator de forma de uma distribuição esférica de carga.

### Exemplo 1:

Mostrar que para núcleos esféricamente simétricos o fator de forma é:

$$F(q^2) = \frac{4\pi\hbar}{Ze q} \int_0^\infty \rho(r) \sin(qr/\hbar) r dr.$$

Partindo de:

$$F(q^2) = \frac{1}{Ze} \int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} dV = \frac{1}{Ze} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^\infty \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} r^2 dr d(\cos\alpha) d\beta = \frac{2\pi}{Ze} \int_{-1}^1 \int_0^\infty \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} r^2 dr d(\cos\alpha)$$

e fazendo a integral em  $\alpha$ :

$$\int_{-1}^1 e^{i(q/\hbar)r \cos\alpha} d(\cos\alpha) = \frac{e^{i(q/\hbar)r \cos\alpha}}{iqr/\hbar} \Big|_{-1}^{+1} = \frac{1}{iqr/\hbar} \left[ e^{i(qr/\hbar)} - e^{-i(qr/\hbar)} \right] = \frac{2 \sin(qr/\hbar)}{qr/\hbar},$$

portanto:

$$F(q^2) = \frac{2\pi}{Ze} \int_0^\infty \rho(r) \frac{2 \sin(qr/\hbar)}{qr/\hbar} r^2 dr = \frac{4\pi\hbar}{Ze q} \int_0^\infty \rho(r) \sin(qr/\hbar) r dr.$$

■

### III. EXERCÍCIOS

1. Mostrar que o fator de forma para a distribuição de carga do modelo I é:

$$F(q^2) = 3 \left[ \frac{\sin(qr_0/\hbar) - (qr_0/\hbar) \cos(qr_0/\hbar)}{(qr_0/\hbar)^3} \right]$$

2. Calcule o fator de forma para a distribuição de carga:

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{e^{-r/a}}{r}$$

### IV. REFERÊNCIAS

- [1] R. Eisberg & R. Resnick, *Física Quântica*, Elsevier (1979).
- [2] W.S.C. Williams, *Nuclear and Particle Physics*, Oxford Univ. Press (1991).