

Notas de Aula de Introdução à Física Nuclear (NHZ3026)

Prof. Dr. Marcelo Augusto Leigui de Oliveira
 Centro de Ciências Naturais e Humanas (CCNH)
 Universidade Federal do ABC (UFABC)
 Santo André - SP

AULA #7: Modelos nucleares - I

Nas aulas anteriores, vimos que a força de interação entre os núcleons não é completamente conhecida. Além disso, os problemas da física nuclear, em geral, estão relacionados com quantidades de partículas de difícil tratamento estatístico. Diante dessas dificuldades, há uma grande necessidade de descrever-se as propriedades dos núcleos através de modelos. Os modelos nucleares se dividem em duas classes principais:

- os *modelos de partícula independente*, que tratam os núcleons como partículas independentes; p.ex.: o modelo do gás de Fermi, ou o modelo de camadas;
- os *modelos coletivos*, que admitem fortes interações entre os núcleons; p.ex.: o modelo da gota líquida.

I. ENERGIA DE LIGAÇÃO E DE SEPARAÇÃO

Verifica-se, experimentalmente, que a massa do núcleo é menor que a soma das massas de seus constituintes. A diferença de massa é a *energia de ligação* do núcleo dividida por c^2 . Chamando-se $\delta m = -\Delta m$ de *déficit de massa*, a **energia de ligação**, B , é, então:

$$B = \delta m c^2,$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo.

Exemplo 1:

Analisemos o caso do dêuteron ($d \equiv {}^2\text{H}$). Para isto, vamos tomar os dados da Tabela 1 da Aula 2:

$$m({}^2\text{H}) = 2,014102u, \quad m({}^1\text{H}) = 1,007825u, \quad m_n = 1,008665u,$$

onde as massas são dadas em função da unidade de massa atômica, que, sabemos, vale: $u = 931,5 \text{ MeV}/c^2$.

A soma das massas dos constituintes do dêuteron é maior que a sua massa:

$$1,007825u + 1,008665u = 2,016490u > 2,014102u.$$

Neste caso, o déficit de massa é:

$$\delta m = m({}^1\text{H}) + m_n - m({}^2\text{H}) = 0,002388 u = 2,224 \text{ MeV}/c^2.$$

Assim, a energia de ligação é:

$$B = \delta m c^2 = 2,224 \text{ MeV}.$$

Vimos que um valor moderno da energia de ligação do dêuteron é: $B_d = (2,22464 \pm 0,00005) \text{ MeV}$.



Seja um núcleo composto, ${}^A_Z\text{X}$, cuja massa é $m(A, Z)$ e $m({}^A_Z\text{X})$, ou $m({}^A\text{X})$, a massa atômica do nuclídeo correspondente. Sejam m_p , m_n e m_e as massas do próton, do nêutron e do elétron, respectivamente, então:

$$\begin{aligned} m(A, Z)c^2 &= Zm_p c^2 + Nm_n c^2 - B \Rightarrow \\ [m({}^A\text{X}) - Zm_e]c^2 &= Zm_p c^2 + Nm_n c^2 - B \Rightarrow \\ m({}^A\text{X})c^2 &= Z(m_p + m_e)c^2 + Nm_n c^2 - B \Rightarrow \\ \boxed{B = [Zm({}^1\text{H}) + Nm_n - m({}^A\text{X})]c^2 = \delta mc^2} \end{aligned} \quad (1)$$

onde B é a energia de ligação deste núcleo.

Se tomarmos a diferença entre a energia de ligação de um dado nuclídeo e outro faltando um dos núcleons, teremos a **energia de separação** deste núcleon, assim:

- A energia de separação do nêutron é:

$$S_n = B({}^A_Z\text{X}_N) - B({}^{A-1}_Z\text{X}_{N-1}) = [m({}^{A-1}_Z\text{X}_{N-1}) - m({}^A_Z\text{X}_N) + m_n]c^2$$

- A energia de separação do próton é:

$$S_p = B({}^A_Z\text{X}_N) - B({}^{A-1}_{Z-1}\text{X}_N) = [m({}^{A-1}_{Z-1}\text{X}_N) - m({}^A_Z\text{X}_N) + m({}^1\text{H})]c^2$$

Exemplo 2:

Nuclídeo	Δm (MeV/ c^2)	S_n (MeV)	S_p (MeV)
${}^{16}\text{O}$	-4,737	15,66	12,13
${}^{17}\text{O}$	-0,810	4,14	13,78
${}^{40}\text{Ca}$	-34,847	15,64	8,33
${}^{41}\text{Ca}$	-35,138	8,36	8,89
${}^{208}\text{Pb}$	-21,759	7,37	8,01
${}^{209}\text{Pb}$	-17,624	3,94	8,15

Tabela 1

Diferença de massa e energias de separação de prótons e nêutrons para alguns nuclídeos selecionados.

II. MODELO DA GOTA LÍQUIDA

Uma característica notável dos núcleos é que a energia de ligação é quase proporcional ao número A de núcleons no núcleo, ou seja: $B \propto A$. Na figura 1, vemos a energia de ligação média por núcleon, B/A , de diferentes nuclídeos em função do número de massa. Note que, a não ser para núcleos muito leves, a energia de ligação média permanece aproximadamente constante em ~ 8 MeV, com flutuações de 10% em torno deste valor.

Vimos (na Aula 4), que a densidade dos núcleos é aproximadamente a mesma para todos os núcleos (\sim densidade uniforme de gotas líquidas):

$$\rho = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi r^3} \approx \text{const.} \Rightarrow r = r_0 A^{1/3},$$

ou seja, a densidade também é proporcional a A .

Isto fornece nosso primeiro *insight* a respeito da força nuclear:

$$\frac{B}{A} \approx \text{const.} \Rightarrow B \propto A \propto r^3,$$

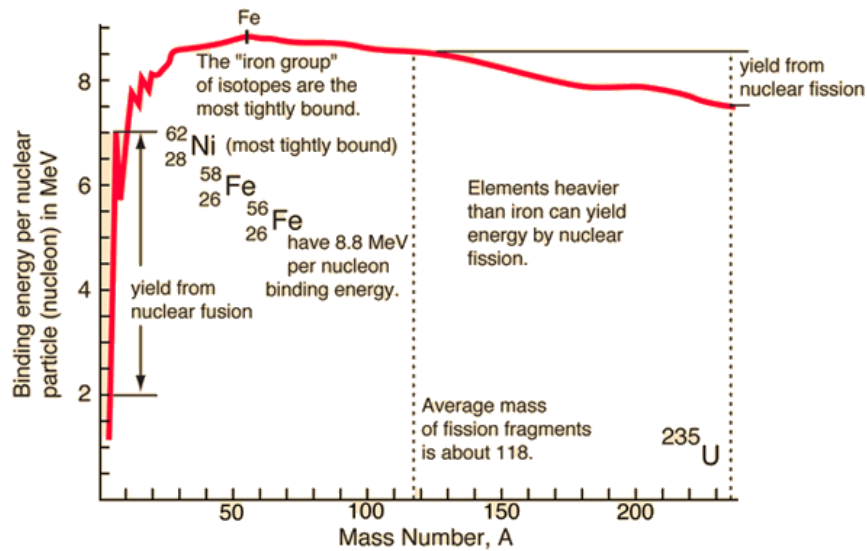


Figura 1: Energia de ligação por nucleão (B/A) em função do número de massa.

ou seja, a energia de ligação é proporcional à massa (\sim o calor específico de vaporização é proporcional à massa de uma gota líquida). Assim, vamos calcular, em primeira aproximação:

$$B(Z, A) = a_V A + \dots,$$

onde $a_V \sim 8 \text{ MeV}$ é a *constante do termo de volume*.

Note que $B \propto A$ indica que a interação ocorre entre os vizinhos mais próximos, já que, se cada nucleão interagisse com todos os outros, a energia de ligação deveria ser $B \propto A(A-1) \propto A^2$.

Agora, existem nucleões na superfície, que possuem uma quantidade de vizinhos menor que aqueles do interior, portanto, o termo de volume superestima a contribuição dos nucleões da superfície. Além disso, aprendemos que $r = r_0 A^{1/3}$, ou seja, a área da superfície do núcleo $\propto A^{2/3}$. Assim, introduzimos o *termo de superfície* (\sim tensão superficial da gota líquida):

$$B(Z, A) = a_V A - a_S A^{2/3} + \dots,$$

onde a_S é a *constante do termo de superfície*.

Temos ainda que incluir a repulsão coulombiana dos prótons que interagem todos entre si: $B \propto Z(Z-1)/r \propto Z^2/A^{1/3}$. Ou seja, o *termo coulombiano* (\sim gota líquida eletricamente carregada) é introduzido com:

$$B(Z, A) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} + \dots,$$

onde a_C é a *constante do termo coulombiano*.

Sabe-se, também, que há uma tendência (vide figura 2) dos nuclídeos possuírem quantidades próximas de prótons e nêutrons e que para núcleos estáveis: $Z \approx A/2$. Introduzimos o *termo de simetria* com uma forma do tipo:

$$B(Z, A) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{sim} \frac{(Z - A/2)^2}{A} + \dots,$$

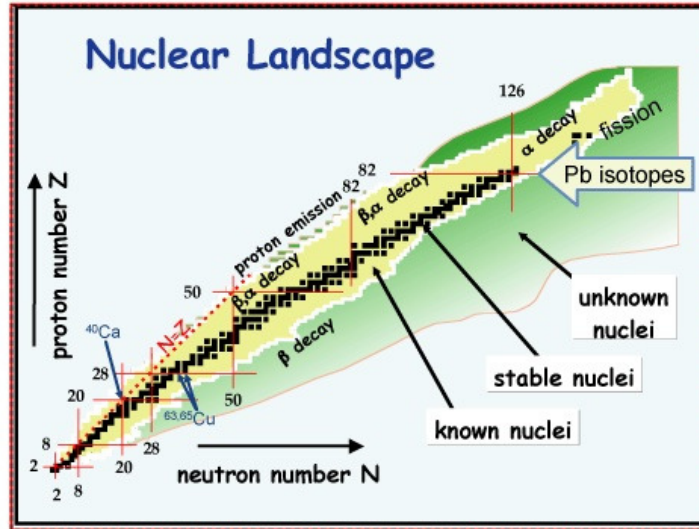


Figura 2: Distribuição de núclídeos (note que os núcleos estáveis encontram-se próximos da curva $N = Z$).

onde a_{sim} é a constante do termo de simetria.

Finalmente, sabe-se que existem somente 4 núclídeos com Z e N ímpares (^2H , ^6Li , ^{10}B e ^{14}N), mas 167 com Z e N pares. A energia de ligação, então, deve aumentar para Z e N pares e diminuir para Z e N ímpares. O termo de emparelhamento é introduzido para essas 2 situações:

$$B(Z, A) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{sim} \frac{(Z - A/2)^2}{A} + (-1)^\pi a_p A^{-1/2}, \quad (2)$$

onde a_p é a constante do termo de emparelhamento e π é um número par (ímpar) para Z e N pares (ímpares). Caso A seja ímpar, não há emparelhamento, e, neste caso: $a_p = 0$.

Vimos na equação 1 a relação entre a massa de um núclídeo e sua energia de ligação; inserindo o resultado de 2, vem:

$$m(Z, A) = Zm(^1\text{H}) + (A - Z)m_n - \left[a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{sim} \frac{(Z - A/2)^2}{A} + (-1)^\pi a_p A^{-1/2} \right] / c^2, \quad (3)$$

que é a fórmula da massa semi-empírica.

Semi-empírica, pois os valores das constantes são obtidos experimentalmente. Em 1935, Weizsacker forneceu os primeiros valores numéricos:

$$m(Z, A) = 1,007825Z + 1,008665(A - Z) - 0,01691A + 0,01911A^{2/3} + 0,000763Z^2 A^{-1/3} + 0,10175(Z - A/2)^2 A^{-1} - (-1)^\pi 0,012A^{-1/2}, \quad (4)$$

em unidades de u .

III. MODELO DO GÁS DE FERMI

O modelo, proposto por Weisskopf, supõe um gás de núcleons independentes (apesar de $\rho \sim 10^{18} \text{ kg/m}^3$), similarmente ao modelo do gás de elétrons livres de condução num metal. O modelo é baseado no fato de que os núcleons movimentam-se quase livremente no interior do núcleo e de que os níveis de energia são ocupados seguindo o princípio de exclusão de Pauli.

Para isso, inicialmente, é proposto um potencial efetivo constante e atrativo dentro do núcleo e zero fora (vide figura 3).

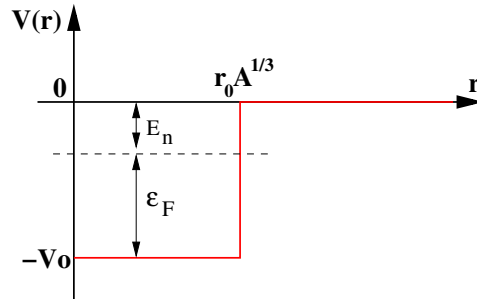


Figura 3: Poço de potencial quadrado finito.

No interior do poço de potencial há níveis quantizados de energia. A equação de Schrödinger da partícula livre é:

$$-\frac{\hbar}{2m} \nabla^2 \psi = E \psi,$$

na qual, aplicando-se as condições de contorno, vêm soluções do tipo $\psi(x, y, z) = A \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z)$, se tivéssemos uma cavidade cúbica. Os níveis de energia quantizados, neste caso, são:

$$E(n_x, n_y, n_z) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n^2, \quad (5)$$

onde a é o lado do cubo.

Representando os estados possíveis num espaço de momentos (vide figura 4), em cada intervalo infinitesimal dk , contamos:

$$dn = \frac{1}{8} 4\pi k^2 dk \frac{1}{(\pi/a)^3} \quad (6)$$

estados, onde $1/8$ representa um octante de casca esférica, na qual os valores de k_x , k_y e k_z são positivos, $4\pi k^2 dk$ é o volume da casca infinitesimal e $(\pi/a)^3$ o volume total.

Diferenciando-se k na equação 4 com relação à energia e substituindo em 6, encontramos a equação:

$$dn = \frac{\sqrt{2} m^{3/2} a^3}{2\pi^2 \hbar^3} E^{1/2} dE,$$

que integrada desde zero até o valor da energia (ϵ_F) que inclui todos os núcleons presentes (aqui n):

$$n = \frac{\sqrt{2} m^{3/2} a^3}{3\pi^2 \hbar^3} \epsilon_F^{3/2},$$

onde ϵ_F é a *energia de Fermi*.

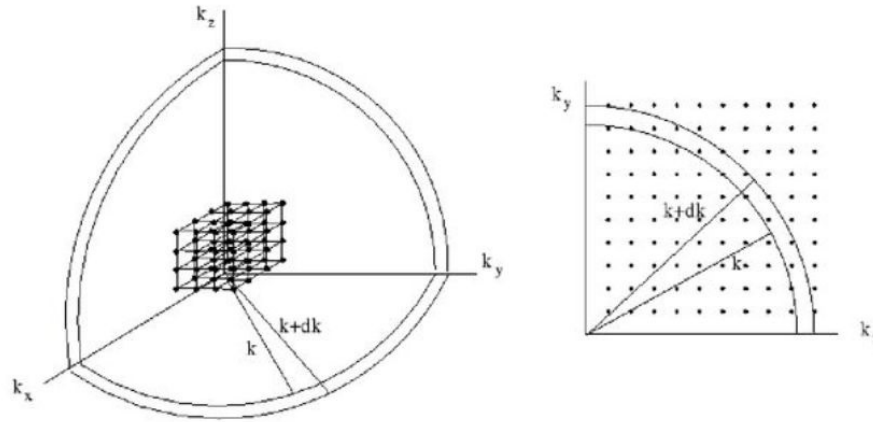


Figura 4: Contagem de estados entre k e $k + dk$.

Os núcleons são férmions ($\text{spin}=1/2$) que ocupam os níveis de acordo com o princípio de exclusão de Pauli. Veja a figura 5(a), onde ϵ_F é a *energia de Fermi* (que corresponde à energia do nível mais alto ocupado). E_n é a energia de ligação do último núcleon (vide figura 3).

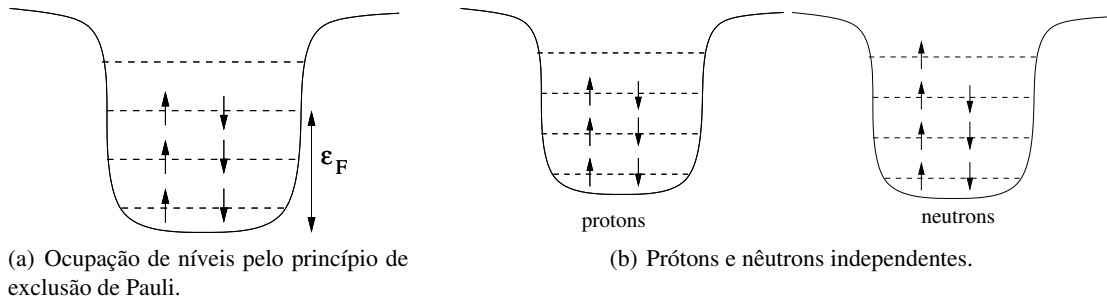


Figura 5: Modelo do gás de Fermi.

Agora, prótons e nêutrons não são indênticos, portanto, deve-se fazer um diagrama de ocupação para cada um (vide figura 5(b)). Isso explica a tendência do núcleo ter $N \approx Z$, pois a energia do núcleo é minimizada desta forma. Por isso, um dado estado de energia pode ser ocupado por 4 núcleons (próton ou nêutron com spin para cima ou para baixo), assim:

$$n = \frac{\sqrt{2}m^{3/2}a^3}{3\pi^2\hbar^3}\epsilon_F^{3/2} = \frac{A}{4} \Rightarrow \epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2\rho}{2} \right)^{2/3}, \tag{7}$$

onde $\rho = A/a^3$.

Seja um núcleo um gás de Fermi de nêutrons dentro de um núcleo esférico de densidade uniforme: $r = r_0A^{1/3}$. Para um núcleo típico, o número de nêutrons é $N \approx 0,6A$ (vide figura 2), então:

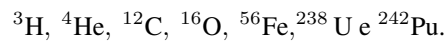
$$\rho = \frac{N}{4/3\pi r_0^3 A} = \frac{0,6A}{4/3\pi r_0^3 A} = \frac{0,6A}{4/3\pi r_0^3 A} = \frac{0,45}{\pi r_0^3}.$$

Substituindo na energia de Fermi:

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2 \rho}{2} \right)^{2/3} \Rightarrow \varepsilon_F = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \frac{0,265}{r_0^2}. \quad (8)$$

IV. EXERCÍCIOS

1. Calcule, de acordo com a fórmula da massa semi-empírica, o valor da massa dos seguintes núclídeos:



Compare seus resultados com o da tabela 1 da aula 2.

2. Calcule a energia de separação de um nêutron no caso do núclídeo ${}^{232}_{90}\text{Th}$.

3. Calcule a energia disponível quando o ${}^{235}\text{U}$ captura um nêutron num reator de fissão:



4. (a) Para $r_0 = 1,2 \text{ F}$ e $m = 931,5 \text{ MeV}/c^2$, calcule a energia de Fermi (equação 8);

(b) Sabendo que a energia de separação de um núcleon, pela fórmula da massa semi-empírica é $\sim 7 \text{ MeV}$, calcule a profundidade do poço V_0 no modelo do gás de Fermi.

V. REFERÊNCIAS

[1] R. Eisberg & R. Resnick, *Física Quântica*, Elsevier (1979).

[2] Introdução à Física Nuclear, H. Schechter, Ed. UFRJ (2007).