

## Notas de Aula de Introdução à Física Nuclear (NHZ3026)

Prof. Dr. Marcelo Augusto Leigui de Oliveira  
 Centro de Ciências Naturais e Humanas (CCNH)  
 Universidade Federal do ABC (UFABC)  
 Santo André - SP

### AULA #8: Modelos nucleares - II

#### I. MODELO DE CAMADAS

Hipótese básica do modelo de camadas: cada núcleon move-se independentemente num potencial efetivo suave resultante do efeito médio de todos os outros núcleons. A órbita é especificada pela solução da equação de Schrödinger, como o potencial é do tipo de um poço, as soluções correspondentes são as de estados ligados. A estratégia será propor potenciais simples, examinar as soluções da equação de Schrödinger, preencher os níveis de energia de acordo com o princípio de exclusão de Pauli e verificar se conseguimos obter os números mágicos. Os potenciais propostos são para nêutrons, para incluir os prótons soma-se aos níveis obtidos a correção devida ao termo coulombiano. Evidência experimental: os **números mágicos**: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126, ...

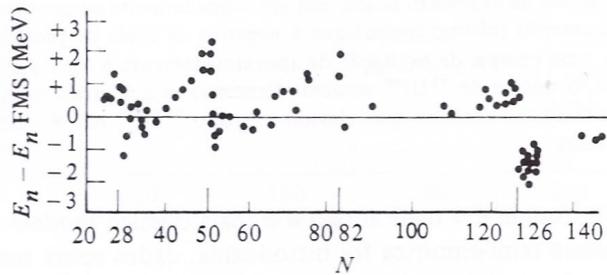


Figura 1: Diferença da energia de separação de um nêutron pela fórmula da massa semi-empírica e observada experimentalmente.

1. desvios da energia de ligação próxima aos números mágicos;
2. energia de separação de núcleons com picos próximos aos números mágicos;
3. elementos com Z e/ou N mágico têm mais isótopos e/ou isótonos que o usual;
4. elementos com Z mágico têm maior abundância natural;
5. núcleos com N mágico têm pequena seção de choque para captura de nêutrons;
6. núcleos com N=número mágico+1 são emissores de nêutrons.

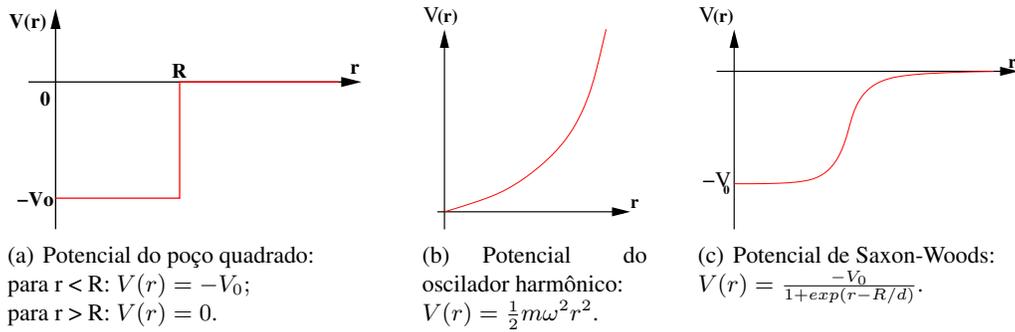


Figura 2: Funções candidatas ao potencial.

Soluções:

$$\psi_{nlm}(\vec{r}) = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta, \varphi),$$

onde  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  são os harmônicos esféricos de ordem  $l$  e  $m$ :

$$L^2Y_l^m(\theta, \varphi) = l(l+1)\hbar^2Y_l^m(\theta, \varphi),$$

$$L_zY_l^m(\theta, \varphi) = m\hbar Y_l^m(\theta, \varphi),$$

onde  $l = 0, 1, 2, \dots$  e  $-l \leq m \leq l$ .

A parte radial da equação de Schrödinger fica:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2u_{nl}(r)}{dr^2} + \left[ V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \right] u_{nl}(r) = E_{nl}u_{nl}(r),$$

onde  $u(r)_{nl} = rR_{nl}(r)$  são as autofunções dos autovalores  $E_{nl}$ , os níveis de energia especificados pelos índices  $n$  (da quantização da energia) e  $l$  (da quantização do momento angular). O segundo termo dentro dos colchetes é chamado de *barreira de momento angular*, que tem o efeito de confinar crescentemente o núcleon próximo à superfície do núcleo, conforme  $l$  aumenta:

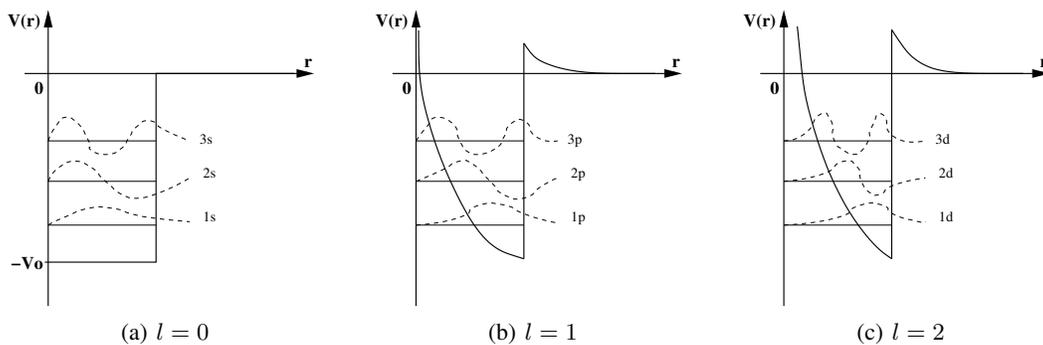


Figura 3: Efeito da barreira de momento angular.

Inspecionemos os níveis de energia para 3 potenciais propostos:

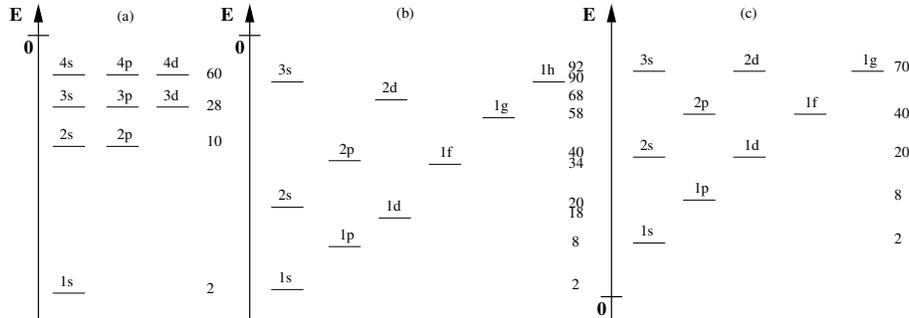


Figura 4: População acumulada (colunas à direita) para os níveis de energia dos potenciais: (a) coulombiano, (b) poço infinito e (c) oscilador harmônico.

A coluna à direita indica o número de ocupação acumulada. Vemos que o número de ocupação acumulada que mais se aproxima dos números mágicos é o do oscilador harmônico que, agora, devemos torná-lo mais razoável fisicamente: ter comportamento parecido com o do poço finito com barreira de potencial. O truncamento do poço tem o efeito de suavizar a curvatura da função de onda, diminuindo a energia do estado correspondente:

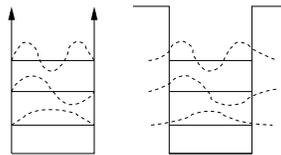


Figura 5: Funções de onda para o poço infinito (à esquerda) e para o poço finito (à direita).

A redução da curvatura depende de  $n$  e de  $l$  (aumenta com  $l$ ) e remove a degenerescência do oscilador harmônico:

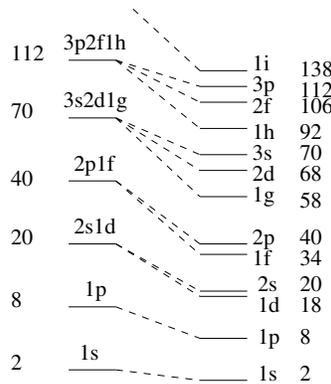


Figura 6: Mudanças nos níveis de energia e na população acumulada dos estados para o oscilador harmônico normal (à esquerda) e truncado (à direita).

Temos até aqui apenas os números mágicos 2, 8 e 20, portanto, falta ainda algum elemento no modelo.

### A. Interação spin-órbita

O mistério foi resolvido em 1949, independentemente, por Mayer e Jensen que propuseram um termo de interação spin-órbita forte ( $20\times$  maior que a atômica) e invertida (sinal “-” contrário ao caso atômico):

$$E \propto -\vec{S} \cdot \vec{L}$$

Para os elétrons no átomo esta interação tem origem magnética, mas para os núcleons no núcleo a origem está na força nuclear (mas há controvérsias ...). Faremos:

$$V(r) \rightarrow V(r) + f(r)\vec{S} \cdot \vec{L}$$

Sem a interação:

- operadores:  $\vec{L}^2$ ,  $L_z$ ,  $\vec{S}^2$  e  $S_z$ .
- números quânticos:  $l$ ,  $m$ ,  $s$  e  $m_s$ ;
- autovalores:  $l(l+1)\hbar^2$ ,  $m\hbar$ ,  $s(s+1)\hbar^2$  e  $m_s\hbar$ .

Para a interação, definimos inicialmente:  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$  e  $J_z = L_z + S_z$  e os bons números quânticos passam a ser  $j$ ,  $m_j$ ,  $l$  e  $s$ , onde os autovalores de  $\vec{J}$  e  $J_z$  são  $j(j+1)\hbar^2$ ,  $m_j\hbar$ , respectivamente. Como  $s = 1/2$ , vem:

$$j = l + 1/2 \text{ ou } j = l - 1/2,$$

que, devido à interação, torna a energia dependente de  $n$ ,  $l$  e  $j$ .

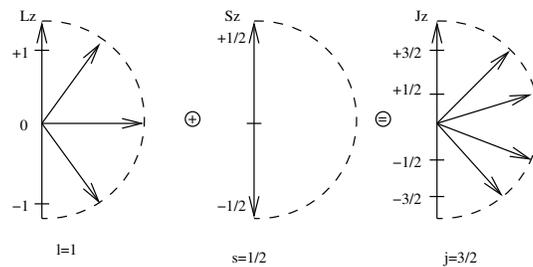


Figura 7: Soma de momentos angulares:  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ .

Assim, dados  $n$  e  $l$ , temos degenerescência  $(2j + 1)$ , onde para  $j > l$  subtraímos a energia e para  $j < l$  somamos a energia:

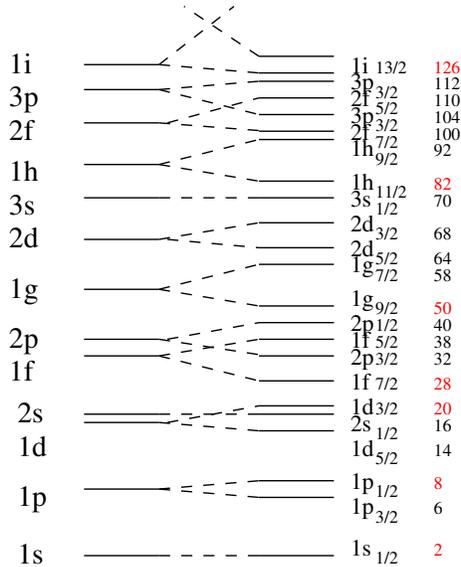


Figura 8: Mudanças nos níveis de energia e na população acumulada dos estados para o oscilador harmônico truncado sem a interação spin-órbita (à esquerda) e com a interação spin-órbita (à direita).

Notação:  $(nl_j)^k$

$${}_{8}^{17}O = \begin{cases} \text{prótons:} & (1s_{1/2})^2 & (1p_{3/2})^4 & (1p_{1/2})^2 \\ \text{nêutrons:} & (1s_{1/2})^2 & (1p_{3/2})^4 & (1p_{1/2})^2 & (1d_{5/2})^1 \end{cases}$$

### B. Spin e paridade nucleares

Se  $Z$  ou  $N$  são mágicos o núcleo é dito ter camada simplesmente fechada e se ambos são mágicos o núcleo é dito ter camada duplamente fechada. Podemos fazer importantes previsões para os núcleos duplamente mágicos e, também, para aqueles com um núcleon a mais ou a menos.

1) Spin:

- qualquer nível completamente ocupado ( $2j + 1$  ocupantes) não contribui para o spin nuclear;
- qualquer núcleo duplamente fechado mais um ou menos um núcleon tem spin nuclear igual ao do núcleon extra ou do buraco.

1. o spin do estado fundamental de todos os núcleos com  $Z$  e  $N$  pares é zero;
2. o spin do estado fundamental de qualquer núcleo com  $A$  ímpar é o do núcleon desemparelhado ou do buraco.

## 2) Paridade:

A paridade nuclear é o produto das paridades das funções de onda dos núcleons individuais:

$$\prod_{i=1}^A (-1)^{l_i} = (-1)^{l_1} \cdot (-1)^{l_2} \cdot (-1)^{l_3} \cdot (-1)^{l_3} \dots (-1)^{l_A}$$

- qualquer nível completamente ocupado ( $2j + 1$  ocupantes) não contribui para a paridade nuclear;
- qualquer núcleo duplamente fechado mais um ou menos um núcleon tem paridade nuclear igual ao do núcleon extra ou do buraco.

1. a paridade do estado fundamental de todos os núcleos com  $Z$  e  $N$  pares é sempre par;
2. a paridade do estado fundamental de qualquer núcleo com  $A$  ímpar é o mesmo da função de onda do núcleon desemparelhado ou do buraco.

**Exemplo 1:**

Utilizando da notação  $J^\Pi$ , onde  $J$  é o momento angular total e  $\Pi = \pm$  a paridade da função de onda do núcleon desemparelhado (ou do buraco), determine  $J^\Pi$  dos núclídeos  $^{16}_8\text{O}$  e  $^{11}_6\text{C}$ :

$$\begin{aligned} ^{16}_8\text{O} : \quad Z = 8, N = 8 \Rightarrow A = 16 \\ \text{distribuição de prótons/nêutrons: } (1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^4(1p_{1/2})^2 \Rightarrow \text{duplamente fechada} \\ \text{spin} = 0 \text{ e paridade} = + \Rightarrow \boxed{J^\Pi = 0^+} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ^{11}_6\text{C} : \quad Z = 6, N = 5 \Rightarrow A = 11 \\ \text{distribuição de prótons: } (1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^4 \Rightarrow \text{fechada} \\ \text{distribuição de nêutrons: } (1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^3 \Rightarrow \text{buraco: } (1p_{3/2})^{-1}, \text{ com } j = 3/2 \text{ e } l = 1 \\ \text{spin} = 3/2 \text{ e paridade: } (-1)^1 = -1 \Rightarrow \boxed{J^\Pi = 3/2^-} \end{aligned}$$

■

E quanto aos núcleos com  $Z$  e  $N$  ímpares? Os spins nucleares não têm que se acoplar em zero, tudo que sabemos é que o spin nuclear estará no intervalo:

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

**Exemplo 2:** O núclídeo  $^{14}_7\text{N}$ :

$$\begin{aligned} ^{14}_7\text{N} : \quad Z = 7, N = 7 \Rightarrow A = 14 \\ \text{distribuição de prótons: } (1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^4 \boxed{(1p_{1/2})^1} \Rightarrow \text{próton desemparelhado} \\ \text{distribuição de nêutrons: } (1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^4 \boxed{(1p_{1/2})^1} \Rightarrow \text{nêutron desemparelhado} \end{aligned}$$

Assim, para o nível  $p$ :  $l = 1 \Rightarrow \Pi = (-1)^1(-1)^1 = +1$ , mas

$$j = \begin{cases} |1/2 - 1/2| & = 0 \\ 1/2 + 1/2 & = 1 \end{cases}$$

Então, temos 2 possibilidades  $J^\Pi = 0^+$  ou  $\boxed{J^\Pi = 1^+}$  (somente o último estado é verificado experimentalmente).

■

### C. Estados excitados

Seja um núcleo duplamente fechado mais um núcleon ( ${}^{17}_8\text{O}$ ):

$${}^{17}_8\text{O} : Z = 8, N = 9 \Rightarrow A = 17$$

$$\text{distribuição de prótons: } (1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^4(1p_{1/2})^2 \Rightarrow \text{fechada}$$

$$\text{distribuição de nêutrons: } (1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^4(1p_{1/2})^2 \boxed{(1d_{5/2})^1} \Rightarrow \text{nêutron desemparelhado}$$

Os próximos níveis a serem ocupados ( $1d_{5/2}$ ,  $1s_{1/2}$ ,  $1d_{3/2}$ , ..., neste caso) formam os *estados excitados*. Iniciando-se a escala na energia do estado fundamental, pode-se determinar a *energia de excitação*, que é medida como uma **massa** maior para o núcleo em questão.

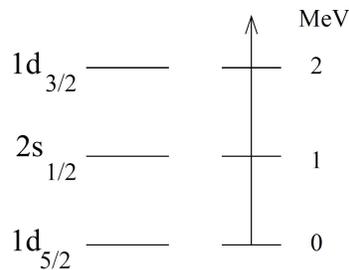


Figura 9: Estados nucleares excitados.

## II. MODELO COLETIVO

Há um aparente conflito entre o modelo de camadas, que trata os núcleons como independentes, e o modelo da gota líquida, no qual os núcleons estão fortemente correlacionados. Aage Bohr, Ben Mottelson e James Rainwater trabalharam no *modelo coletivo*, que engloba elementos de ambos, e receberam o Nobel de Física em 1975. Núcleos com um número mágico mais 1 núcleon têm camadas fechadas, completamente preenchidas, formando um caroço, e um núcleon independente no potencial efetivo em subcamadas incompletas subsequentes. O caroço está associado ao modelo da gota líquida. E o potencial não é mais esféricamente simétrico, podendo se deformar de modo coletivo e correlacionado.

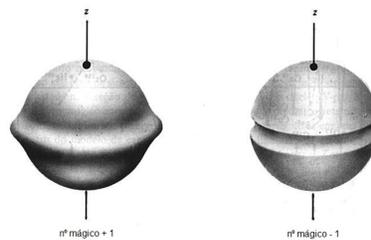


Figura 10: Alterações no formato esférico de núcleos com número mágico  $\pm 1$ .

Alterações no formato levam a alterações no potencial efetivo e, portanto, nos níveis de energia. Por outro lado, alterações na forma levam a mudanças nas distribuições de carga e de correntes nucleares e, por conseguinte, nos momentos nucleares de

quadrupolo elétrico e de dipolo magnético, respectivamente. Vimos que o momento quadrupolar elétrico é:

$$Q = \int \rho(x, y, z) \cdot [3z^2 - (x^2 + y^2 + z^2)] dV,$$

onde:

- $Q = 0$ , se  $\rho$  for esfericamente simétrica:  $\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2}$ ;
- $Q < 0$ , se  $\rho$  for oblato (nº mágico +1):  $\overline{x^2} = \overline{y^2} > \overline{z^2}$ ;
- $Q > 0$ , se  $\rho$  for prolato (nº mágico -1):  $\overline{x^2} = \overline{y^2} < \overline{z^2}$ .

Normalmente, o núcleo é um elipsóide com a razão entre os semi-eixos:

$$\frac{a}{b} \propto 1 + \frac{Q}{Zr^2}.$$

### Exemplo 3:

Seja o caso do  $^{123}\text{Sb}$ , com  $Z = 51 = 50 + 1$  prótons, cuja distribuição nas subcamadas vai até  $(1g_{7/2})^1$ . Na camada  $g$ , o momento angular é alto ( $l = 4$ ), o que faz a função de onda confinar-se muito próximo à superfície do núcleo (órbita de Bohr com raio nuclear  $\sim$  de um anel externo  $r'$ ).

Assim, com o modelo de camadas, calculamos:

$$Q = \int \rho[3z^2 - (x^2 + y^2 + z^2)] dV = \cancel{Q_{\text{caroço}}} + Q_{\text{anel}},$$

onde para o anel  $\rho \approx 0$ , exceto para  $x'^2 + y'^2 = r'^2$  e  $z' = 0$ . Desta forma:

$$Q \approx \int \rho(-r'^2) dV \approx (-r'^2) \int \rho dV = (-r'^2) \cdot e,$$

onde a última integração é feita sobre 1 próton. Usualmente, este resultado é dado em unidades de  $e$ , ou seja:  $Q \approx -r'^2$ .

Mas, experimentalmente, obtém-se:

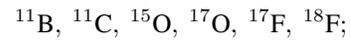
$$\frac{Q}{Zr'^2} \approx -0,09 \Rightarrow q \approx -0,09 \cdot 51 \cdot r'^2 \Rightarrow \boxed{Q \approx -5r'^2},$$

ou seja, um valor 5 vezes superior.

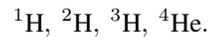


### III. EXERCÍCIOS

1. Utilizando-se do modelo de camadas, determine a distribuição no núcleon ímpar, além do spin e da paridade dos seguintes núclídeos:



2. Especifique, de acordo com o modelo de camadas, os estados  $(L, S, J^\Pi, T)$  dos seguintes núcleos leves:



### IV. REFERÊNCIAS

- [1] R. Eisberg & R. Resnick, *Física Quântica*, Elsevier (1979).