

Notas de Aula de Introdução à Física Nuclear (NHZ3026)

Prof. Dr. Marcelo Augusto Leigui de Oliveira
 Centro de Ciências Naturais e Humanas (CCNH)
 Universidade Federal do ABC (UFABC)
 Santo André - SP

AULA #11: TEORIA QUÂNTICA DOS DECAIMENTOS - I

I. DECAIMENTO ALFA

(1903) Rutherford mede a razão q/m da partícula α defletindo-a em campos elétricos e magnéticos.

(1909) Rutherford coleta uma grande quantidade de partículas α numa câmara evacuada e, por espectroscopia, identifica na câmara a presença de He .

(1928) a teoria do decaimento α foi desenvolvida, independentemente, por Gamow e por Gurney e Condon.

A emissão α é um efeito da repulsão coulombiana para núcleos pesados ($Z > 83$):

$$F_{coul} \propto Z^2 \quad , \quad F_{nucl} \propto A$$

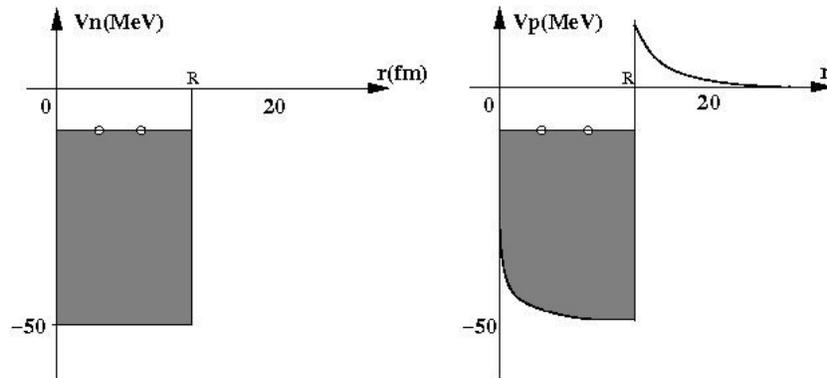


Figura 1: Potenciais radiais, respectivamente, para nêutrons e prótons (em cinza estão representados os níveis de energia ocupados).

A energia de ligação de cada núcleon é de 6 MeV e a da partícula α é 28,3 MeV. Então, se 2 prótons e 2 nêutrons do nível superior formam uma α , a energia de ligação da α é suficiente para prover as 4 energias de ligação dos núcleons e ainda sobra energia cinética para a α . Mas, a partícula α estará dentro da barreira de potencial coulombiana. A energia potencial coulombiana, tomada a partir da superfície do núcleo ($r > R$) irá igualar à energia cinética da α a uma distância b da superfície (vide figura 2-(a)), esta distância deve ser maior que ~ 40 fm (exercício 1).

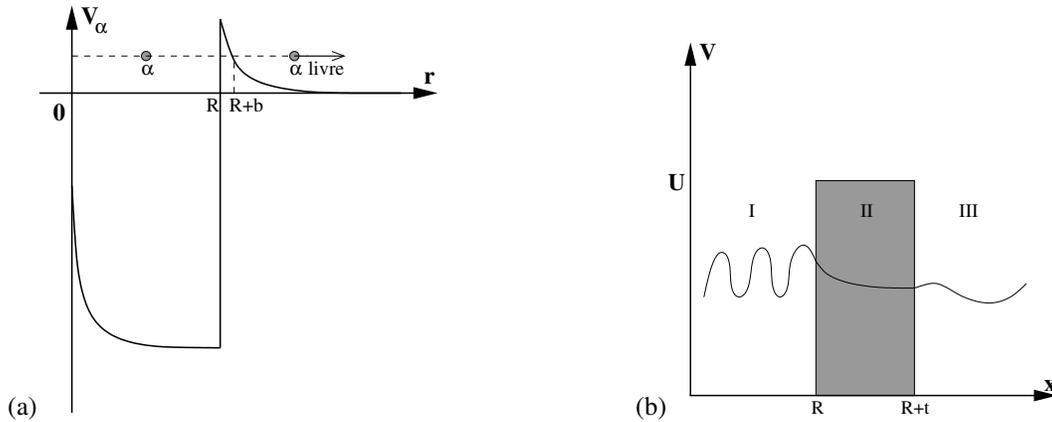


Figura 2: (a) Partícula α e a barreira de potencial coulombiana; (b) Barreira de potencial retangular.

Classicamente, a partícula α estará confinada, mas, quanticamente, há a possibilidade do tunelamento, cuja probabilidade vamos calcular.

Iniciamos com uma barreira retangular de largura t e altura U . As funções de onda em cada uma das regiões (vide figura 2-(b)) são dadas por:

- (I) $\psi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$, onde $p = \hbar k = \sqrt{2mK}$;
- (II) $\psi = Ce^{\rho x} + De^{-\rho x}$, onde $\hbar\rho = \sqrt{2m(U - K)}$;
- (III) $\psi = Fe^{ikx} + Ge^{-ikx}$, onde $p = \hbar k = \sqrt{2mK}$.

As condições de continuidade nas fronteiras desta barreira são:

$$\begin{aligned} \psi_I(R) &= \psi_{II}(R) & , & \quad \frac{d}{dx}\psi_I(R) = \frac{d}{dx}\psi_{II}(R), \\ \psi_{II}(R+t) &= \psi_{III}(R+t) & , & \quad \frac{d}{dx}\psi_{II}(R+t) = \frac{d}{dx}\psi_{III}(R+t), \end{aligned}$$

tal que a probabilidade de transição é dada por (exercício 2):

$$T = \left| \frac{F}{A} \right|^2 = \frac{4K(U - K)}{4K(U - K) + U^2 \sinh^2(\rho t)}$$

Contudo, estamos num regime em que $kt \gg 1$ e $\rho t \gg 1$, assim, podemos aproximar o seno hiperbólico:

$$\sinh(\rho t) = \frac{e^{\rho t} - e^{-\rho t}}{2} \approx \frac{e^{\rho t}}{2} \Rightarrow \sinh^2(\rho t) \approx \frac{e^{2\rho t}}{4}$$

que acaba sendo o termo dominante no denominador de T , então:

$$T \approx \frac{16K(U - K)}{U^2} e^{-2\rho t}$$

Agora, podemos considerar ainda que $K \sim U \sim (U - K)$ e obter, para a barreira de potencial retangular de largura t , uma expressão aproximada para $T \approx e^{-2\rho t}$, onde $\rho = \sqrt{2m(U - K)}/\hbar$

No entanto, a barreira coulombiana pode ser entendida como uma sequência de barreiras retangulares, de forma que:

$$T = e^{-2\rho_1\Delta t_1} e^{-2\rho_2\Delta t_2} \dots e^{-2\rho_i\Delta t_i} \dots = e^{-2\int \rho(t)dt},$$

onde $\rho(t) = \sqrt{2m(U(t) - K)}/\hbar$ e a integral vai do raio nuclear até o limite em que $U(t) = K$, ou seja, $r = b$.

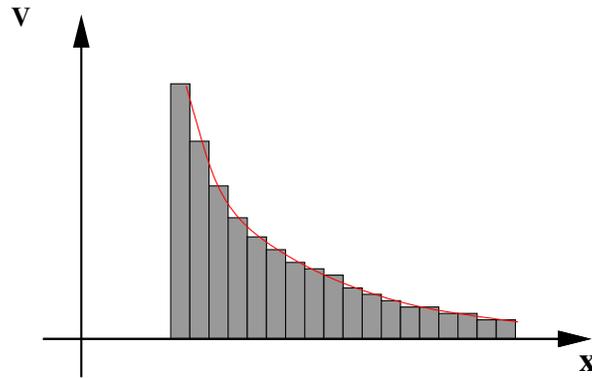


Figura 3: Soma de barreiras de potencial retangulares como aproximação para a barreira de potencial coulombiana.

Vamos definir o *fator G* de Gamow pela fórmula:

$$\exp\{-G\} \equiv \exp\left\{-\frac{2}{\hbar} \int_R^b \sqrt{2m[(U(r) - K)]} dr\right\}. \quad (1)$$

Como:

$$U(r) = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ e } K = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 b} \Rightarrow G = 2\sqrt{\frac{2m2Ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}} \int_R^b \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}} dr,$$

que pode ser calculada e aproximada (usando que $b \gg R \Leftrightarrow U(R) \gg K$, o que é verdade para a maioria dos núcleos de interesse):

$$G \approx 2\sqrt{\frac{mZe^2b}{\pi\epsilon_0\hbar^2}} \left(\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{R}{b}}\right) \quad (2)$$

e ainda demonstra-se (exercício 3) ser igual a:

$$G = \frac{4\pi\alpha Zc}{v} - 8\sqrt{\frac{mcZ\alpha R}{\hbar}} \quad (3)$$

Digamos que a partícula α tenta cruzar a barreira $v/2R$ vezes por segundo, então a probabilidade de transição será:

$$\lambda = \left(\frac{v}{2R}\right) \exp\left\{-\frac{4\pi\alpha Zc}{v} + 8\sqrt{\frac{mcZ\alpha R}{\hbar}}\right\}. \quad (4)$$

A. A regra de Geiger-Nuttal

É uma regra empírica que relaciona as meias vidas de núclídeos α -emissores com as energias cinéticas das partículas α , para diferentes séries de isótopos:

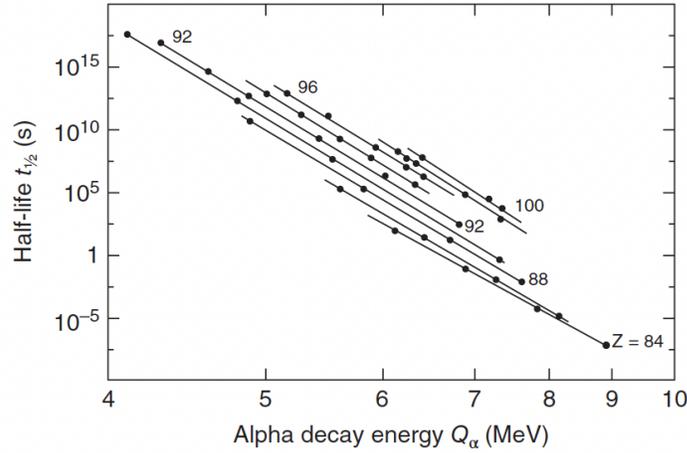


Figura 4: Regra de Geiger-Nuttal.

$$\log(t_{1/2}) = a + \frac{b}{\sqrt{K}}, \quad (5)$$

onde a e b são funções suaves de Z , mas que independem de N .

Como:

$$\begin{aligned} \log(t_{1/2}) &= \frac{\ln(t_{1/2})}{\ln 10} = \frac{\ln(\ln 2 / \lambda)}{\ln 10} = \frac{\ln(\ln 2) - \ln \lambda}{\ln 10} \Rightarrow \\ \ln(\ln 2) - \ln \lambda &= a \ln 10 + \frac{b \ln 10}{\sqrt{K}} \Rightarrow \boxed{\ln \lambda \propto -\frac{1}{\sqrt{K}}}. \end{aligned}$$

Agora, retomando a probabilidade de transição (equação 4):

$$\Rightarrow \ln \lambda = f - \frac{gZ}{\sqrt{K}},$$

onde:

$$\boxed{f = \ln\left(\frac{v}{2R}\right) + 8\sqrt{\frac{mcZ\alpha R}{\hbar}}} \quad \text{e} \quad \boxed{g = 4\pi\alpha\sqrt{\frac{mc^2}{2}}}.$$

II. DECAIMENTO BETA

(1898) o decaimento β é descoberto por Rutherford.

Processos básicos:

$$\text{beta positivo } (\beta^+) : p \rightarrow n + e^+ + \nu;$$

$$\text{beta negativo } (\beta^-) : n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}.$$

Outros:

$$\text{captura eletrônica } (\varepsilon) : p + e^- \rightarrow n + \nu$$

$$\text{beta inverso : } \bar{\nu} + p \rightarrow n + e^+$$

$$\text{beta inverso : } \nu + n \rightarrow p + e^-$$

Exemplos:

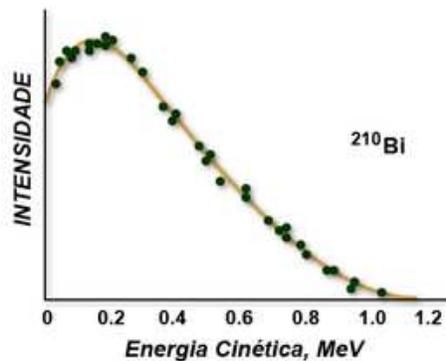
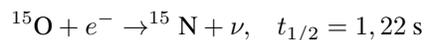
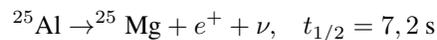
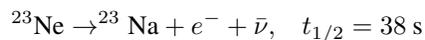
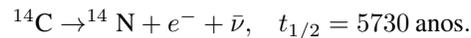


Figura 5: Decaimentos β do ^{210}Bi : espectro energético contínuo e com um valor de energia cinética máxima.

Na década de 1920: problema do espectro contínuo do decaimento β . Para onde vai a energia perdida? Por exemplo, no decaimento do ^{210}Bi , calculamos que as partículas β são emitidas com $0 < K < 1,16 \text{ MeV}$.^{1,2}

(1931) W. Pauli propôs a existência de uma partícula muito leve ainda não identificada, que ele chamou de *nêutron*; e declarou: “Eu fiz uma coisa muito ruim hoje propondo uma partícula que não pode ser detectada; é uma coisa que um teórico jamais deveria fazer”.

(1932) J. Chadwick descobre o *nêutron* e Pauli rebatiza a sua partícula de **neutrino**.

¹N. Bohr chegou a propor que se abandonasse a conservação de energia!

²Foram hipotetizadas também perdas de energia das partículas β em colisões com elétrons atômicos, mas medidas calorimétricas precisas excluíram tal possibilidade.

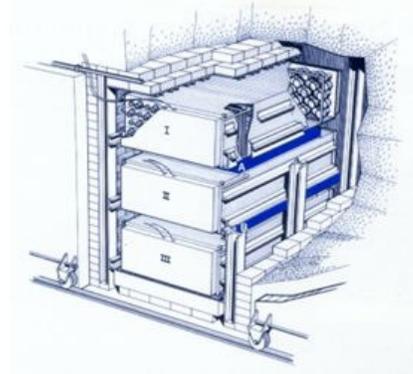
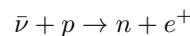


Figura 6: F. Reines e C. Cowen e a detecção do neutrino

(1956) O neutrino foi observado experimentalmente em por F. Reines e C. Cowen, através do decaimento β inverso:

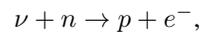


de antineutrinos emitidos por um reator nuclear (Savannah River, EUA). O fluxo produzido pelo reator era de $\sim 5 \times 10^{13} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$, suficiente para produzir cerca de 3 eventos por hora.

Telegrama enviado ao Pauli: “Estamos felizes em lhe informar que nós definitivamente detectamos neutrinos”.

O que diferencia: $\nu \times \bar{\nu}$?

Sabemos que o beta inverso é possível:



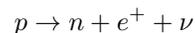
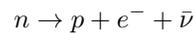
mas não se observa a reação com o antineutrino: $\bar{\nu} + n \not\rightarrow p + e^-.$

(1959) R. Davis e D.S. Harmer introduziram o *número leptônico*:

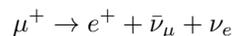
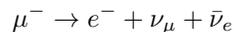
$$L = +1, \text{ para: } e^-, \mu^-, \nu;$$

$$L = -1, \text{ para: } e^+, \mu^+, \bar{\nu},$$

assim:

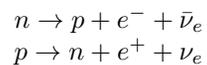


Ademais, os decaimentos dos múons:



indicam que, na verdade, existem, separadamente, o número leptônico eletrônico (L_e) e o número leptônico muônico (L_μ).

Assim, os decaimentos beta ficam:



A massa dos neutrinos não é determinada, de fato, por muito tempo especulou-se se seria zero, mas evidências³ de oscilações de sabor ($\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu, \nu_\tau$) indicam massas pequenas, mas não-nulas.

³SNO: Sudbury Neutrinos Observatory, Canadá.

A. A regra de ouro de Fermi

A regra de ouro de Fermi prevê a taxa na qual as transições ocorrem entre 2 estados quânticos, ou seja, através dela pode-se calcular a constante de decaimento λ . Um estado instável pode ser descrito pela adição de uma perturbação a um estado estacionário:

$$H = H_0 + V,$$

onde conhecemos as soluções do hamiltoniano não-perturbado:

$$H_0\psi_n = E_n\psi_n$$

e $\{\psi_n\}$ formam uma base completa de auto-funções. As soluções da equação de Schrödinger dependente do tempo podem ser expandidas nesta base:

$$\psi = \sum_n a_n(t)\psi_n e^{-iE_n t/\hbar}, \quad (6)$$

que, substituindo na equação de Schrödinger dependente do tempo (exercício 5-a), vem:

$$i\hbar \sum_n \dot{a}_n(t)\psi_n e^{-iE_n t/\hbar} = \sum_n V a_n(t)\psi_n e^{-iE_n t/\hbar} \quad (7)$$

Multiplicando-se pela esquerda por ψ_k^* e integrando em todo o espaço (exercício 5-b), vem:

$$\dot{a}_k(t) = -\frac{i}{\hbar} \sum_n a_n(t)V_{kn} e^{i(E_k - E_n)t/\hbar}, \quad (8)$$

onde $V_{kn} = \int \psi_k^* V \psi_n d^3r$ é o *elemento de matriz* da transição.

Seja uma pequena perturbação no intervalo $0 \leq t \leq T$, tal que a variação temporal de $a_k(t)$ é lenta: $a_k(t) \approx a_k(0)$. Assim, integrando-se neste intervalo, obtemos:

$$a_k(t) \approx -\frac{i}{\hbar} \sum_n a_n(0)V_{kn} \int_0^T e^{i(E_k - E_n)t/\hbar} dt = \sum_n a_n(0)V_{kn} \left[\frac{1 - e^{i(E_k - E_n)T/\hbar}}{E_k - E_n} \right].$$

Agora, por simplicidade, vamos preparar o estado inicial do sistema em um dado nível m : $\psi(t=0) = \psi_m$, de forma que $a_m(0) = 1$ e $a_n(0) = 0$, para todos $n \neq m$, então:

$$a_k(t) \approx V_{km} \left[\frac{1 - e^{i(E_k - E_m)T/\hbar}}{E_k - E_m} \right].$$

Com tais suposições, a razão $|a_k^*(t)a_k(t)|/T$ representa a probabilidade por unidade de tempo de encontrar o sistema no estado k durante o intervalo de tempo $0 \leq t \leq T$, isto é, a taxa para a transição $m \rightarrow k$. Somando-se sobre todos os estados diferentes do inicial, obtemos a constante de decaimento:

$$\lambda = \sum_{k \neq m} \lambda_k = \sum_{k \neq m} \frac{|a_k(t)|^2}{T} = \frac{4}{T} \sum_{k \neq m} |V_{km}|^2 \left[\frac{\sin((E_k - E_m)T/2\hbar)}{(E_k - E_m)} \right]^2. \quad (9)$$

Se houver um grande número de estados k disponíveis, podemos substituir: $\sum_k \rightarrow \int dE_k$. Definindo-se $\rho(E_k)$ como a densidade de estados em torno de E_k , vem:

$$\lambda = \frac{4}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |V_{km}|^2 \left[\frac{\sin((E_k - E_m)T/2\hbar)}{(E_k - E_m)} \right]^2 \rho(E_k) dE_k \approx \frac{4}{T} |V_{km}|^2 \rho(E_k) \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sin((E_k - E_m)T/2\hbar)}{(E_k - E_m)} \right]^2 dE_k,$$

onde a última aproximação vem do fato de que a função $\sin^2 x/x^2$ tem amplitude significativamente diferente de zero somente próximo à origem e da suposição de que os fatores V_{km} e $\rho(E_k)$ variam pouco em torno de E_k .

Usando, agora, que $\int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \alpha x/x^2 dx = \pi\alpha$, obtemos:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{km}|^2 \rho(E_k), \quad (10)$$

que é conhecida como *regra de ouro de Fermi* e permite que calculemos a constante de decaimento a partir das funções de onda dos estados inicial e final.

B. Teoria de Fermi

A teoria de Fermi para o decaimento β parte da teoria de perturbação e é uma aplicação imediata da regra de ouro:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{fi}|^2 \rho(E_f).$$

Para isso, vamos inicialmente, calcular a densidade de estados $\rho(E_f)$. Seja, então, um gás de Fermi de núcleons: livres no interior, mas confinados no núcleo, ou seja, ligados a um poço infinito tridimensional. Para simplificar⁴, vamos considerar um cubo de lado a . O gás de Fermi obedece à equação de Schrödinger da partícula livre no interior da cavidade, que, com as condições de contorno: $\psi(x, y, z) = 0$ em $x = 0, y = 0, z = 0$ e $x = a, y = a, z = a$, impõem que:

$$\psi(x, y, z) = A \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z),$$

onde $k_x a = n_x \pi, k_y a = n_y \pi$ e $k_z a = n_z \pi$.

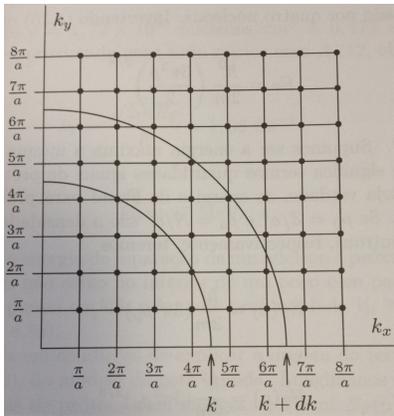


Figura 7: Estados permitidos no espaço $k_y \times k_x$.

O número de estados com magnitude $\vec{k} = \vec{p}/\hbar$ entre k e $k + dk$ (vide figura 7) é dado pela razão entre o volume do octante de uma casca esférica pelo volume de um cubo unitário $(\pi/a)^3$ no espaço de valores de k :

$$dn = \frac{1}{8} \frac{4\pi k^2 dk}{(\pi/a)^3} = \frac{4\pi a^3 p^2 dp}{h^3}.$$

⁴Os resultados são independentes dessa hipótese.

A matriz de interação para o decaimento β é dada por:

$$V_{fi} = \int \varphi_e^* \varphi_\nu^* \psi_f^* \hat{O} \psi_i d^3r,$$

onde ψ_i e ψ_f são as funções de onda do núcleo inicial e final normalizadas à unidade e φ_e e φ_ν as funções de onda, respectivamente, do elétron e do neutrino, normalizadas a um volume V :

$$\varphi_e = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}; \quad \varphi_\nu = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar},$$

onde p é o momento do elétron e q o momento do neutrino.

O número total de estados é:

$$dn = \rho dE_f = dn_e dn_\nu = \left(\frac{4\pi V p^2 dp}{h^3} \right) \left(\frac{4\pi V q^2 dq}{h^3} \right) = \frac{(4\pi)^2 V^2 p^2 dp q^2 dq}{h^6}.$$

Então:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \int e^{-i(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{r}/\hbar} \psi_f^* \hat{O} \psi_i d^3r \right|^2 \frac{(4\pi)^2 p^2 dp q^2 dq}{(2\pi\hbar)^6} \frac{dE_f}{dE_f} \approx \frac{g^2}{2\pi^3 \hbar^7} \left| \int \psi_f^* \psi_i d^3r \right|^2 p^2 dp q^2 \frac{dq}{dE_f},$$

onde expandimos a exponencial próximo à origem $e^{-i(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{r}/\hbar} \approx 1 - i(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{r}/\hbar \approx 1$ e o operador da interação foi tomado como a constante de acoplamento da interação fraca $\hat{O} = g$, que independe da posição (aproximação de interação local). A integral acima depende apenas das propriedades do núcleo, razão pela qual é chamada *elemento de matriz nuclear*:

$$M_{fi} = \int \psi_f^* \psi_i d^3r.$$

Queremos calcular o espectro de energia dos elétrons, assim podemos integrar em todos os valores possíveis de q . Desprezando-se o recuo do núcleo filho, o valor Q do decaimento β é dado pela soma das energias cinéticas do elétron e do neutrino:

$$Q = K_e + qc,$$

onde assumimos, para o neutrino: $E = \sqrt{m_\nu^2 c^4 + q^2 c^2} \approx qc$. Agora, a energia do estado final E_f é função de Q e termos constantes (como as massas de repouso), então:

$$dE_f = dQ = c dq \Rightarrow \frac{dq}{dE_f} = \frac{1}{c}.$$

Assim:

$$\lambda = \frac{g^2 |M_{fi}|^2}{2\pi^3 \hbar^7} \frac{(Q - K_e)^2}{c^3} p^2 dp.$$

Os efeitos do campo coulombiano na função de onda do elétron são dados, no limite não-relativístico, pela função de Fermi:

$$F(Z_f, p) \approx \frac{2\pi\eta}{1 - e^{-2\pi\eta}}, \quad \text{onde } \eta = \frac{Z_f e^2 m_e}{4\pi\epsilon_0 \hbar p}$$

e Z_f é o número atômico do núcleo filho.

Introduzindo a função de Fermi e integrando sobre todos os valores possíveis de p :

$$\lambda = \frac{g^2 |M_{fi}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} \int_0^{p_{max}} F(Z_f, p) (Q - K_e)^2 p^2 dp.$$

A energia máxima do elétron E_{max} é obtida quando a do neutrino é nula:

$$E_{max} = K_e^{max} + m_e c^2 = (Q - 0) + m_e c^2 \Rightarrow Q = E_{max} - m_e c^2.$$

Então, a diferença entre a energia máxima do elétron e uma outra qualquer:

$$E_{max} - E_e = E_{max} - m_e c^2 - K_e = Q - K_e.$$

Definimos a *integral de Fermi* por:

$$f(Z_f, E_{max}) = \frac{1}{m_e^5 c^7} \int_0^{p_{max}} F(Z_f, p) (E_{max} - E_e)^2 p^2 dp$$

e a constante de decaimento fica:

$$\lambda = \frac{g^2 m_e^5 c^4 |M_{fi}|^2}{2\pi^3 \hbar^7} f(Z_f, E_{max}).$$

Como $t_{1/2} = \ln 2 / \lambda$, o chamado *valor-ft* é:

$$f(Z_f, E_{max}) t_{1/2} = \frac{2\pi^3 \hbar^7 \ln 2}{g^2 m_e^5 c^4 |M_{fi}|^2}.$$

III. EXERCÍCIOS

1. (a) Mostre que a distância a partir da superfície do núcleo em que a partícula α está livre é:

$$b = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{K},$$

onde K é a energia cinética da partícula α ;

- (b) Mostre que esta distância deve ser maior que ~ 40 fm.

2. Mostre que, para uma barreira de potencial retangular de largura t e altura U , a probabilidade de tunelamento de uma partícula de energia cinética K é:

$$T = \left| \frac{F}{A} \right|^2 = \frac{4K(U - K)}{4K(U - K) + U^2 \sinh^2(\rho t)}$$

3. Demonstre que a equação 2 leva à equação 3.

Dicas: $v = \sqrt{2K/m}$, $b = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{K}$ e $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = \alpha\hbar c$, onde α é a constante de estrutura fina.

4. Seja uma partícula α que se choca contra a barreira de potencial, localizada a uma distância radial de ~ 10 fm, com uma frequência de 10^{21} s^{-1} .

(a) Estime a velocidade da partícula α e sua energia cinética (em MeV);

(b) Se o núcleo correspondente for de urânio, qual será sua meia vida pela fórmula de Geiger-Nuttal?

5. (a) Mostre que, para um potencial perturbativo $H = H_0 + V$ e um conjunto completo de soluções de $H_0\psi_n = E_n\psi_n$, a expansão 6 na equação de Schrödinger dependente do tempo leva à equação 7;

(b) Usando a relação de ortogonalização, mostre a equação 8 a partir da equação 7;

(c) Demonstre a última igualdade da equação 9.