

## Notas de Aula de Introdução à Física Nuclear (NHZ3026)

Prof. Dr. Marcelo Augusto Leigui de Oliveira  
 Centro de Ciências Naturais e Humanas (CCNH)  
 Universidade Federal do ABC (UFABC)  
 Santo André - SP

### AULA #12: TEORIA QUÂNTICA DOS DECAIMENTOS - II

#### I. DECAIMENTO GAMA

(1900) descoberta por Paul Villard e em (1903) nomeada por Rutherford.

Raios  $\gamma$  são radiações eletromagnéticas (fótons com  $f > 10^{19}$  Hz,  $\lambda < 10^{-11}$  m,  $E > 10^2$  keV) emitidas por núcleos excitados. Quando alguma regra de seleção impede que um decaimento prévio vá diretamente ao estado fundamental, resta um núcleo filho em um estado excitado metaestável, ou *isômero* (vide figura 1-(b)). Processos como a captura de nêutrons pode produzir estados excitados de  $E = 7$  a 8 MeV.

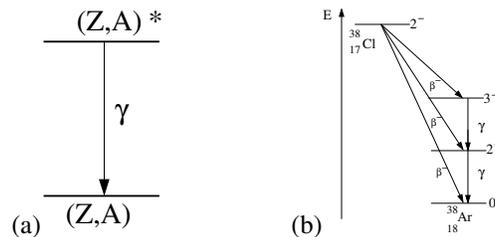


Figura 1: Decaimentos  $\gamma$ : (a) genérico; (b) sucedendo decaimentos  $\beta$  do  $^{38}\text{Cl}$ .

#### A. Regras de seleção

As taxas de transição ( $\lambda = \tau^{-1}$ ) podem ser calculadas pelo modelo de camadas e as radiações são consequência de oscilações multipolares:

L	Transição	$E_\gamma = 10 \text{ MeV}$	$E_\gamma = 1 \text{ MeV}$	$E_\gamma = 0,1 \text{ MeV}$	Proporcionalidade
1	Dipolo elétrico	$2 \cdot 10^{18}$	$2 \cdot 10^{15}$	$2 \cdot 10^{12}$	$\propto E^3$
1	Dipolo magnético	$2 \cdot 10^{16}$	$2 \cdot 10^{13}$	$2 \cdot 10^{10}$	$\propto E^3$
2	Quadrupolo elétrico	$10^{16}$	$10^{11}$	$10^6$	$\propto E^5$
2	Quadrupolo magnético	$10^{14}$	$10^9$	$10^4$	$\propto E^5$
3	Octupolo elétrico	$10^{13}$	$10^6$	$10^{-1}$	$\propto E^7$
3	Octupolo magnético	$10^{11}$	$10^4$	$10^{-3}$	$\propto E^7$

Tabela 1

Cálculos de Weisskopf para as taxas de transição ( $[\lambda] = \text{s}^{-1}$ ).

Da mecânica quântica:

$$\lambda = \frac{P}{\hbar\omega} = \frac{2(L+1)}{\epsilon_0 \hbar L [(2L+1)!!]^2} \left(\frac{E}{\hbar c}\right)^{(2L+1)} \left[ \int \psi_f^* m(L) \psi_i df \right]^2,$$

onde o elemento de matriz do operador multipolar é:

$$m_{fi} = \int \psi_f^* m(L) \psi_i df \propto \begin{cases} \int \psi_f^* x \psi_i df & , \text{ para o dipolo elétrico} \\ \int \psi_f^* L_x \psi_i df & , \text{ para o dipolo magnético} \\ \int \psi_f^* x^2 \psi_i df & , \text{ para o quadrupolo elétrico} \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Calculando-se os  $\lambda$ s:

$L$	Transição elétrica	Transição magnética
1	$1,0 \cdot 10^{14} A^{2/3} E^3$	$5,6 \cdot 10^{13} E^3$
2	$7,3 \cdot 10^7 A^{4/3} E^5$	$3,5 \cdot 10^7 A^{2/3} E^5$
3	$34 \cdot A^2 E^7$	$16 \cdot A^{4/3} E^7$
4	$1,1 \cdot 10^{-5} A^{8/3} E^9$	$4,5 \cdot 10^{-6} A^2 E^9$

onde  $[\lambda] = s^{-1}$  e  $[E] = \text{MeV}$ .

### B. Paridade

Sejam os dipolos elétrico e magnético representados na figura 3. Em ambos os casos, temos, passando pelos circuitos, correntes que variam com frequência angular  $\omega$ .

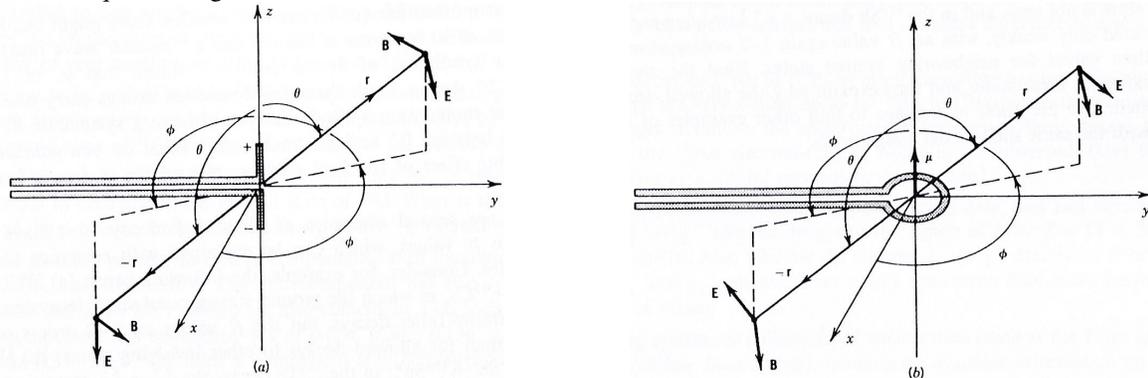


Figura 2: Campos elétrico e magnético de dipolos ( $L=1$ ), nos casos: (a) elétrico; (b) magnético.

$$\begin{aligned} \text{(a) dipolo elétrico:} \quad & \vec{B}(-\vec{r}) = -\vec{B}(\vec{r}) \Rightarrow \Pi = - \\ \text{(b) dipolo magnético:} \quad & \vec{E}(-\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) \Rightarrow \Pi = + \end{aligned}$$

Verifica-se, mais detalhadamente, que:

$$\begin{aligned} \Pi_E(L) &= (-1)^L; \\ \Pi_M(L) &= (-1)^{L+1}. \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}
 L = 1 &\Rightarrow \Pi_E = -1 \rightarrow \text{mudança de paridade} \\
 &\Rightarrow \Pi_M = +1 \rightarrow \text{conservação de paridade} \\
 L = 2 &\Rightarrow \Pi_E = +1 \rightarrow \text{conservação de paridade} \\
 &\Rightarrow \Pi_M = -1 \rightarrow \text{mudança de paridade} \\
 &\text{etc.}
 \end{aligned}$$

Assim:

se  $\Delta\Pi = 0$  : elétrica com  $L$  par ou magnética com  $L$  ímpar;

se  $\Delta\Pi \neq 0$  : elétrica com  $L$  ímpar ou magnética com  $L$  par.

Consideremos a transição:  $|i\rangle \xrightarrow{\gamma} |f\rangle$ , que leva de um estado com momento angular  $\vec{I}_i$  para  $\vec{I}_f$  e de paridade  $\Pi_i$  para  $\Pi_f$ :

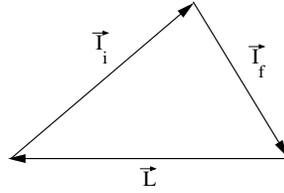


Figura 3: Triângulo fechado de vetores de momento angular, representando a soma:  $\vec{I}_i = \vec{L} + \vec{I}_f$ .

Como  $\vec{I}_i = \vec{L} + \vec{I}_f$ , os possíveis valores de  $\vec{L}$  são restritos ao intervalo:

$$|I_i - I_f| \leq L \leq I_i + I_f \text{ (exceto para } L = 0\text{)}.$$

Por exemplo, se  $I_i = 3/2$  e  $I_f = 5/2$ :

$$\left. \begin{aligned}
 3/2 + 5/2 = 4 \\
 |3/2 - 5/2| = 1
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow L = 1, 2, 3, 4.$$

e o campo de radiação será uma mistura de dipolo, quadrupolo, octupolo e hexadecapolo.

Então, podemos estabelecer as seguintes *regras de seleção* :

$$\text{se a transição for: } \left\{ \begin{aligned}
 3/2^+ \rightarrow 5/2^+ &: \text{dipolo magnético, quadrupolo elétrico, ...} \\
 3/2^+ \rightarrow 5/2^- &: \text{dipolo elétrico, quadrupolo magnético, ...}
 \end{aligned} \right.$$

### C. Dinâmica

Seja uma emissão  $\gamma$  de um núcleo em um estado inicial de energia  $E_i$  para um estado final de energia  $E_f$ . Se o núcleo pai estava inicialmente em repouso, pela conservação de momento linear, o núcleo filho deve ter  $\vec{p}_f = -\vec{p}_\gamma$ . Assumindo o caso não-relativístico ( $K = p^2/2m$ ) e lembrando que  $E_\gamma = cp_\gamma$ :

$$\Delta E = E_i - E_f = E_\gamma + K_f = E_\gamma + \frac{p_\gamma^2}{2m_f} \Rightarrow$$

$$\Delta E = E_\gamma + \frac{E_\gamma^2}{2m_f c^2} \Rightarrow E_\gamma = m_f c^2 \left[ -1 \pm \sqrt{1 + 2 \frac{\Delta E}{m_f c^2}} \right].$$

Verifica-se que  $\Delta E \sim \text{MeV}$ , enquanto que  $m_f c^2 \sim A \times 10^3 \text{ MeV}$ , isto é,  $\Delta E \ll m_f c^2$ . Então, expandindo-se a raiz quadrada até o terceiro termo<sup>1</sup> e desprezando-se a solução inteiramente negativa para  $E_\gamma$ , vem:

$$E_\gamma \approx \Delta E - \frac{(\Delta E)^2}{2m_f c^2}. \quad (1)$$

Assim, a energia do fóton é diminuída pela energia de recuo do núcleo filho por um fator de  $\sim 10^{-5}$ . Por exemplo, para raios  $\gamma$  de altas energias ( $E_\gamma \sim 10 \text{ MeV}$ ), o recuo do núcleo é  $\sim 100 \text{ eV}$ , suficiente para causar *danos de radiação* em sólidos. Há um caso em que este recuo assume um papel importante: no *efeito Mössbauer*, que veremos adiante.

#### D. Conversão interna

A *conversão interna* é um processo em que a desexcitação do núcleo ocorre através da emissão de um elétron atômico. Não se trata de uma forma de efeito fotoelétrico, com um raio  $\gamma$  prévio arrancando o elétron, mas de uma interação direta do elétron com o campo elétrico do núcleo, que diretamente transfere sua excitação ao elétron. O elétron é emitido com energia cinética:

$$K_e = \Delta E - B_e, \quad (2)$$

onde  $B_e$  é a energia de ligação do elétron e desprezamos a pequena energia de recuo do núcleo.

Normalmente, são detectados os elétrons de conversão interna juntamente com os elétrons de um decaimento  $\beta$  prévio. Por exemplo, um elemento Y, emissor de  $\beta$ , deixa seu núcleo filho em um estado excitado e este, por sua vez, libera sua energia extra emitindo um elétron por conversão interna. Veja o diagrama e o espectro da figura 4.

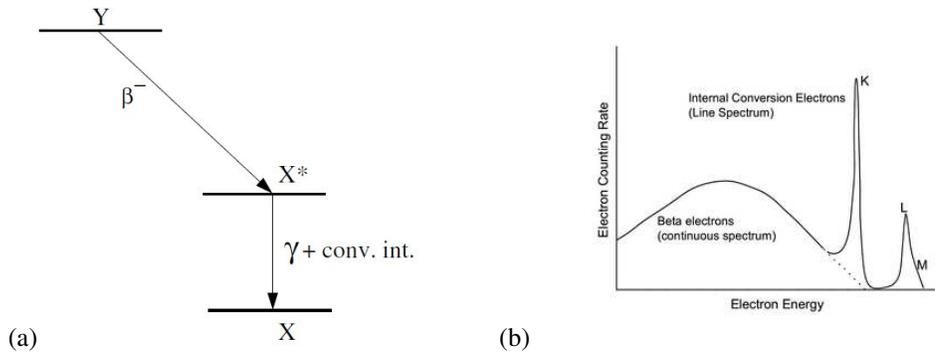


Figura 4: (a) núcleo Y decaindo em um estado excitado do núcleo X que pode decair por  $\gamma$  ou conversão interna; (b) espectro de elétrons de uma fonte emissora de radiação  $\beta$ : espectros discreto (conversão interna) e contínuo ( $\beta$ ).

<sup>1</sup> $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$

A dupla forma de decaimentos de um estado excitado faz com que haja uma competição probabilística entre eles, assim a constante de decaimento total será a soma das constantes de decaimento de cada modo:

$$\begin{aligned}\lambda_T &= \lambda_\gamma + \lambda_e = \\ &= \lambda_\gamma(1 + \lambda_e/\lambda_\gamma) \equiv \lambda_\gamma(1 + \alpha),\end{aligned}\quad (3)$$

onde definimos o *coeficiente de conversão interna*  $\alpha \equiv \lambda_e/\lambda_\gamma$ . Em cada camada eletrônica pode-se ter um coeficiente diferente, de forma que:

$$\lambda_T = \lambda_\gamma(1 + \alpha_K + \alpha_L + \alpha_M + \dots).\quad (4)$$

(1952) Blatt e Weisskopf demonstraram que os coeficientes de conversão interna para transições elétricas e magnéticas são, respectivamente:

$$\begin{aligned}\alpha(E) &\approx \frac{Z^3}{n^3} \left( \frac{L}{L+1} \right) \left( \frac{e^2}{\hbar c} \right)^4 \left( \frac{2m_e c^2}{E} \right)^{L+\frac{5}{2}}, \\ \alpha(M) &\approx \frac{Z^3}{n^3} \left( \frac{e^2}{\hbar c} \right)^4 \left( \frac{2m_e c^2}{E} \right)^{L+\frac{3}{2}},\end{aligned}$$

onde  $Z$  é o número atômico,  $n$  o número quântico principal ( $n = 1$  para a camada K,  $n = 2$  para a camada L, ...),  $L$  é a ordem da transição e  $E$  a energia disponível (desprezando-se o recuo do núcleo). Note que a conversão interna é mais provável para núcleos pesados ( $\propto Z^3$ ), para camadas mais próximas ao núcleo ( $\propto n^{-3}$ ) e para pequenas energias de desexcitação com altas multipolaridades ( $\propto E^{-L}$ ) — veja o gráfico da figura 5. Tais conclusões são confirmadas experimentalmente.

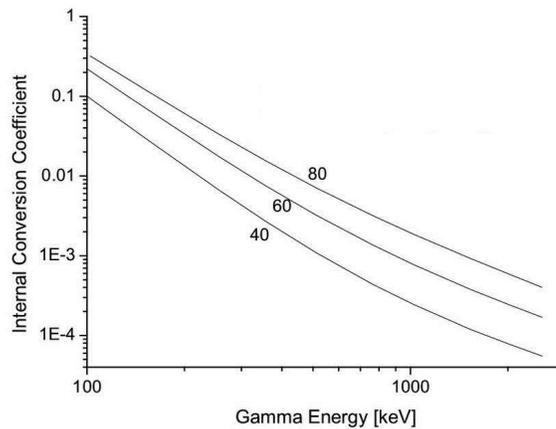


Figura 5: Coeficientes de conversão interna em função da energia para as transições de dipolo elétrico para 3 elementos ( ${}_{40}\text{Zr}$ ,  ${}_{60}\text{Nd}$  e  ${}_{80}\text{Hg}$ ).

Não existe radiação multipolar de ordem zero ( $L = 0$ ), então, somente a conversão interna é capaz de promover a transição  $0^+ \rightarrow 0^+$ .

### E. O efeito Mössbauer

O efeito inverso da emissão é a absorção de um raio  $\gamma$ , o núcleo no estado fundamental absorve um fóton de energia  $E_\gamma$  e sobe para um estado excitado. Mas, a variação da energia do núcleo é menor que a energia do raio  $\gamma$ , devido ao recuo sofrido pelo núcleo que absorve a radiação. Utilizando-se um procedimento similar (exercício 2) ao da obtenção da equação 1, temos:

$$\Delta E = E_\gamma - \frac{E_\gamma^2}{2mc^2}, \quad (5)$$

onde o último termo é a energia de recuo  $E_R = E_\gamma^2/2mc^2$ .

(1958) Mössbauer utilizou-se deste efeito para construir um espectrômetro de altíssima resolução: o material absorvedor da radiação  $\gamma$  vibra como um todo, devido ao recuo do núcleo, e esta vibração pode ser medida.

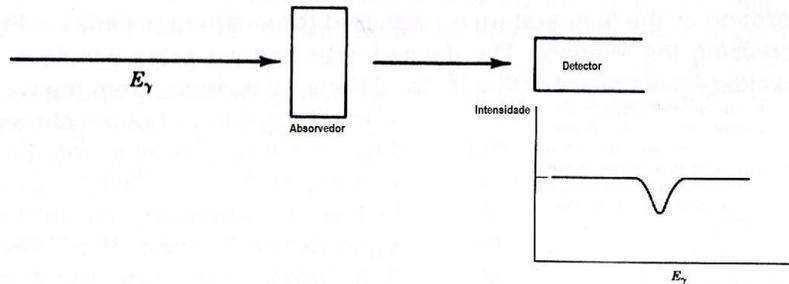


Figura 6: Esquema de um experimento para observar a absorção ressonante pelos núcleos.

### F. Largura de um estado excitado

Sabemos que, se um núcleo encontra-se em um estado excitado, a emissão de radiação ( $\gamma$ , vamos supor), ocorre dentro de uma vida média, de acordo com o princípio da incerteza:

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar \Rightarrow \Gamma \cdot \tau \sim \hbar \Rightarrow \Gamma = \frac{\hbar}{\tau},$$

onde  $\tau$  é a vida média do estado excitado e  $\Gamma$  é a largura da distribuição de energia das emissões (vide figura 7).

A seção de choque destas absorções ressonantes segue a fórmula:

$$\sigma(E_\gamma) = \sigma_0 \frac{(\Gamma/2)^2}{[E_\gamma - (\Delta E + E_R)]^2 + (\Gamma/2)^2}.$$

Vemos que a energia de recuo  $E_R$  faz com que a ressonância se desvie do valor esperado  $E_\gamma = \Delta E$ .

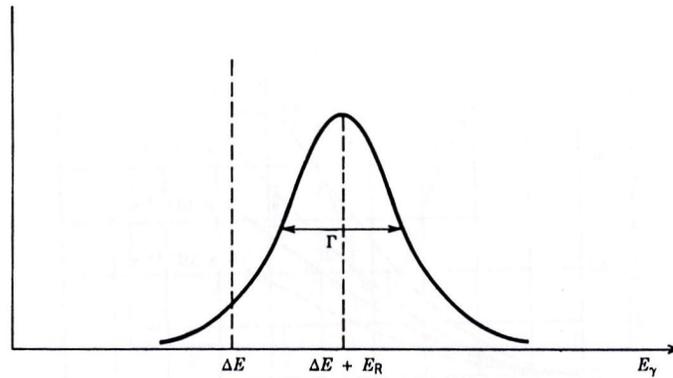


Figura 7: Distribuição de energia das emissões de um estado excitado com vida média:  $\tau = \hbar/\Gamma$ .

## II. EXERCÍCIOS

1. Para as seguintes transições  $\gamma$ , encontre todos os multipolos permitidos:

(a)  $\frac{1}{2}^- \rightarrow \frac{7}{2}^+$

(b)  $\frac{9}{2}^- \rightarrow \frac{7}{2}^+$

(c)  $1^- \rightarrow 2^+$

(c)  $3^+ \rightarrow 3^+$

2. Demonstre a equação 5 para o efeito Mössbauer.

3. Mössbauer usou  $^{191}\text{Ir}$ , cujo primeiro estado excitado é de 0,129 MeV com vida média de  $1,4 \cdot 10^{-10}\text{s}$ :

(a) Calcule a energia de recuo do irídio no espectrômetro de Mössbauer;

(b) Calcule a largura  $\Gamma$ ;

(c) Estime a resolução obtida em suas medidas;

(d) Mostre que, para os eventos em que  $E_\gamma = \Delta E$ :

$$\sigma(E_\gamma) = \frac{\sigma_0}{1 + (2E_R/\Gamma)^2}$$

e estime a razão das ocorrências destes eventos com relação aos da máxima probabilidade ( $\sigma/\sigma_0$ ) para o isótopo considerado do irídio.