

Notas de Aula de Introdução à Física Nuclear (NHZ3026)

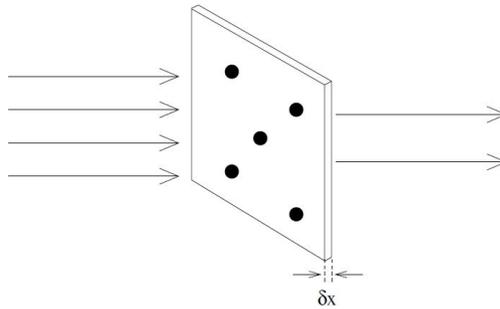
Prof. Dr. Marcelo Augusto Leigui de Oliveira
 Centro de Ciências Naturais e Humanas (CCNH)
 Universidade Federal do ABC (UFABC)
 Santo André - SP

AULA #15: INTERAÇÕES DAS RADIAÇÕES COM A MATÉRIA - I

I. INTRODUÇÃO

A. Probabilidades de interação e de sobrevivência

Seja uma fina placa de material espalhador com densidade volumétrica ρ , área A e espessura δx . Então, num dado volume da placa, $\rho A \delta x$ é o número de centros espalhadores.



O fluxo de partículas (por unidade de tempo) espalhadas numa direção qualquer é:

$$\phi = F\sigma(\rho A \delta x),$$

onde $F = d^2N/dA dt$ é o fluxo por unidade de área por unidade de tempo de partículas que atravessam a superfície de alvos e σ é a seção de choque total. Assim, a razão:

$$\frac{\phi}{FA} = \rho\sigma\delta x$$

é uma medida da probabilidade da interação ocorrer em δx (ou entre x e $x + \delta x$). Então, $P(x) = (1 - \rho\sigma\delta x)$ é a *probabilidade de sobrevivência* após percorrida uma distância δx a partir da posição x . Assim, percorrida uma distância δx a partir de $x + \delta x$:

$$P(x + \delta x) = P(x)(1 - \rho\sigma\delta x),$$

onde temos a probabilidade de sobrevivência até x vezes a probabilidade de sobrevivência até $x + \delta x$.

Do diferencial de P (em primeira ordem) encontramos a equação diferencial:

$$dP(x) = P(x + \delta x) - P(x) = -P(x)\rho\sigma\delta x \Rightarrow \frac{dP(x)}{P(x)} = -\rho\sigma\delta x,$$

cujas integração dá:

$$\frac{dP}{P} = -\rho\sigma\delta x \Rightarrow \int_{P_0}^{P(x)} \frac{dP}{P} = -\rho\sigma \int_0^x \delta x \Rightarrow \ln \left[\frac{P(x)}{P_0} \right] = -\rho\sigma x \Rightarrow P(x) = P_0 e^{-\rho\sigma x}.$$

Convencionando-se $P_0 \equiv 1$, temos que a **probabilidade de sobrevivência** após percorrida uma distância x é:

$$P(x) = e^{-\rho\sigma x}$$

e, por conseguinte, a **probabilidade de interação** após percorrida uma distância x é:

$$P_{int}(x) = 1 - e^{-\rho\sigma x}.$$

B. Livre caminho médio

Define-se o *livre caminho médio* como a distância média percorrida por uma partícula sem interagir. Pode ser calculado pela média ponderada das distâncias percorridas, cujos pesos são as probabilidades de sobrevivência:

$$\lambda = \frac{\int_0^\infty xP(x)dx}{\int_0^\infty P(x)dx},$$

onde verifica-se que a integral do numerador é proporcional à do denominador:

$$\int_0^\infty xP(x)dx = \int_0^\infty xe^{-\rho\sigma x}dx = \frac{xe^{-\rho\sigma x}}{-\rho\sigma} \Big|_0^\infty + \frac{1}{\rho\sigma} \int_0^\infty e^{-\rho\sigma x}dx = \frac{1}{\rho\sigma} \int_0^\infty P(x)dx.$$

Então, o livre caminho médio fica dado por:

$$\lambda = \frac{1}{\rho\sigma}.$$

C. Espessura mássica

Para um material com densidade de massa ρ e uma espessura δx :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{A \delta x} \Rightarrow \rho \cdot \delta x = \frac{m}{A}.$$

De onde define-se a *espessura mássica* pelo produto:

$$t \equiv \rho \cdot \delta x.$$

Esta grandeza tem dimensão de densidade superficial — para a qual adotaremos g/cm^2 —, mas deve ser entendida como uma distância percorrida no meio. No decorrer de espessura mássica de 1 g/cm^2 a partícula percorre a distância de ρ^{-1} em centímetros. Por exemplo, na atmosfera, cuja densidade varia com a altitude:

altitude	ρ/ρ_0	1 g/cm^2
nível do mar	1	8,2 m
1 km	0,9075	9,0 m
10 km	0,3376	24,2 m
40 km	0,003262	2502 m

Já na água, 1 g/cm^2 corresponde a 1 cm e no chumbo, corresponde a 0,879 mm.

II. INTERAÇÕES COM PARTÍCULAS CARREGADAS

A. Poder de freiamento

Consideremos, inicialmente, partículas bem mais pesadas que os elétrons: p , n , α ou núcleos mais pesados (A, Z), além de μ , π , K , ... Ao atravessar a matéria, tais partículas sofrem deflexões e perdem energia devido a colisões inelásticas com os elétrons atômicos ou colisões elásticas com os núcleos. Apesar da seção de choque para colisões inelásticas ser muito pequena ($\sigma \sim 10^{-16} \text{ cm}^2$), há um número muito grande de colisões, por exemplo: um próton de 10 MeV deposita toda sua energia em 0,25 mm de cobre. Durante as colisões emitem radiação síncrotron, Cherenkov ou podem provocar reações nucleares. Se uma colisão provocar somente a excitações ela é chamada de *colisão mole*, agora se provocar ionização, é chamada de *colisão dura*.

1) Caso clássico de Bohr

Vamos calcular o *poder de freiamento*, ou o depósito de energia por unidade de caminho percorrido (dE/dx).

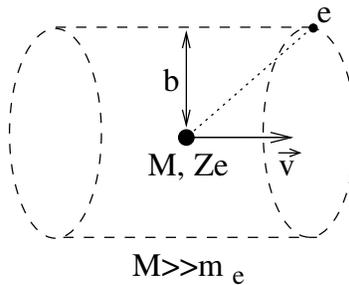


Figura 1: Cálculo de Bohr para o poder de freiamento.

Impulso recebido pelo elétron:

$$I = \int F dt = e \int E_{\perp} dt = e \int E_{\perp} \frac{dt}{dx} dx = e \int \frac{E_{\perp}}{v} dx = \frac{e}{v} \int E_{\perp} dx.$$

Aplicando-se a lei de Gauss¹:

$$\int E_{\perp} 2\pi b dx = 4\pi Ze \Rightarrow \int E_{\perp} dx = \frac{2Ze}{b} \Rightarrow \boxed{I = \frac{2Ze^2}{vb}}.$$

Então, a energia ganha pelo elétron é:

$$\Delta E = \frac{(\Delta p)^2}{2m_e} = \frac{I^2}{2m_e} = \frac{4Z^2 e^4}{2m_e v^2 b^2} = \frac{2Z^2 e^4}{m_e v^2 b^2}$$

que, portanto, é uma função (inversamente proporcional ao quadrado) do parâmetro de impacto b . Podemos imaginar, agora, uma casca cilíndrica infinitesimal entre b e $b + db$, contendo um número de elétrons $N_e = \rho_e \cdot dV$.

¹No sistema gaussiano: $\int E_n dA = 4\pi q$.

Assim, a energia perdida para os elétrons nessa casca é:

$$-dE = \Delta E(b)\rho_e dV = \Delta E(b)\rho_e 2\pi b db dx = \left(\frac{2Z^2 e^4}{m_e v^2 b^2} \right) \rho_e 2\pi b db dx \Rightarrow$$

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi Z^2 e^4 \rho_e}{m_e v^2} \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{db}{b} = \frac{4\pi Z^2 e^4 \rho_e}{m_e v^2} \ln \left(\frac{b_{max}}{b_{min}} \right),$$

onde a integração deve ser feita entre 2 limites arbitrários, pois nem $b \rightarrow 0$ (b no denominador) ou $b \rightarrow \infty$ (tempo muito longo para ter um impulso) são válidos.

Cálculo do b_{min} :

A máxima transferência de energia se dá para a colisão frontal. Classicamente, é fácil ver que para uma colisão elástica:

$$\Delta E_{max} = \frac{1}{2} m_e (2v)^2,$$

mas a fórmula relativística é:

$$\Delta E_{max} = 2\gamma^2 m_e v^2,$$

então:

$$\Delta E_{max} = \frac{2Z^2 e^4}{m_e v^2 b_{min}^2} = 2\gamma^2 m_e v^2 \Rightarrow b_{min} = \frac{Ze^2}{\gamma m_e v^2}.$$

Cálculo do b_{max} :

Para calcular o b_{max} , tomemos, inicialmente, o tempo que leva para a partícula percorrer a distância b , isto é, $t \approx b/v$. No referencial da partícula, este tempo estará contraído pelo fator de Lorentz: $t' \approx b/\gamma v$, que não pode ser maior que o período médio de oscilação T_{med} dos elétrons ligados, caso contrário, a perturbação será adiabática (muito lenta) e não haverá transferência de energia:

$$\frac{b_{max}}{\gamma v} \leq T_{med} = \frac{1}{f_{med}} \Rightarrow b_{max} = \frac{\gamma v}{f_{med}},$$

onde f_{med} é a frequência média de oscilação dos elétrons ligados.

Conclusão:

Então, a fórmula clássica para o poder de freiamto (ou *fórmula de Bohr*) é:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi Z^2 e^4 \rho_e}{m_e v^2} \ln \left(\frac{\gamma^2 m_e v^3}{Ze^2 f_{med}} \right) \Rightarrow \boxed{-\frac{dE}{dx} = \frac{2\pi \rho_e (Ze^2)^2}{m_e v^2 / 2} \ln \left(\frac{\gamma^2 m_e v^3}{Ze^2 f_{med}} \right)},$$

que é uma boa aproximação para α ou núcleos mais pesados (A, Z), mas não para μ, π, p ou n , pois não considera efeitos quânticos.

2) Cálculo quântico-relativístico

(1932) Hans Bethe deduz da eletrodinâmica quântica:

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi N_A r_e^2 m_e c^2 \rho \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta^2} \left[\ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 W_{max}}{I^2} \right) - 2\beta^2 \right],$$

conhecida como fórmula de Bethe-Bloch, onde:

constantes: $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, $r_e = 2,817 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$, $m_e = 9,11 \cdot 10^{-28} \text{ g}$, $c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$;
 $\Rightarrow 2\pi N_A r_e^2 m_e c^2 = 0,1535 \text{ MeV} \cdot \text{cm}^2/\text{g}$ (vide exercício 3);
 parâmetros do material: Z, A, I (potencial de ionização médio), ρ ;
 parâmetros da partícula incidente: $z, \beta = v/c, \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$;
 $W_{max} = 2\gamma^2 m_e v^2$ (fórmula relativística para a máxima energia transferida por colisão).

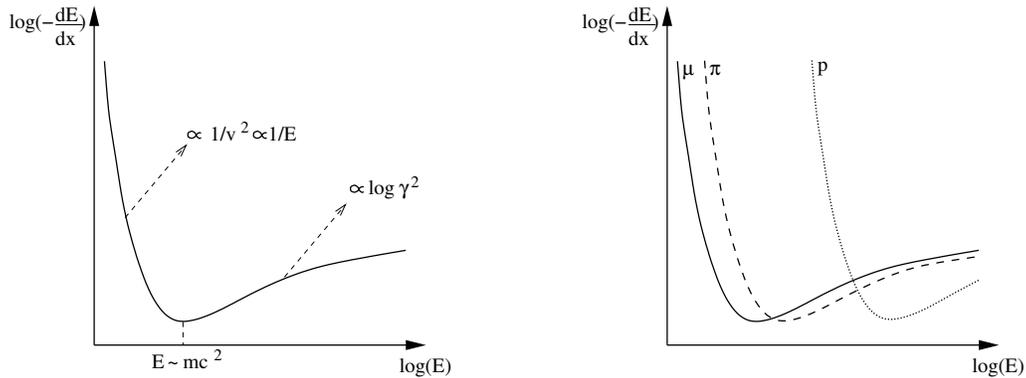


Figura 2: Poder de freiamento pela fórmula de Bethe e Bloch.

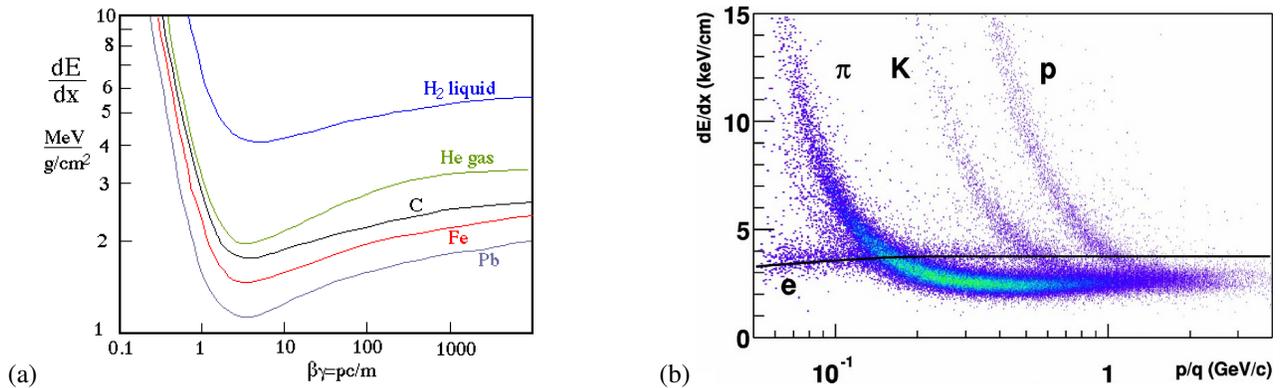


Figura 3: Poder de freiamento: (a) para múons em diferentes materiais; (b) para diferentes partículas em um gás.

(1964) Berger e Seltzer introduziram a *correção de densidade*:

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi N_A r_e^2 m_e c^2 \rho \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta^2} \left[\ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 W_{max}}{I^2} \right) - 2\beta^2 - \delta \right]$$

A fórmula de Bethe e Bloch é válida para: μ , π , p , n , α ou núclídeos (A , Z) mais pesados.

3) Elétrons e pósitrons

Para elétrons e pósitrons, o cálculo quântico-relativístico resulta em:

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi N_A r_e^2 m_e c^2 \rho \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\ln \left(\frac{\tau^2(\tau+2)}{2(I/m_e c^2)^2} \right) + F(\tau) - \delta \right],$$

onde τ é a razão energia cinética dos elétrons (ou pósitrons), K_e , pela energia de repouso, $m_e c^2$, e a função $F(\tau)$ é:

$$F(\tau) = 1 - \beta^2 + \frac{\tau^2/8 - (2\tau+1)\ln 2}{(\tau+1)^2}, \text{ para } e^-;$$

$$F(\tau) = 2 \ln 2 - \frac{\beta^2}{12} \left(23 + \frac{14}{(\tau+2)} + \frac{10}{(\tau+2)^2} + \frac{4}{(\tau+2)^3} \right), \text{ para } e^+.$$

4) Regra de Bragg

O poder de freiamto é usualmente medido nas unidades $\left[\frac{dE}{dx} \right] = \text{MeV/cm}$. Mas, pelas fórmulas, ele é um valor proporcional à densidade do meio absorvedor. Agora, pode-se definir também um valor normalizado pela densidade, ou o *poder de freiamto mássico* por:

$$-\frac{dE}{d\epsilon} = -\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx},$$

que é medido nas unidades:

$$\left[\frac{dE}{d\epsilon} \right] = \frac{\text{MeV}}{\text{g/cm}^2}$$

A *regra de Bragg* utiliza-se do poder de freiamto mássico para tratar compostos e misturas, através da ponderação:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} = \frac{w_1}{\rho_1} \left(\frac{dE}{dx} \right)_1 + \frac{w_2}{\rho_2} \left(\frac{dE}{dx} \right)_2 + \dots,$$

onde os fatores de peso w_i são calculados, elemento por elemento:

$$w_i = \frac{a_i A_i}{\sum_i a_i A_i},$$

onde a_i é o número de átomos do elemento i na molécula e A_i é o número de massa do elemento i .

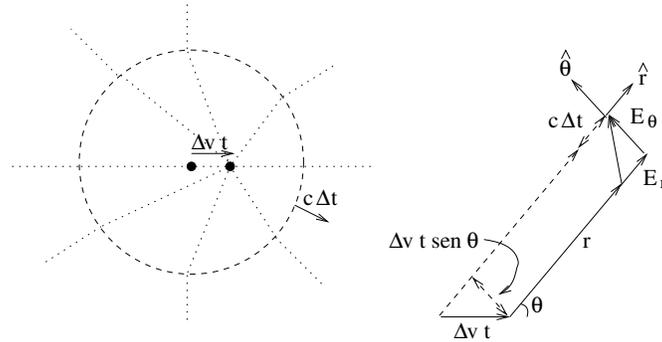


Figura 4: Método de Thomson (referencial próprio da velocidade inicial).

B. Bremsstrahlung

Perdas de energia por emissão de radiação devido a aceleração de partículas carregadas. Vamos utilizar o método de Thomson para encontrar a potência emitida devido à aceleração de partículas carregadas, isto é, observar o fenômeno no referencial próprio inicial da partícula. Inicialmente a partícula possui seu conjunto de linhas de campo elétrico, mas, ao ser acelerada, há uma descontinuidade das linhas de campo que se propaga a velocidade c :

Considerando Δt o intervalo de tempo da aceleração e t o tempo passado após o início da aceleração:

$$\frac{E_\theta}{E_r} = \frac{\Delta v t \sin\theta}{c \Delta t}, \quad E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad r = ct$$

$$\Rightarrow E_\theta = \frac{q(\Delta v/\Delta t)\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin\theta}{c^2} \frac{\ddot{r}}{r} = \frac{\ddot{p} \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r},$$

onde introduzimos, na última passagem, o momento de dipolo $p = qr$.

O fluxo de energia por unidade de área por unidade de tempo é dado pelo vetor de Poynting:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{E^2}{\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} \hat{k}$$

Então, a potência perdida pela área $r^2 d\Omega$ é:

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right) r^2 d\Omega = \frac{|\ddot{p}|^2 \sin^2\theta}{16\pi^2 \epsilon_0 \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} c^4} \frac{r^2 d\Omega}{r^2}$$

e para r unitário:

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right) d\Omega = \frac{|\ddot{p}|^2 \sin^2\theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} d\Omega \Rightarrow -\left(\frac{dE}{dt}\right) = \int_0^\pi \frac{|\ddot{p}|^2 \sin^2\theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} 2\pi \sin\theta d\theta \Rightarrow$$

$$\boxed{-\left(\frac{dE}{dt}\right) = \frac{|\ddot{p}|^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}},$$

que é conhecida como *fórmula da Larmor*.

1) Cálculo quântico-relativístico

(1934) fórmula de Bethe e Heitler:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4Z(Z+1) N_A \alpha^3 (\hbar c)^2}{A (m_e c^2)^2} E \ln \left(\frac{183}{Z^{1/3}} \right) \equiv \frac{E}{x_0},$$

onde x_0 é o comprimento de radiação. Resolvendo a equação diferencial para as variáveis E e x , vem:

$$E = E_0 e^{-x/x_0},$$

então, o comprimento de radiação x_0 é o comprimento característico de cada material em que a energia cai por um fator $1/e$.

A tabela abaixo apresenta valores de x_0 para alguns diferentes materiais:

material	x_0 (cm)	x_0 (g/cm ²)
ar (1 atm, 20°C)	30776	37,7
H ₂ O	36,1	36,1
Pb	0,56	6,37
Fe	1,76	13,8
Al	8,9	24,0
cintilador plástico	43,8	42,4

C. Energia crítica

A energia crítica é a energia na qual as perdas por emissão de radiação (bremsstrahlung, por exemplo) igualam-se às perdas por ionização:

$$\left(\frac{dE}{dx} \right)_{rad} = \left(\frac{dE}{dx} \right)_{ion} \Rightarrow E = E_c$$

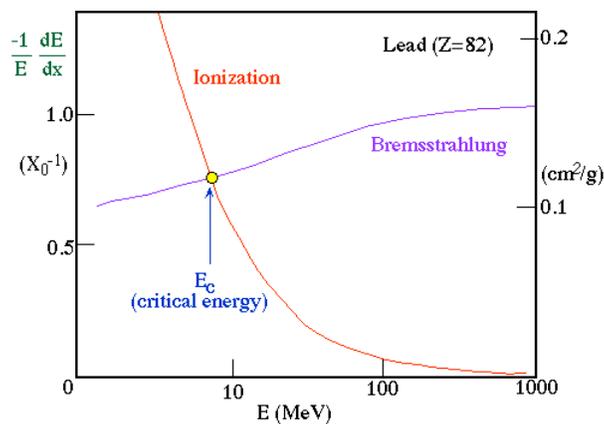


Figura 5: A energia crítica do elétron no chumbo é cerca de 7 MeV.

Assim:

$E > E_c$: as perdas por radiação são dominantes

$E < E_c$: as perdas por colisão (ionização/excitação) são dominantes

As energias críticas para alguns materiais são dadas abaixo:

material	E_c (MeV)
ar	84,2
H ₂ O	92
Pb	9,51
(A,Z)	$\approx \frac{800}{Z+1,2}$

III. EXERCÍCIOS

1. Mostre que a probabilidade de interação entre x e $x + dx$ é: $e^{-\rho\sigma x} \rho\sigma dx$.
2. O livre caminho médio de nêutrons rápidos no chumbo é de cerca de 5 cm. Encontre a seção de choque total para estes nêutrons no chumbo. Dados: ^{207}Pb , $\rho = 11,3 \text{ g/cm}^3$. Dica: considere a massa de 1 núcleo de chumbo.
3. Mostre que: $2\pi N_A r_e^2 m_e c^2 = 0,1535 \text{ MeV} \cdot \text{cm}^2/\text{g}$. Dica: utilize a unidade padrão $[dE/dx] = \text{MeV/cm}$ e tome uma densidade unitária na fórmula de Bethe e Bloch.
4. Qual é a fração final da energia de um elétron devido à emissão de radiação após atravessar 1 m de água? E após ele atravessar 1 km de ar ao nível do mar? Qual seria a distância percorrida pelo elétron, em cada caso, até ele atingir a energia crítica, E_c , se a energia inicial do elétron for de 100 MeV?