

Notas de Aula de Introdução à Física Nuclear (NHZ3026)

Prof. Dr. Marcelo Augusto Leigui de Oliveira
 Centro de Ciências Naturais e Humanas (CCNH)
 Universidade Federal do ABC (UFABC)
 Santo André - SP

AULA #16: INTERAÇÕES DAS RADIAÇÕES COM A MATÉRIA - II

I. INTERAÇÕES DE FÓTONS

Processos: efeito fotoelétrico, espalhamentos Compton, Thomson e Rayleigh, produção de pares e dissociações nucleares. Os fótons são mais penetrantes e, na realidade, não perdem energia, somente são atenuados em intensidade:

$$I = I_0 e^{-\mu x},$$

onde μ é o coeficiente de absorção.

A. Efeito fotoelétrico

(1887) H. Hertz descobre o efeito fotoelétrico:

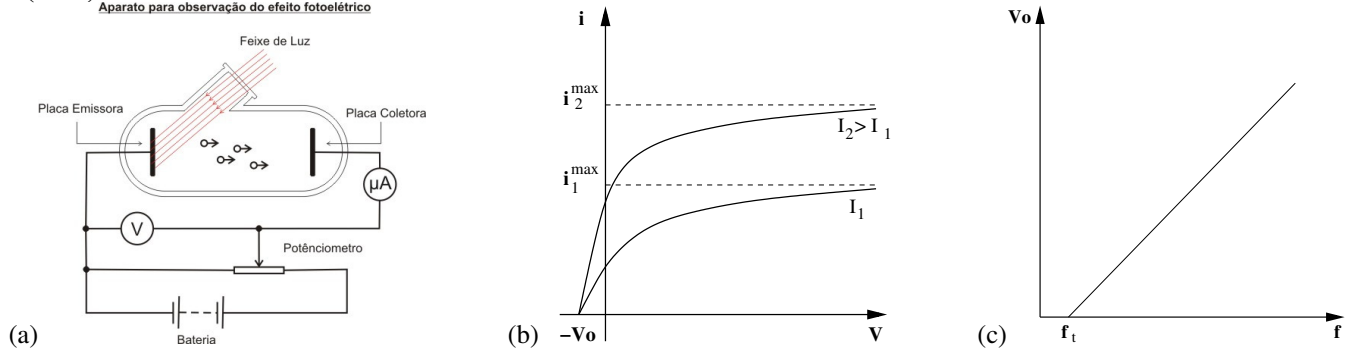


Figura 1: O efeito fotoelétrico: (a) aparato; (b) relação com a intensidade de luz; (c) linearidade entre V_0 e a frequência.

- $V > 0$: há corrente e, se V for suficientemente grande: $i \rightarrow i^{max}$;
- $V < 0$: há corrente até que se atinja o *potencial de corte* (V_0); este potencial está relacionado com a energia cinética máxima dos elétrons: $K^{max} = eV_0$.

P. Lenard (1897) determina a linearidade entre V_0 e a frequência da luz, que existe uma *frequência de corte* (f_t) e (1900) que as partículas são negativas com a mesma razão q/m obtida por Thomson: elétrons. Mas, as previsões da teoria clássica são:

- $K^{max} \propto I \propto |\vec{E}_0|^2$, porém: $K^{max} = eV_0$ (independente da intensidade);
- não existiria f_t , bastando a intensidade ser grande o suficiente, porém existe f_t ;
- deveria haver um retardo entre a incidência de luz e a emissão dos elétrons, porém $\Delta t \rightarrow 0$.

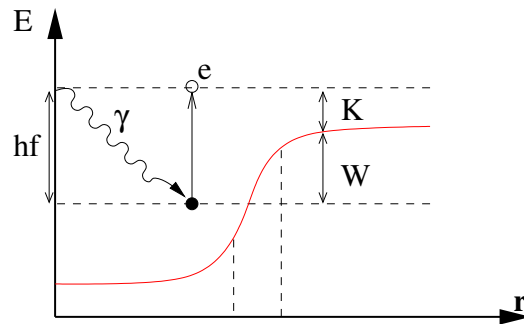


Figura 2: O efeito fotoelétrico: teoria de Einstein.

(1905) Einstein formula a teoria do efeito fotoelétrico:

O elétron absorve diretamente a energia do quantum de radiação (com energia $E = hf$), parte da energia é gasta para arrancar o elétron do metal (W) e o que resta é a energia cinética do elétron:

$$hf = K + W \Rightarrow K = hf - W$$

Para o elétron sair com energia cinética máxima, deve-se gastar a menor energia para arrancá-lo (W_0), denominada *função trabalho*:

$$hf = K + W \Rightarrow hf = K^{max} + W_0,$$

esta é a equação de Einstein para o efeito fotoelétrico. Dela, vem:

$$K^{max} = eV_0 = hf - W_0 \Rightarrow V_0 = \left(\frac{h}{e}\right) f - \frac{W_0}{e},$$

que é uma relação linear entre V_0 e f . Agora, se $V_0 = 0$:

$$0 = \left(\frac{h}{e}\right) f_t - \frac{W_0}{e} \Rightarrow f_t = \frac{W_0}{h},$$

que é a frequência de corte.

Seção de choque: se a energia do fóton for maior que a da camada K, o problema é não-relativístico ($E_K < hf \ll m_e c^2$) e utiliza-se a aproximação de Born:

$$\sigma = 4\alpha^2 \sqrt{2} Z^5 \phi_0 \left(\frac{m_e c^2}{hf}\right)^{7/2}, \text{ por átomo}$$

$$\phi_0 = \frac{8\pi r_e^2}{3} = 6,651 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$$

Para outras camadas o cálculo é mais complicado.

B. Espalhamento Compton

(1923) A. Compton descobre o efeito:

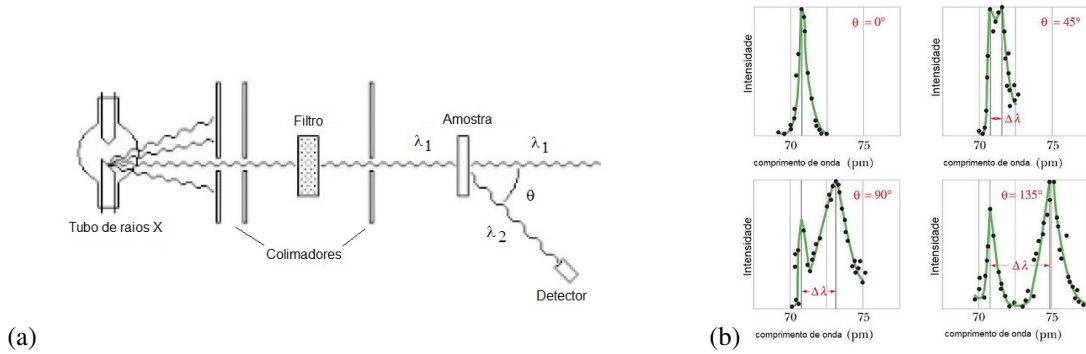


Figura 3: O efeito Compton: (a) aparato; (b) intensidade em função do ângulo de espalhamento.

E determina que há um segundo comprimento de onda emitido com *deslocamento de Compton*: $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$.

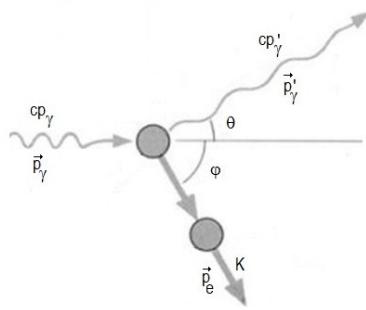


Figura 4: Conservação de energia e momento no espalhamento Compton.

$$\text{conserv. } \vec{p} : \begin{cases} p_\gamma = p'_\gamma \cos \theta + p_e \cos \varphi \\ p'_\gamma \sin \theta = p_e \sin \varphi \end{cases}$$

$$\text{conserv. } E : cp_\gamma + m_e c^2 = cp'_\gamma + K + m_e c^2$$

Partindo da conservação de momento, somando-se os quadrados das duas equações, vem:

$$p_\gamma^2 + p_e^2 - 2p_\gamma p_e \cos \theta = p_\gamma'^2 \tag{1}$$

E da conservação de energia:

$$K = c(p_\gamma - p'_\gamma). \tag{2}$$

Como:

$$E = K + m_e c^2 \Rightarrow E^2 = K^2 + 2Km_e c^2 + m_e^2 c^4 = c^2 p_e^2 + m_e^2 c^4 \Rightarrow p_e^2 = \frac{K^2}{c^2} + 2Km_e. \tag{3}$$

Substituindo 1 e 2 em 3:

$$p_\gamma^2 + p_\gamma'^2 - 2p_\gamma p_\gamma' \cos \theta = \frac{K^2}{c^2} + 2Km_e = (p_\gamma - p_\gamma')^2 + 2m_e c(p_\gamma - p_\gamma') \Rightarrow$$

$$p_\gamma^2 + p_\gamma'^2 - 2p_\gamma p_\gamma' \cos \theta = p_\gamma^2 + p_\gamma'^2 - 2p_\gamma p_\gamma' + 2m_e c p_\gamma - 2m_e c p_\gamma' \Rightarrow$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{m_e c}{p_\gamma'} + \frac{m_e c}{p_\gamma} \Rightarrow \frac{h}{p_\gamma'} - \frac{h}{p_\gamma} = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$

E, usando a relação de de Broglie: $\lambda = h/p$, vem que:

$$\boxed{\lambda' = \lambda + \lambda_C (1 - \cos \theta)},$$

onde define-se o *comprimento de onda de Compton* por $\lambda_C = \frac{h}{m_e c} = 0,0243 \text{ \AA}$.

Para o elétron:

$$K = hf - hf' = \frac{hf\xi(1 - \cos \theta)}{1 + \xi(1 - \cos \theta)}, \text{ onde } \xi = \frac{hf}{m_e c^2};$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{2}{(1 - \xi)^2 \tan^2 \varphi + 1}, \cot \varphi = (1 + \xi) \tan \frac{\theta}{2}.$$

A seção de choque diferencial é dada pela fórmula de Klein-Nishina:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} \frac{1}{[1 + \xi(1 - \cos \theta)]^2} \left(\frac{1 + \cos^2 \theta + \xi^2(1 - \cos \theta)^2}{1 + \xi(1 - \cos \theta)} \right)$$

e a seção de choque total é:

$$\sigma_C = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = 2\pi r_e^2 \left\{ \frac{1 + \xi}{\xi^2} \left[\frac{2(1 + \xi)}{1 + 2\xi} - \frac{1}{\xi} \ln(1 + 2\xi) \right] + \frac{1}{2\xi} \ln(1 + 2\xi) - \frac{1 + 3\xi}{(1 + 2\xi)^2} \right\}$$

Limites clássicos:

Fórmula de Thomson (espalhamento dos fótons com elétrons livres):

$$\sigma_{Th} = \frac{8\pi r_e^2}{3}$$

Fórmula de Rayleigh (espalhamento dos fótons com átomos ou moléculas inteiras):

$$\sigma_R = \frac{2\pi^5 d^6}{3 \lambda^4} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right)^2,$$

onde d é o diâmetro do átomo ou molécula e n é o índice de refração do meio.

$$\sigma_R \propto \frac{1}{\lambda^4} \Rightarrow \text{o céu é azul!}$$

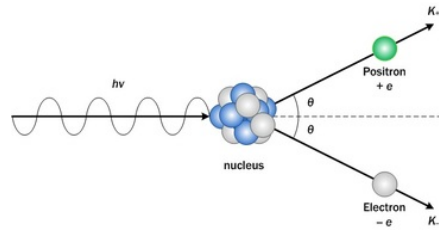


Figura 5: Criação de pares.

C. Criação de pares

Neste processo, um fóton de alta energia converte sua energia em um par elétron-pósitron, após uma colisão com um núcleo. Desprezando-se a energia de recuo do núcleo, toda a energia do fóton é convertida nas energias cinética e de repouso do par formado. Vamos chamar de E_+ e E_- as energias totais (relativísticas) do pósitron e do elétron e de K_+ e K_- as energias cinéticas do pósitron e do elétron, respectivamente. Ambos possuem a mesma energia de repouso $m_e c^2$, já que têm a mesma massa.

Assim:

$$hf = E_+ + E_- = 2m_e c^2 + K_+ + K_-$$

A energia mínima do fóton é aquela necessária para apenas criar o par, sem energia cinética:

$$E_\gamma^{min} = 2m_e c^2 = 2 \cdot 0,511 \text{ MeV} = 1,022 \text{ MeV},$$

o que significa um comprimento de onda máximo de $\lambda^{max} \approx 0,012 \text{ \AA}$.

A seção de choque para este processo é:

$$\sigma_{\text{par}} = 4Z^2 \alpha r_e^2 \left\{ \frac{7}{9} \left[\ln \left(\frac{2hf}{m_e c^2} \right) - f(Z) \right] - \frac{109}{54} \right\}$$

D. Seção de choque total

No gráfico abaixo temos a seção de choque dos processos eletromagnéticos envolvendo fótons e a seção de choque total (soma).

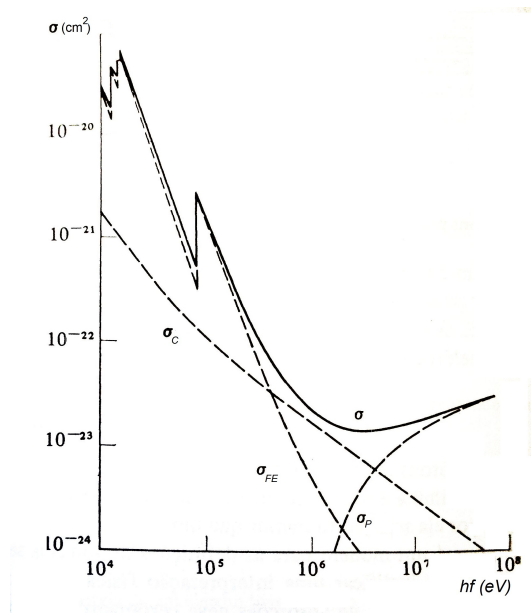


Figura 6: Seção de choque total para fótons interagindo no chumbo.

II. TEORIA DE CASCATAS

A. Chuveiros eletromagnéticos

Modelo de brinquedo (ou modelo de Heitler) ou, ainda, aproximação A: produção de pares + Bremsstrahlung:

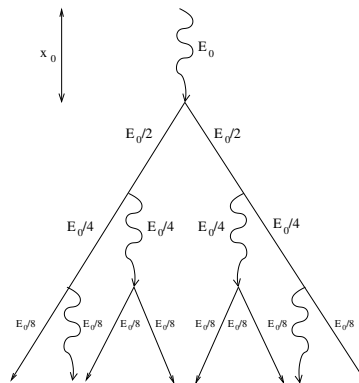


Figura 7: Modelo de Heitler para um chuveiro eletromagnético.

Para uma profundidade em unidades de comprimento de radiação ($t = x/x_0$), o número de partículas e suas energias são:

$$N \approx 2^t, \quad E \approx \frac{E_0}{2^t}$$

e o processo de multiplicação ocorre até que $E_e < E_c$:

$$E(t_{max}) = \frac{E_0}{2^{t_{max}}} = E_c \Rightarrow 2^{t_{max}} = \frac{E_0}{E_c} \Rightarrow$$

$$t_{max} = \frac{\ln(E_0/E_c)}{\ln 2}, \quad N_{max} \approx 2^{t_{max}} = \frac{E_0}{E_c}.$$

A *aproximação B* (Snyder (1949)): produção de pares + Bremsstrahlung + perdas por ionização.

Fórmula de Greisen:

$$N_e(E_0, t) = \frac{0,31}{\sqrt{\beta}} \exp \left[t \left(1 - \frac{3}{2} \log s \right) \right],$$

onde s é o *parâmetro de idade*:

$$s = \frac{3t}{t + 2\beta},$$

onde $\beta = \log \frac{E_0}{E_c}$, válido para $N_e(E > E_c)$ e $t = x/x_0$.

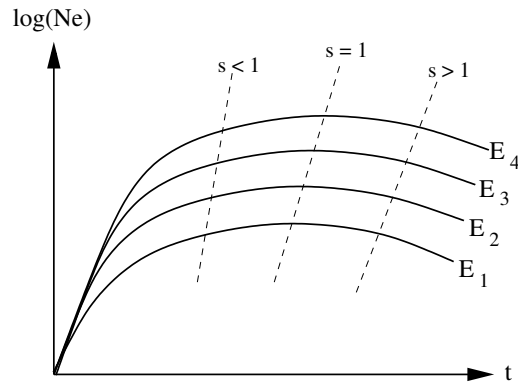


Figura 8: Distribuição vertical pela fórmula de Greisen.

A distribuição lateral é calculada pelo espalhamento coulombiano múltiplo:

$$\langle \delta\theta^2 \rangle = \left(\frac{E_s}{E} \right)^2 \delta t,$$

onde $\delta t = \delta x/x_0$ e assumimos $E \gg m_e c^2$. No ar $E_s = m_e c^2 \sqrt{4\pi/\alpha} = 21,2 \text{ MeV}$.

A unidade natural de espalhamento lateral é o *raio de Molière*:

$$r_M = x_0 \left(\frac{E_s}{E_c} \right) \approx 9,50 \text{ g/cm}^2 \approx 78 \text{ m (no ar, ao nível do mar)}.$$

(1952) Nishimura e Kamata resolvem analiticamente as equações de difusão e (1956) Greisen propõe a distribuição lateral que melhor representa os resultados para $0,6 \leq s \leq 1,8$ e $10^{-2} \leq r/r_M \leq 10$:

$$f_{NKG}(r/r_M) = c(s) \left(\frac{r}{r_M} \right)^{s-2} \left(1 + \frac{r}{r_M} \right)^{s-4,5},$$

com:

$$\int_0^{\infty} 2\pi (r/r_M) f_{NKG}(r/r_M) d(r/r_M) = 1 \Rightarrow c(s) = \frac{\Gamma(4,5-s)}{2\pi\Gamma(s)\Gamma(4,5-s)}.$$

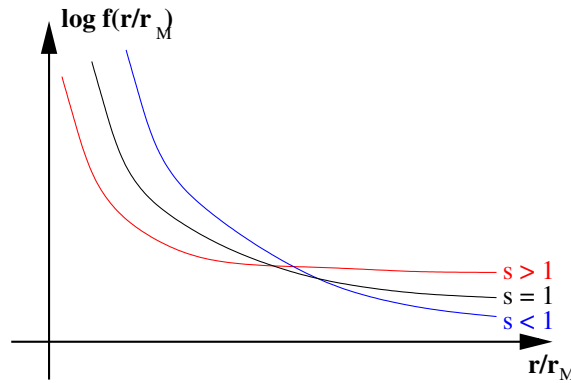


Figura 9: Distribuição lateral de Nishimura-Kamata-Greisen.

E a densidade de partículas a uma profundidade t e a uma distância r do eixo do chuveiro é dada, então, por:

$$\rho(r) = \frac{N_e(t)}{r_M^2} f_{NKG}(r/r_M).$$

B. Chuveiros hadrônicos

Atmosfera: $t \approx 1036 \text{ g/cm}^2$

1. Prótons primários interagem ($\lambda = 80 \text{ g/cm}^2$), mas, em geral, sobrevivem, perdendo apenas parte de sua energia. O fluxo de prótons diminui com $\phi = \phi_0 e^{-x/x_p}$, onde $x_p = 120 \text{ g/cm}^2$. A energias de $\sim 1 \text{ GeV}$ os prótons produzem $\sim 2[E(\text{GeV})]^{1/4}$ partículas carregadas por colisão;
2. Núcleons e píons carregados secundários produzem gerações sucessivas até 1 GeV ($\sim E_{min}$ para produção de píons): pionização + partículas estranhas ou antinúcleons;
3. Prótons secundários perdem energia por ionização e com $E < 1 \text{ GeV}$ são trazidos ao repouso;
4. $\pi^0 \rightarrow 2\gamma \rightarrow$ cascata eletromagnética, com $\tau = 8 \cdot 10^{-17} \text{ s}$;
5. $\left. \begin{array}{l} \pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \\ \pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \end{array} \right\} \tau_\mu = 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$, mas seu tempo de vida é dilatado por um fator $\gamma \geq 20$, chegando ao nível do mar. Múons perdem energia por ionização.

Assim, divide-se os *chuveiros atmosféricos extensos* em 3 componentes: eletromagnética, hadrônica e muônica.

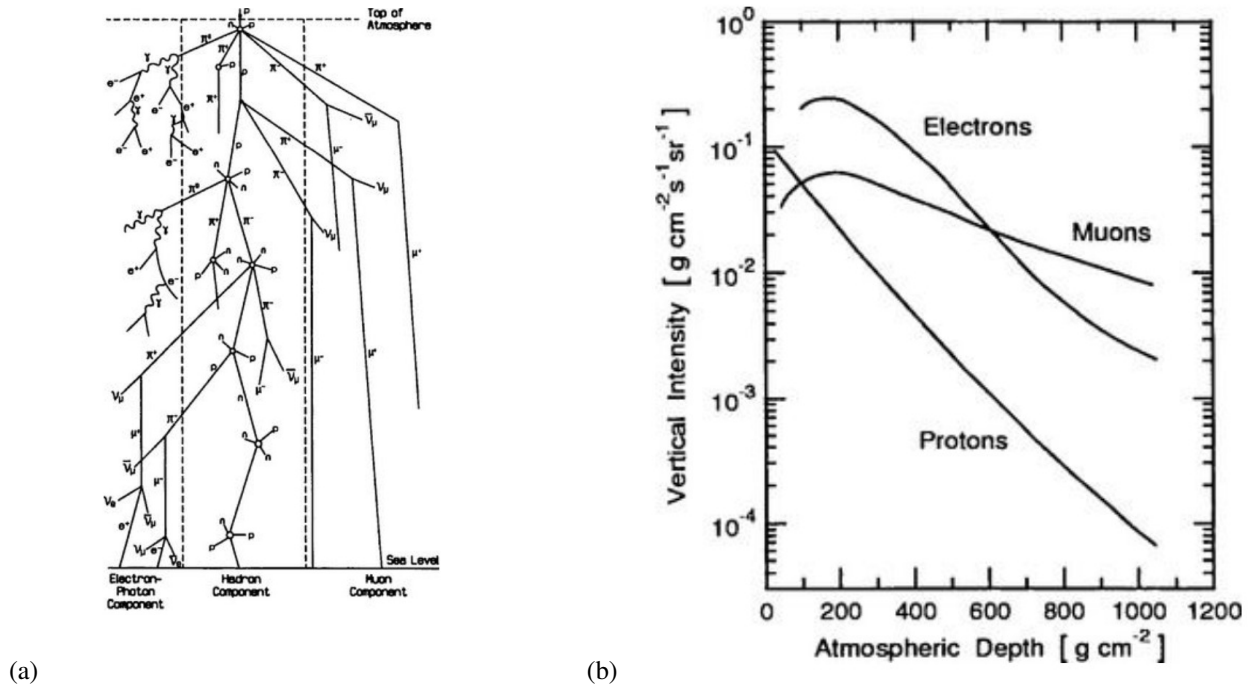


Figura 10: Chuveiro atmosférico: (a) componentes; (b) fluxo vertical de partículas.

III. EXERCÍCIOS

- Dado que a energia para arrancar um elétron de um cátodo de potássio é de 2,22 eV, calcule o tempo de retardo entre a incidência de um feixe de intensidade $I = 10^{-2} \text{ W/m}^2$ e a emissão de um elétron de um átomo. Use o raio atômico de 10^{-10} m .
- Calcule o valor do deslocamento de Compton $\Delta\lambda$ para um fóton espalhado a um ângulo de 60° :
 - por um próton livre;
 - por um elétron;
 - por uma molécula de N_2 , onde $A = 14$ para o nitrogênio.
- Um fóton de 10^{15} eV dá início a uma cascata eletromagnética na atmosfera.
 - Pela aproximação A, calcule: a profundidade do máximo (em comprimentos de radiação e em g/cm^2) e o número de partículas no máximo;
 - Pela aproximação B, calcule: a idade do chuveiro e o número total de elétrons ao nível do mar;
 - Calcule a densidade de elétrons ao nível do mar, à distância de um raio de Molière do eixo do chuveiro, com os resultados do item (b). Utilize para o fator de normalização da função de distribuição lateral a aproximação:

$$c(s) = 0,366s^2(2,07 - s)^{5/4}.$$

Dados: para a atmosfera: $t = 1036 \text{ g/cm}^2$; para o ar: $x_0 = 37,7 \text{ g/cm}^2$ e $E_c = 84,2 \text{ MeV}$.