

Aula 6: Distribuição de carga, raio nuclear e fator de forma

Introdução à Física Nuclear

Prof. Marcelo A. Leigui de Oliveira

Centro de Ciências Naturais e Humanas
Universidade Federal do ABC
Av. dos Estados, 5001
09210-580 Santo André-SP

17 de outubro de 2024



Universidade Federal do ABC

- 1 Densidade de carga nuclear
 - Raio nuclear
 - Seção de choque de espalhamento elástico
 - Amplitude de espalhamento
- 2 Fator de forma
- 3 Exercícios

A lista de parâmetros para caracterizar um nuclídeo de $A = 50$ é da ordem de todas as combinações possíveis entre seus constituintes:

$${}^{50}\text{X} \Rightarrow 50! \approx 10^{64}$$

A lista de parâmetros para caracterizar um nuclídeo de $A = 50$ é da ordem de todas as combinações possíveis entre seus constituintes:

$${}^{50}\text{X} \Rightarrow 50! \approx 10^{64}$$

Além disso, podemos classificar as propriedades como:

- 1 Estáticas: carga elétrica, raio, massa, energia de ligação, momento angular, paridade, dipolo magnético, quadrupolo elétrico, energia dos estados excitados, ...

A lista de parâmetros para caracterizar um nuclídeo de $A = 50$ é da ordem de todas as combinações possíveis entre seus constituintes:

$${}^{50}\text{X} \Rightarrow 50! \approx 10^{64}$$

Além disso, podemos classificar as propriedades como:

- 1 Estáticas: carga elétrica, raio, massa, energia de ligação, momento angular, paridade, dipolo magnético, quadrupolo elétrico, energia dos estados excitados, ...
- 2 Dinâmicas: probabilidades de decaimento, seções de choque de interações e de reações.

Densidade de carga nuclear

- Experimentalmente, verifica-se a densidade de carga de núcleos através do espalhamento de elétrons de alta energia, raios X ou raios gama.

Densidade de carga nuclear

- Experimentalmente, verifica-se a densidade de carga de núcleos através do espalhamento de elétrons de alta energia, raios X ou raios gama.
- O acelerador linear de Stanford (SLAC) provê elétrons com momentos entre $100 \text{ MeV}/c < p_e < 1 \text{ GeV}/c$

Densidade de carga nuclear

- Experimentalmente, verifica-se a densidade de carga de núcleos através do espalhamento de elétrons de alta energia, raios X ou raios gama.
- O acelerador linear de Stanford (SLAC) provê elétrons com momentos entre $100 \text{ MeV}/c < p_e < 1 \text{ GeV}/c$, ou seja, 10 vezes maiores que o exigido para investigar nas dimensões nucleares ($\lambda \lesssim 10 \text{ fm}$):

Densidade de carga nuclear

- Experimentalmente, verifica-se a densidade de carga de núcleos através do espalhamento de elétrons de alta energia, raios X ou raios gama.
- O acelerador linear de Stanford (SLAC) provê elétrons com momentos entre $100 \text{ MeV}/c < p_e < 1 \text{ GeV}/c$, ou seja, 10 vezes maiores que o exigido para investigar nas dimensões nucleares ($\lambda \lesssim 10 \text{ fm}$):

$$\Delta p \Delta x \gtrsim \frac{\hbar}{2}$$

Densidade de carga nuclear

- Experimentalmente, verifica-se a densidade de carga de núcleos através do espalhamento de elétrons de alta energia, raios X ou raios gama.
- O acelerador linear de Stanford (SLAC) provê elétrons com momentos entre $100 \text{ MeV}/c < p_e < 1 \text{ GeV}/c$, ou seja, 10 vezes maiores que o exigido para investigar nas dimensões nucleares ($\lambda \lesssim 10 \text{ fm}$):

$$\Delta p \Delta x \gtrsim \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \Delta p \cdot \lambda \gtrsim \frac{\hbar c}{2}$$

Densidade de carga nuclear

- Experimentalmente, verifica-se a densidade de carga de núcleos através do espalhamento de elétrons de alta energia, raios X ou raios gama.
- O acelerador linear de Stanford (SLAC) provê elétrons com momentos entre $100 \text{ MeV}/c < p_e < 1 \text{ GeV}/c$, ou seja, 10 vezes maiores que o exigido para investigar nas dimensões nucleares ($\lambda \lesssim 10 \text{ fm}$):

$$\Delta p \Delta x \gtrsim \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \Delta p \cdot \lambda \gtrsim \frac{\hbar c}{2} \Rightarrow \Delta p \gtrsim \frac{197,3 \text{ [MeV} \cdot \text{fm]}}{2 \cdot 10 \text{ [fm]} \cdot c}$$

Densidade de carga nuclear

- Experimentalmente, verifica-se a densidade de carga de núcleos através do espalhamento de elétrons de alta energia, raios X ou raios gama.
- O acelerador linear de Stanford (SLAC) provê elétrons com momentos entre $100 \text{ MeV}/c < p_e < 1 \text{ GeV}/c$, ou seja, 10 vezes maiores que o exigido para investigar nas dimensões nucleares ($\lambda \lesssim 10 \text{ fm}$):

$$\Delta p \Delta x \gtrsim \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \Delta p \cdot \lambda \gtrsim \frac{\hbar c}{2c} \Rightarrow \Delta p \gtrsim \frac{197,3 \text{ [MeV} \cdot \text{fm}]}{2 \cdot 10 \text{ [fm]} \cdot c}$$

Densidade de carga nuclear

- Experimentalmente, verifica-se a densidade de carga de núcleos através do espalhamento de elétrons de alta energia, raios X ou raios gama.
- O acelerador linear de Stanford (SLAC) provê elétrons com momentos entre $100 \text{ MeV}/c < p_e < 1 \text{ GeV}/c$, ou seja, 10 vezes maiores que o exigido para investigar nas dimensões nucleares ($\lambda \lesssim 10 \text{ fm}$):

$$\Delta p \Delta x \gtrsim \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \Delta p \cdot \lambda \gtrsim \frac{\hbar c}{2c} \Rightarrow \Delta p \gtrsim \frac{197,3 \text{ [MeV} \cdot \text{fm]}}{2 \cdot 10 \text{ [fm]} \cdot c} \approx 9,87 \text{ MeV}/c.$$

Raio nuclear

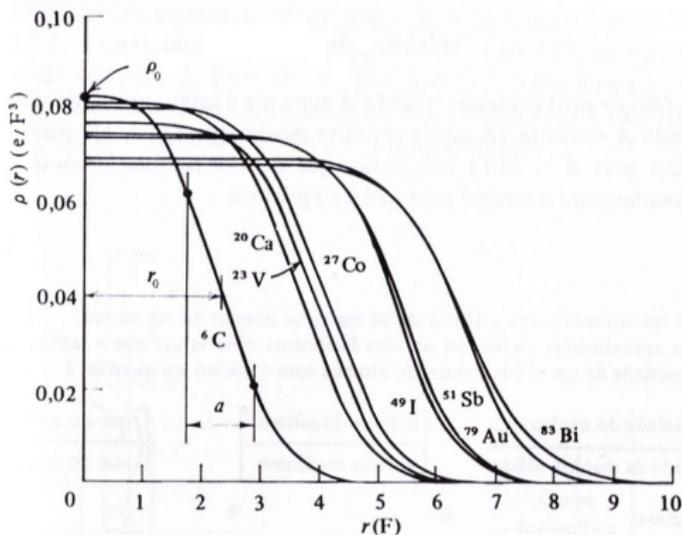


Figura: Distribuição de densidade de carga no interior do núcleo.

Note que a densidade de carga se mantém aproximadamente constante no interior do núcleo.

Raio nuclear

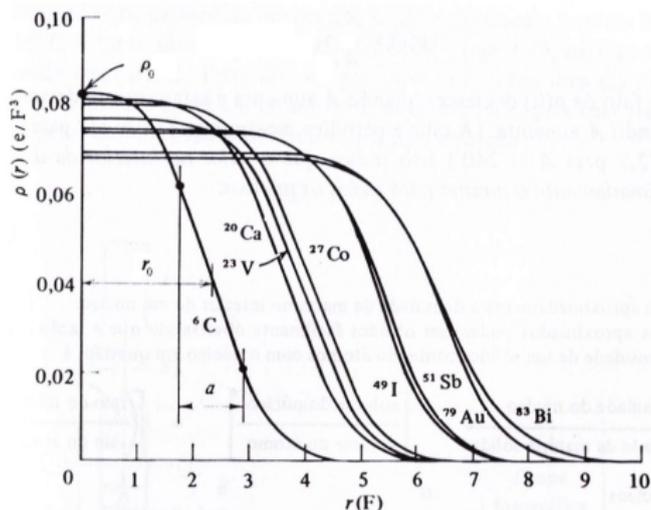


Figura: Distribuição de densidade de carga no interior do núcleo.

Note que a densidade de carga se mantém aproximadamente constante no interior do núcleo. Resultados similares são obtidos com espalhamentos de nêutrons, portanto, podemos estender este resultado para todos os núcleons, isto é, a densidade interna de constituintes é aproximadamente constante.

Raio nuclear

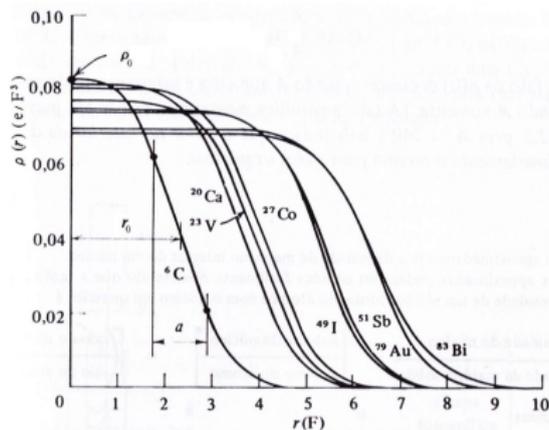


Figura: Distribuição de densidade de carga no interior do núcleo.

Então:

$$\rho = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi r^3} \sim \text{const.}$$

Raio nuclear

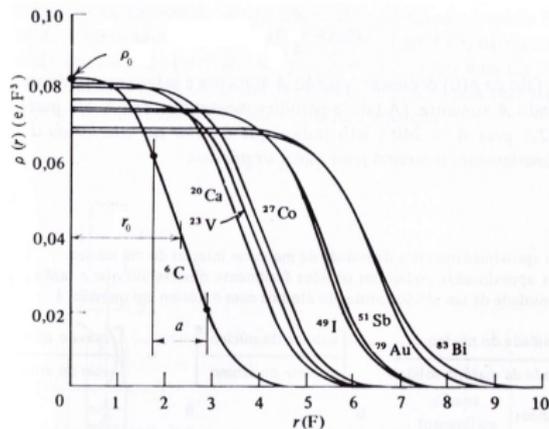


Figura: Distribuição de densidade de carga no interior do núcleo.

Então:

$$\rho = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi r^3} \sim \text{const.} \Rightarrow r \propto A^{1/3}$$

Raio nuclear

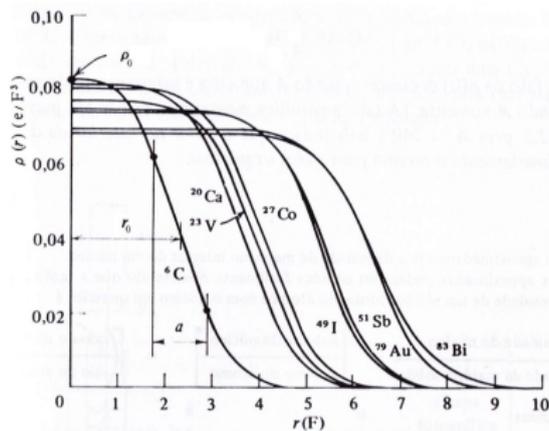


Figura: Distribuição de densidade de carga no interior do núcleo.

Então:

$$\rho = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi r^3} \sim \text{const.} \Rightarrow r \propto A^{1/3} \Rightarrow \boxed{r = r_0 A^{1/3}} \quad (1)$$

Raio nuclear

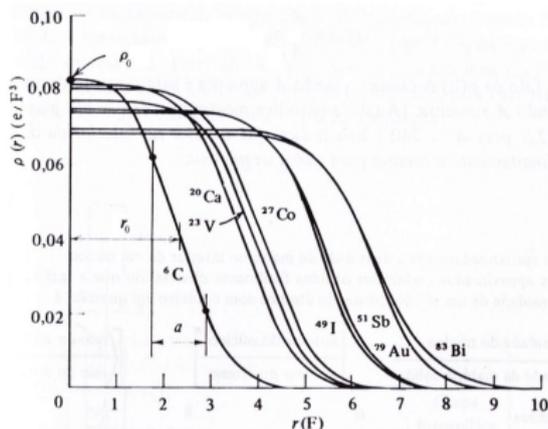


Figura: Distribuição de densidade de carga no interior do núcleo.

Então:

$$\rho = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi r^3} \sim \text{const.} \Rightarrow r \propto A^{1/3} \Rightarrow \boxed{r = r_0 A^{1/3}},$$

onde $r_0 \approx 1,16$ fm, conhecida como *constante do raio* (este valor pode ser entendido como o raio médio ocupado por cada núcleon dentro de um núcleo esférico).

Raio nuclear: modelos

Modelo I:

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & , \text{para } r < r_0 \\ 0 & , \text{para } r > r_0 \end{cases}$$

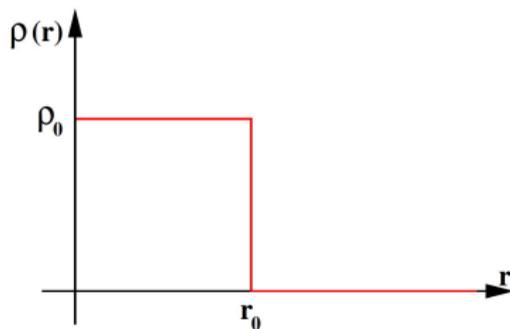


Figura: Distribuição de carga nuclear I.

Raio nuclear: modelos

Modelo II (distribuição de Fermi) :

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left(\frac{r-r_0}{a}\right)}, \quad (2)$$

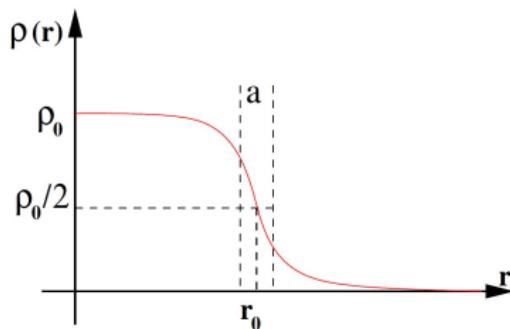


Figura: Distribuição de carga nuclear II.

Raio nuclear: modelos

Modelo II (distribuição de Fermi) :

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left(\frac{r-r_0}{a}\right)}, \quad (3)$$

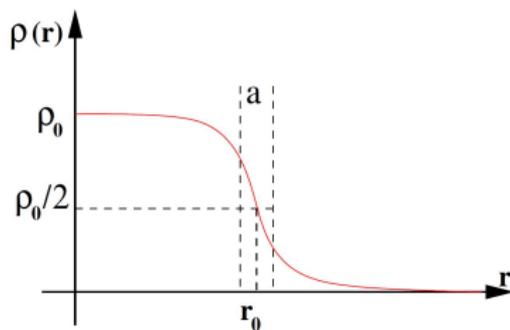


Figura: Distribuição de carga nuclear II.

onde define-se:

- o *raio médio* (r_0), como o raio em que a densidade de carga cai à metade:
 $\rho(r_0) = \rho_0/2$.

Raio nuclear: modelos

Modelo II (distribuição de Fermi) :

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left(\frac{r-r_0}{a}\right)}, \quad (4)$$

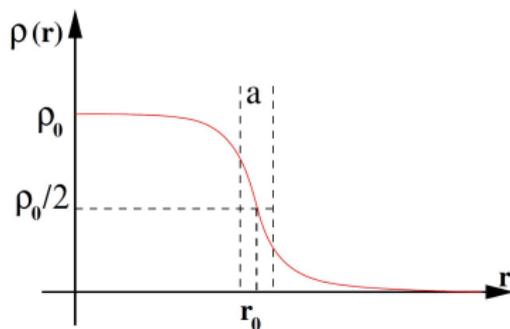


Figura: Distribuição de carga nuclear II.

onde define-se:

- o *raio médio* (r_0), como o raio em que a densidade de carga cai à metade: $\rho(r_0) = \rho_0/2$;
- a *espessura de pele* (a), como o intervalo em que a densidade de carga cai de $0,62\rho_0$ a $0,38\rho_0$.

Seção de choque de espalhamento elástico

A *seção de choque infinitesimal* é definida por:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{F} \frac{dN}{d\Omega}},$$

onde F é o fluxo incidente de partículas por unidade de tempo e de área.

Seção de choque de espalhamento elástico

Obtivemos, em aula passada, a fórmula clássica para o espalhamento Rutherford:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{F} \frac{dN}{d\Omega} = \left(\frac{Zke^2}{2E_\alpha} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}.$$

Seção de choque de espalhamento elástico

Obtivemos, em aula passada, a fórmula clássica para o espalhamento Rutherford:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{F} \frac{dN}{d\Omega} = \left(\frac{Zke^2}{2E_\alpha} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}.$$

Um cálculo mais detalhado nos leva à fórmula relativística do espalhamento Mott:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Zke^2}{2E_\alpha} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \theta/2} \left[1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta/2 \right].$$

Seção de choque de espalhamento elástico

Obtivemos, em aula passada, a fórmula clássica para o espalhamento Rutherford:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{F} \frac{dN}{d\Omega} = \left(\frac{Zke^2}{2E_\alpha} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}.$$

Um cálculo mais detalhado nos leva à fórmula relativística do espalhamento Mott:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Zke^2}{2E_\alpha} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \theta/2} \left[1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta/2 \right].$$

Note que, em ambos os casos, a seção de choque diferencial é proporcional ao módulo quadrado de uma função do ângulo de espalhamento:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = Z^2 e^2 |f(\theta)|^2},$$

que é a expressão válida para alvos pontuais.

Amplitude de espalhamento

A seção de choque diferencial para alvos pontuais é:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = Z^2 e^2 |f(\theta)|^2.$$

Amplitude de espalhamento

A seção de choque diferencial para alvos pontuais é:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = Z^2 e^2 |f(\theta)|^2.$$

E para núcleos finitos (alvos com dimensão não nula)?

Amplitude de espalhamento

A seção de choque diferencial para alvos pontuais é:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = Z^2 e^2 |f(\theta)|^2.$$

Para núcleos finitos (alvos com dimensão não nula), temos, para cada elemento infinitesimal $dq = d(Ze)$ do alvo, que a amplitude do espalhamento depende do elemento de carga:

$$A(\theta) \propto dq$$

Amplitude de espalhamento

A seção de choque diferencial para alvos pontuais é:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = Z^2 e^2 |f(\theta)|^2.$$

Para núcleos finitos (alvos com dimensão não nula), temos, para cada elemento infinitesimal $dq = d(Ze)$ do alvo, que a amplitude do espalhamento depende do elemento de carga, de uma função do ângulo de espalhamento θ :

$$A(\theta) \propto dq \cdot f(\theta)$$

Amplitude de espalhamento

A seção de choque diferencial para alvos pontuais é:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = Z^2 e^2 |f(\theta)|^2.$$

Para núcleos finitos (alvos com dimensão não nula), temos, para cada elemento infinitesimal $dq = d(Ze)$ do alvo, que a amplitude do espalhamento depende do elemento de carga, de uma função do ângulo de espalhamento θ e de uma fase óptica, que é devida à diferença de caminho percorrido pela frente da onda através do núcleo com dimensão finita, isto é:

$$A(\theta) \propto dq \cdot f(\theta) \cdot e^{-i\delta},$$

onde δ é a fase óptica.

Amplitude de espalhamento

Agora, consideremos um espalhamento em que uma partícula incide com momento linear \vec{p}_1 e é espalhada com momento linear \vec{p}_2 e seja \vec{q} o momento linear transferido na colisão:

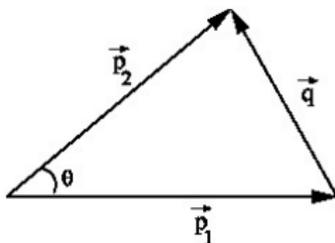


Figura: Momentos lineares do espalhamento: incidente (\vec{p}_1), espalhado (\vec{p}_2) e transferido (\vec{q}).

$$\vec{q} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

Amplitude de espalhamento

Agora, consideremos um espalhamento em que uma partícula incide com momento linear \vec{p}_1 e é espalhada com momento linear \vec{p}_2 e seja \vec{q} o momento linear transferido na colisão:

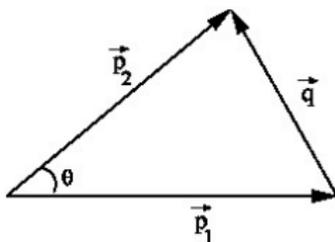


Figura: Momentos lineares do espalhamento: incidente (\vec{p}_1), espalhado (\vec{p}_2) e transferido (\vec{q}).

$$\vec{q} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \hbar(\vec{k}_2 - \vec{k}_1).$$

O momento transferido ao núcleo é:

$$\vec{q}' = -\vec{q} = \hbar(\vec{k}_1 - \vec{k}_2).$$

Amplitude de espalhamento

Calculando a probabilidade de transição:

$$F(\vec{k}_2, \vec{k}_1) = \int \psi_2^* V(r) \psi_1 dV$$

Amplitude de espalhamento

Calculando a probabilidade de transição:

$$\begin{aligned} F(\vec{k}_2, \vec{k}_1) &= \int \psi_2^* V(r) \psi_1 dV = \\ &= \int e^{-i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}} \left\{ -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \right\} e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} dV \end{aligned}$$

Amplitude de espalhamento

Calculando a probabilidade de transição:

$$\begin{aligned}
 F(\vec{k}_2, \vec{k}_1) &= \int \psi_2^* V(r) \psi_1 dV = \\
 &= \int e^{-i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}} \left\{ -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \right\} e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} dV = \\
 &= \int \rho(\vec{r}') \cdot f(\theta) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}' / \hbar} dV'
 \end{aligned}$$

Amplitude de espalhamento

Calculando a probabilidade de transição:

$$\begin{aligned}
 F(\vec{k}_2, \vec{k}_1) &= \int \psi_2^* V(r) \psi_1 dV = \\
 &= \int e^{-i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}} \left\{ -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \right\} e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} dV = \\
 &= \int \rho(\vec{r}) \cdot f(\theta) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}/\hbar} dV = \int \rho(\vec{r}) \cdot f(\theta) e^{i\vec{q}' \cdot \vec{r}/\hbar} dV.
 \end{aligned}$$

Amplitude de espalhamento

Calculando a probabilidade de transição:

$$\begin{aligned}
 F(\vec{k}_2, \vec{k}_1) &= \int \psi_2^* V(r) \psi_1 dV = \\
 &= \int e^{-i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}} \left\{ -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \right\} e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} dV = \\
 &= \int \rho(\vec{r}) \cdot f(\theta) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}/\hbar} dV = \int \rho(\vec{r}) \cdot f(\theta) e^{i\vec{q}' \cdot \vec{r}/\hbar} dV.
 \end{aligned}$$

Seja $p = |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$:

Amplitude de espalhamento

Calculando a probabilidade de transição:

$$\begin{aligned}
 F(\vec{k}_2, \vec{k}_1) &= \int \psi_2^* V(r) \psi_1 dV = \\
 &= \int e^{-i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}} \left\{ -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \right\} e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} dV = \\
 &= \int \rho(\vec{r}) \cdot f(\theta) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}/\hbar} dV = \int \rho(\vec{r}) \cdot f(\theta) e^{i\vec{q}' \cdot \vec{r}/\hbar} dV.
 \end{aligned}$$

Seja $p = |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$:

$$q^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos \theta$$

Amplitude de espalhamento

Calculando a probabilidade de transição:

$$\begin{aligned}
 F(\vec{k}_2, \vec{k}_1) &= \int \psi_2^* V(r) \psi_1 dV = \\
 &= \int e^{-i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}} \left\{ -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \right\} e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} dV = \\
 &= \int \rho(\vec{r}) \cdot f(\theta) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}/\hbar} dV = \int \rho(\vec{r}) \cdot f(\theta) e^{i\vec{q}' \cdot \vec{r}/\hbar} dV.
 \end{aligned}$$

Seja $p = |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$:

$$q^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos \theta = 2p^2(1 - \cos \theta)$$

Amplitude de espalhamento

Calculando a probabilidade de transição:

$$\begin{aligned}
 F(\vec{k}_2, \vec{k}_1) &= \int \psi_2^* V(r) \psi_1 dV = \\
 &= \int e^{-i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}} \left\{ -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \right\} e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} dV = \\
 &= \int \rho(\vec{r}) \cdot f(\theta) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}/\hbar} dV = \int \rho(\vec{r}) \cdot f(\theta) e^{i\vec{q}' \cdot \vec{r}/\hbar} dV.
 \end{aligned}$$

Seja $p = |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$:

$$\begin{aligned}
 q^2 &= p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos \theta = 2p^2(1 - \cos \theta) = \\
 &2p^2[1 - \cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2)]
 \end{aligned}$$

Amplitude de espalhamento

Calculando a probabilidade de transição:

$$\begin{aligned}
 F(\vec{k}_2, \vec{k}_1) &= \int \psi_2^* V(r) \psi_1 dV = \\
 &= \int e^{-i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}} \left\{ -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \right\} e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} dV = \\
 &= \int \rho(\vec{r}) \cdot f(\theta) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}/\hbar} dV = \int \rho(\vec{r}) \cdot f(\theta) e^{i\vec{q}' \cdot \vec{r}/\hbar} dV.
 \end{aligned}$$

Seja $p = |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$:

$$\begin{aligned}
 q^2 &= p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos \theta = 2p^2(1 - \cos \theta) = \\
 &2p^2[1 - \cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2)] = 4p^2 \sin^2(\theta/2)
 \end{aligned}$$

Amplitude de espalhamento

Calculando a probabilidade de transição:

$$\begin{aligned}
 F(\vec{k}_2, \vec{k}_1) &= \int \psi_2^* V(r) \psi_1 dV = \\
 &= \int e^{-i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}} \left\{ -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \right\} e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} dV = \\
 &= \int \rho(\vec{r}) \cdot f(\theta) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}/\hbar} dV = \int \rho(\vec{r}) \cdot f(\theta) e^{i\vec{q}' \cdot \vec{r}/\hbar} dV.
 \end{aligned}$$

Seja $p = |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$:

$$\begin{aligned}
 q^2 &= p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos \theta = 2p^2(1 - \cos \theta) = \\
 2p^2[1 - \cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2)] &= 4p^2 \sin^2(\theta/2) \Rightarrow \\
 q &= 2p \sin(\theta/2). \tag{5}
 \end{aligned}$$

Amplitude de espalhamento

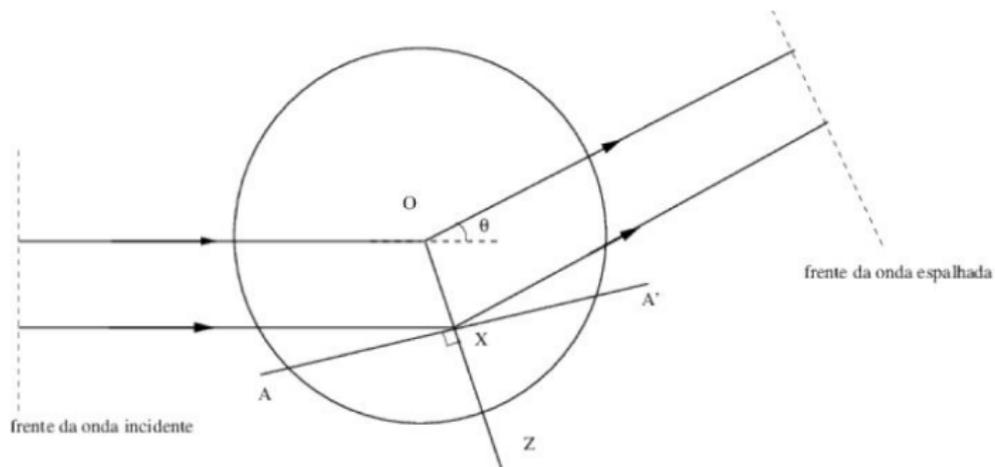
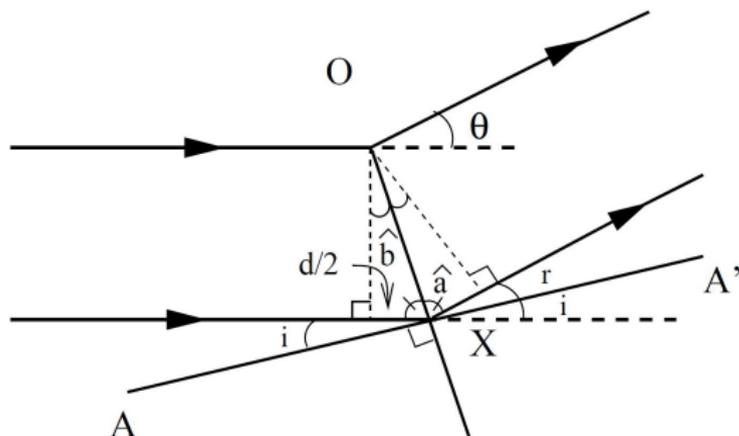


Figura: Difração de Fraunhofer.

Amplitude de espalhamento

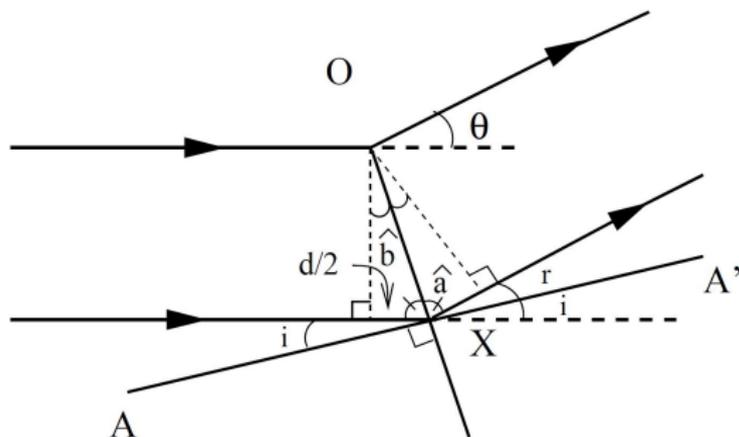


Calculando δ (difração de Fraunhoffer):

$$\theta = i + r = 2i \Rightarrow i = \theta/2;$$

$$2\hat{b} = \theta \Rightarrow \hat{b} = \theta/2;$$

Amplitude de espalhamento



Calculando δ (difração de Fraunhofer):

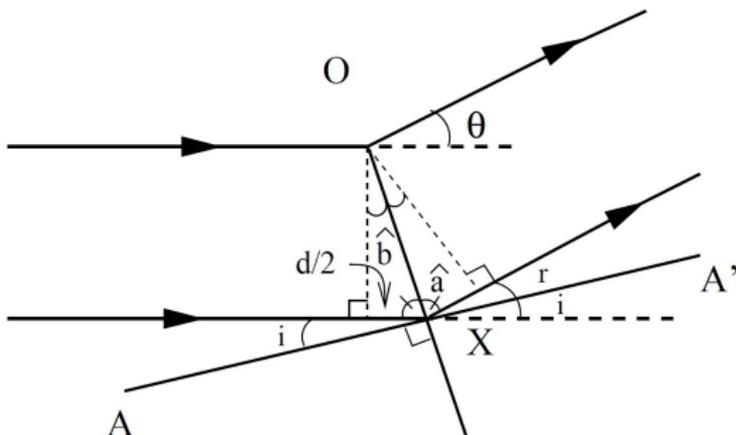
$$\theta = i + r = 2i \Rightarrow i = \theta/2;$$

$$2\hat{b} = \theta \Rightarrow \hat{b} = \theta/2;$$

$$\hat{a} = 90^\circ - \theta/2.$$

Condições válidas sobre todo o plano AA'.

Amplitude de espalhamento

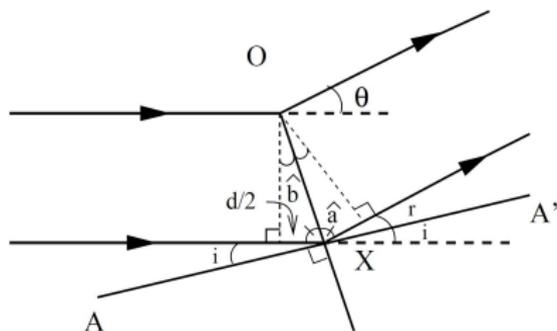


Calculando δ (difração de Fraunhofer):

$$i = \theta/2, \quad \hat{b} = \theta/2, \quad \hat{a} = 90^\circ - \theta/2.$$

Seja d a diferença de caminho óptico.

Amplitude de espalhamento



Calculando δ (difração de Fraunhofer):

$$i = \theta/2, \quad \hat{b} = \theta/2, \quad \hat{a} = 90^\circ - \theta/2.$$

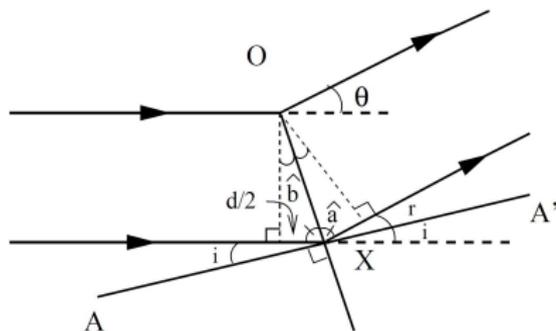
Seja d a diferença de caminho óptico:

$$\sin \hat{b} = \sin(\theta/2) = \frac{d/2}{OX} \Rightarrow d = 2\overline{OX} \sin(\theta/2)$$

Então:

$$\delta = kd = \frac{p}{\hbar} d$$

Amplitude de espalhamento



Calculando δ (difração de Fraunhofer):

$$i = \theta/2, \quad \hat{b} = \theta/2, \quad \hat{a} = 90^\circ - \theta/2.$$

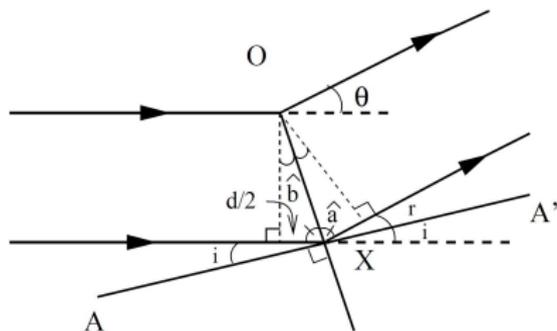
Seja d a diferença de caminho óptico:

$$\sin \hat{b} = \sin(\theta/2) = \frac{d/2}{OX} \Rightarrow d = 2\overline{OX} \sin(\theta/2)$$

Então:

$$\delta = kd = \frac{p}{\hbar} d = \frac{2p \sin(\theta/2)}{\hbar} \overline{OX}$$

Amplitude de espalhamento



Calculando δ (difração de Fraunhofer):

$$i = \theta/2, \quad \hat{b} = \theta/2, \quad \hat{a} = 90^\circ - \theta/2.$$

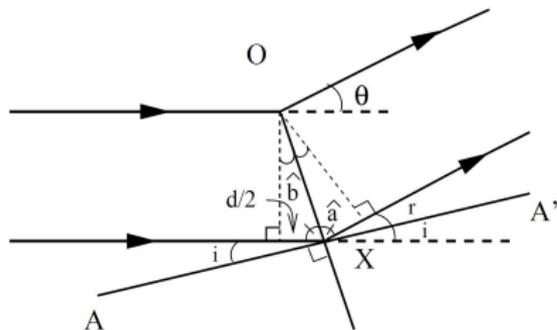
Seja d a diferença de caminho óptico:

$$\sin \hat{b} = \sin(\theta/2) = \frac{d/2}{OX} \Rightarrow d = 2\overline{OX} \sin(\theta/2)$$

Então:

$$\delta = kd = \frac{p}{\hbar} d = \frac{2p \sin(\theta/2)}{\hbar} \overline{OX} = \frac{q}{\hbar} \overline{OX}$$

Amplitude de espalhamento



Calculando δ (difração de Fraunhofer):

$$i = \theta/2, \quad \hat{b} = \theta/2, \quad \hat{a} = 90^\circ - \theta/2.$$

Seja d a diferença de caminho óptico:

$$\sin \hat{b} = \sin(\theta/2) = \frac{d/2}{OX} \Rightarrow d = 2\overline{OX} \sin(\theta/2)$$

Então:

$$\delta = kd = \frac{p}{\hbar} d = \frac{2p \sin(\theta/2)}{\hbar} \overline{OX} = \frac{q}{\hbar} \overline{OX},$$

onde, na última passagem, substituímos a expressão de q da equação 5.

Amplitude de espalhamento

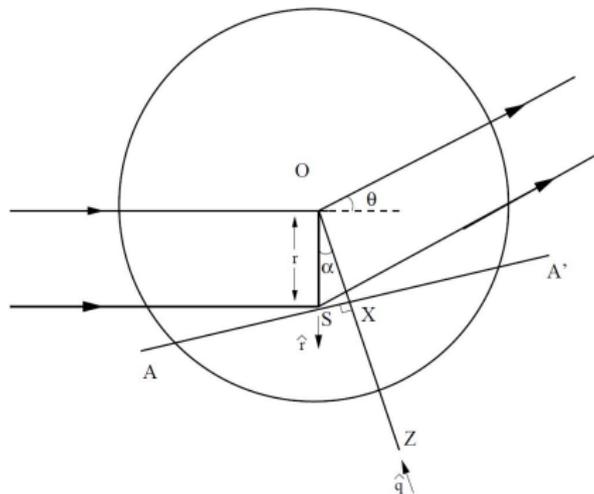


Figura: Definição dos versores radial (\hat{r}) e na direção do momento transferido (\hat{q}), tais que: $\hat{q} \cdot \hat{r} = -\cos \alpha$.

Amplitude de espalhamento

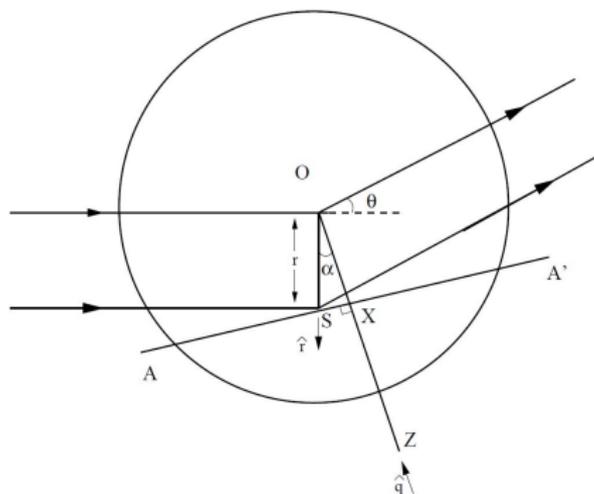


Figura: Definição dos vetores radial (\hat{r}) e na direção do momento transferido (\hat{q}), tais que: $\hat{q} \cdot \hat{r} = -\cos \alpha$.

Vamos tomar um ponto S sobre este plano (diferente de X).

Amplitude de espalhamento

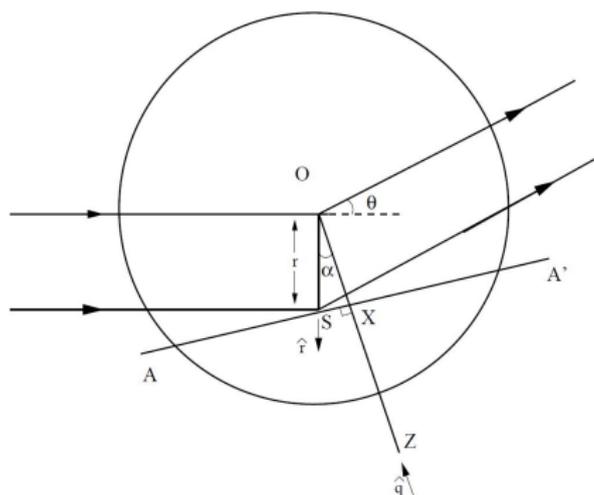


Figura: Definição dos versores radial (\hat{r}) e na direção do momento transferido (\hat{q}), tais que: $\hat{q} \cdot \hat{r} = -\cos \alpha$.

Vamos tomar um ponto S sobre este plano (diferente de X) e definir a distância radial como: $r = \overline{OS}$ (conforme a figura).

Amplitude de espalhamento

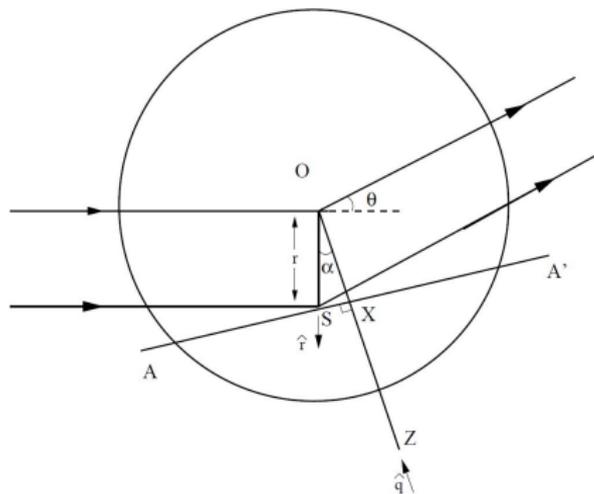


Figura: Definição dos versores radial (\hat{r}) e na direção do momento transferido (\hat{q}), tais que: $\hat{q} \cdot \hat{r} = -\cos \alpha$.

Vamos tomar um ponto S sobre este plano (diferente de X) e definir a distância radial como: $r = \overline{OS}$ (conforme a figura). \overline{OX} e o seu prolongamento \overline{OZ} são paralelos ao vetor \vec{q} , tal que: $\hat{q} \cdot \hat{r} = -\cos \alpha$.

Amplitude de espalhamento

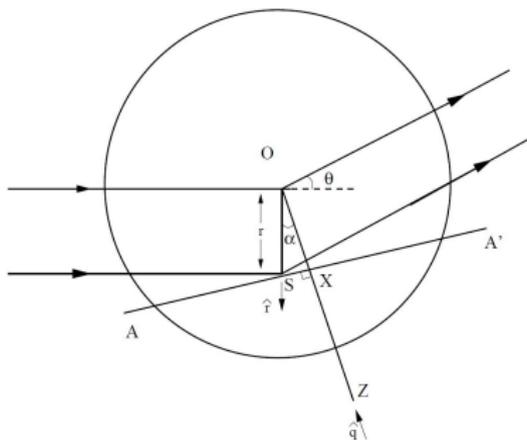


Figura: Definição dos versores radial (\hat{r}) e na direção do momento transferido (\hat{q}), tais que: $\hat{q} \cdot \hat{r} = -\cos \alpha$.

Vamos tomar um ponto S sobre este plano (diferente de X) e definir a distância radial como: $r = \overline{OS}$ (conforme a figura). \overline{OX} e o seu prolongamento \overline{OZ} são paralelos ao vetor \vec{q} , tal que: $\hat{q} \cdot \hat{r} = -\cos \alpha$.

Então: $\delta = (q/\hbar)\overline{OX}$.

Amplitude de espalhamento

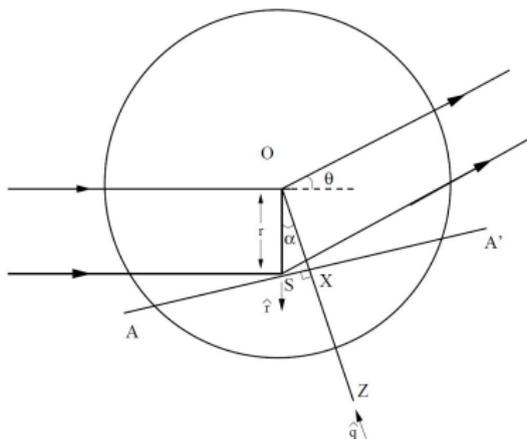


Figura: Definição dos versores radial (\hat{r}) e na direção do momento transferido (\hat{q}), tais que: $\hat{q} \cdot \hat{r} = -\cos \alpha$.

Vamos tomar um ponto S sobre este plano (diferente de X) e definir a distância radial como: $r = \overline{OS}$ (conforme a figura). \overline{OX} e o seu prolongamento \overline{OZ} são paralelos ao vetor \vec{q} , tal que: $\hat{q} \cdot \hat{r} = -\cos \alpha$.

Então: $\delta = (q/\hbar)\overline{OX} = (q/\hbar) r \cos \alpha$.

Amplitude de espalhamento

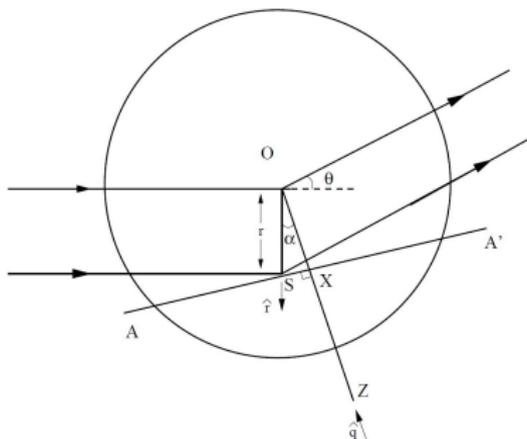


Figura: Definição dos versores radial (\hat{r}) e na direção do momento transferido (\hat{q}), tais que: $\hat{q} \cdot \hat{r} = -\cos \alpha$.

Vamos tomar um ponto S sobre este plano (diferente de X) e definir a distância radial como: $r = \overline{OS}$ (conforme a figura). \overline{OX} e o seu prolongamento \overline{OZ} são paralelos ao vetor \vec{q} , tal que: $\hat{q} \cdot \hat{r} = -\cos \alpha$.

Então: $\delta = (q/\hbar)\overline{OX} = (q/\hbar) r \cos \alpha = -\vec{q} \cdot \vec{r}/\hbar$.

Amplitude de espalhamento

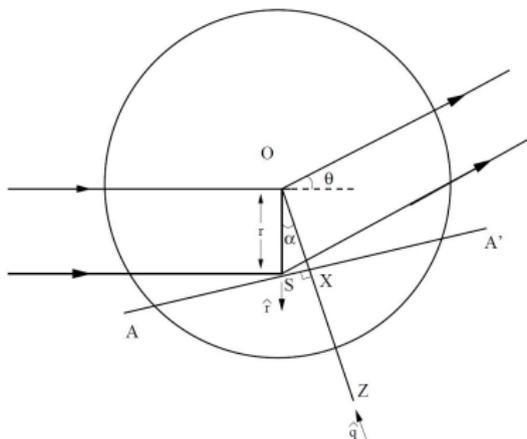
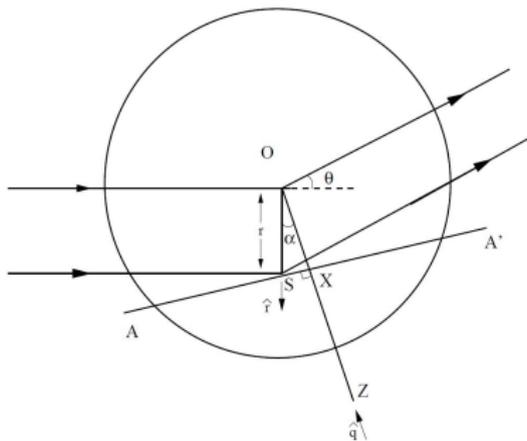


Figura: Definição dos versores radial (\hat{r}) e na direção do momento transferido (\hat{q}), tais que: $\hat{q} \cdot \hat{r} = -\cos \alpha$.

Vamos tomar um ponto S sobre este plano (diferente de X) e definir a distância radial como: $r = \overline{OS}$ (conforme a figura). \overline{OX} e o seu prolongamento \overline{OZ} são paralelos ao vetor \vec{q} , tal que: $\hat{q} \cdot \hat{r} = -\cos \alpha$.

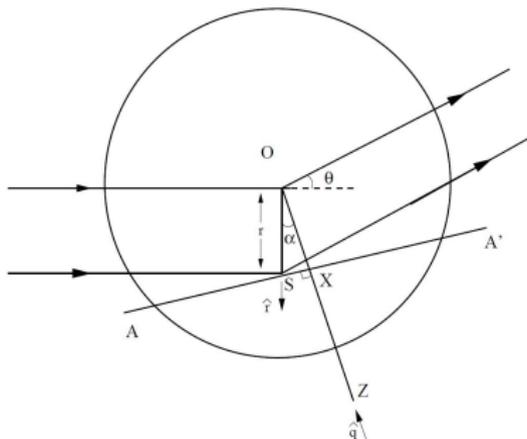
Então: $\delta = (q/\hbar)\overline{OX} = (q/\hbar)r \cos \alpha = -\vec{q} \cdot \vec{r}/\hbar \Rightarrow \boxed{\delta = -\vec{q} \cdot \vec{r}/\hbar}$.

Amplitude de espalhamento



A carga $\rho(r)dV$ é integrada sobre todo o núcleo

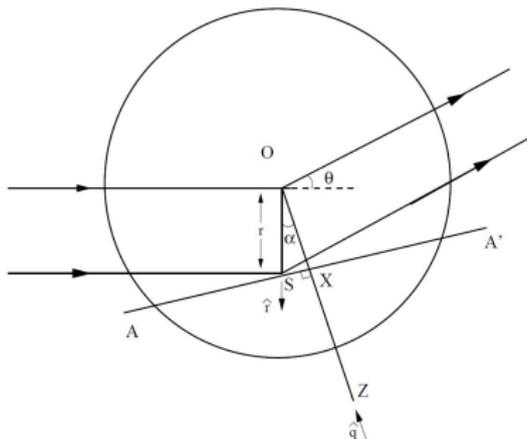
Amplitude de espalhamento



A carga $\rho(r)dV$ é integrada sobre todo o núcleo, onde o diferencial de volume é:

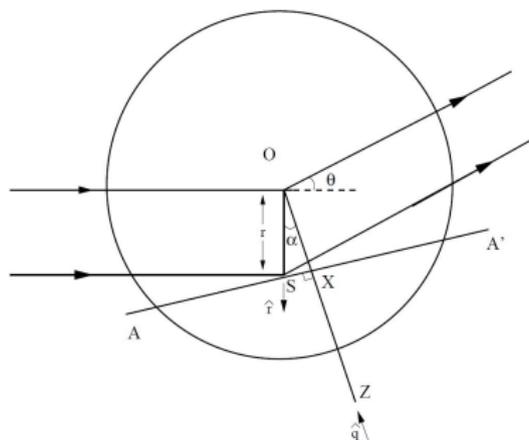
$$dV = r^2 dr \sin \alpha d\alpha d\beta$$

Amplitude de espalhamento



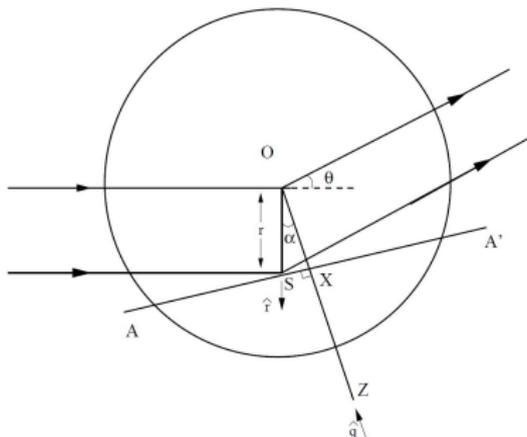
A carga $\rho(r)dV$ é integrada sobre todo o núcleo, onde o diferencial de volume é: $dV = r^2 dr \sin \alpha d\alpha d\beta$, onde β é o ângulo azimutal, saindo do plano da figura

Amplitude de espalhamento



A carga $\rho(r)dV$ é integrada sobre todo o núcleo, onde o diferencial de volume é: $dV = r^2 dr \sin \alpha d\alpha d\beta$, onde β é o ângulo azimutal, saindo do plano da figura e α o ângulo zenital (obs.: não confundir com o θ).

Amplitude de espalhamento

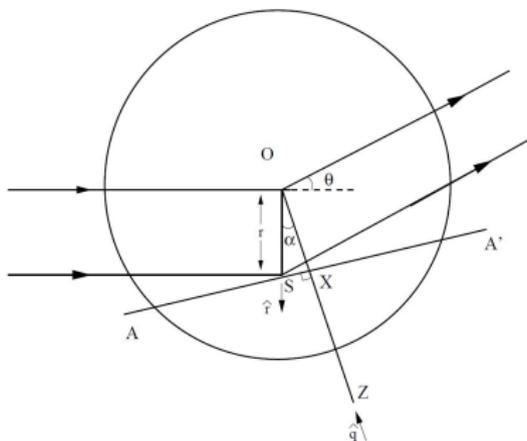


A carga $\rho(r)dV$ é integrada sobre todo o núcleo, onde o diferencial de volume é: $dV = r^2 dr \sin \alpha d\alpha d\beta$, onde β é o ângulo azimutal, saindo do plano da figura e α o ângulo zenital (obs.: não confundir com o θ).

Voltando agora à amplitude infinitesimal do espalhamento:

$$A(r, \theta) = \rho(r)dV \cdot f(\theta) \cdot e^{-i\delta}$$

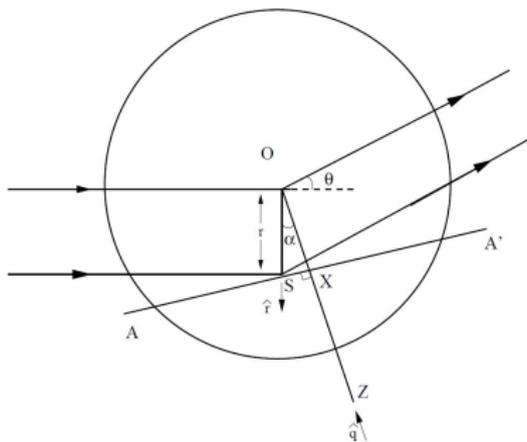
Amplitude de espalhamento



Voltando agora à amplitude infinitesimal do espalhamento:

$$A(r, \theta) = \rho(r) dV \cdot f(\theta) \cdot e^{-i\delta} = \rho(r) r^2 dr \sin \alpha d\alpha d\beta \cdot f(\theta) \cdot e^{i\vec{q} \cdot \vec{r} / \hbar}$$

Amplitude de espalhamento



Voltando agora à amplitude infinitesimal do espalhamento:

$$A(r, \theta) = \rho(r) dV \cdot f(\theta) \cdot e^{-i\delta} = \rho(r) r^2 dr \sin \alpha d\alpha d\beta \cdot f(\theta) \cdot e^{i\vec{q} \cdot \vec{r} / \hbar},$$

onde usamos que: $\delta = -\vec{q} \cdot \vec{r} / \hbar$.

Amplitude de espalhamento

A amplitude total do espalhamento é calculada integrando-se sobre todo o núcleo:

$$A(\theta) = f(\theta) \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \rho(r) r^2 dr \sin \alpha d\alpha d\beta e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar}.$$

Amplitude de espalhamento

A amplitude total do espalhamento é calculada integrando-se sobre todo o núcleo:

$$A(\theta) = 2\pi f(\theta) \int_0^\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr \sin \alpha d\alpha e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar}.$$

Amplitude de espalhamento

A amplitude total do espalhamento é calculada integrando-se sobre todo o núcleo:

$$A(\theta) = 2\pi f(\theta) \int_0^\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr \sin \alpha d\alpha e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar}.$$

Como a carga total é: $Ze = 2\pi \int_0^\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr \sin \alpha d\alpha$

Amplitude de espalhamento

A amplitude total do espalhamento é calculada integrando-se sobre todo o núcleo:

$$A(\theta) = 2\pi f(\theta) \int_0^\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr \sin \alpha d\alpha e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar}.$$

Como a carga total é: $Ze = 2\pi \int_0^\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr \sin \alpha d\alpha$, podemos escrever:

$$A(\theta) = Ze f(\theta) \frac{\int_0^\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr \sin \alpha d\alpha e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar}}{\int_0^\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr \sin \alpha d\alpha}$$

Amplitude de espalhamento

A amplitude total do espalhamento é calculada integrando-se sobre todo o núcleo:

$$A(\theta) = 2\pi f(\theta) \int_0^\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr \sin \alpha d\alpha e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar}.$$

Como a carga total é: $Ze = 2\pi \int_0^\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr \sin \alpha d\alpha$, podemos escrever:

$$A(\theta) = Ze f(\theta) \frac{\int_0^\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr \sin \alpha d\alpha e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar}}{\int_0^\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr \sin \alpha d\alpha} \equiv Ze f(\theta) F(q^2)$$

Fator de forma $F(q^2)$

A amplitude total do espalhamento é calculada integrando-se sobre todo o núcleo:

$$A(\theta) = 2\pi f(\theta) \int_0^\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr \sin \alpha d\alpha e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar}.$$

Como a carga total é: $Ze = 2\pi \int_0^\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr \sin \alpha d\alpha$, podemos escrever:

$$A(\theta) = Ze f(\theta) \frac{\int_0^\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr \sin \alpha d\alpha e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar}}{\int_0^\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr \sin \alpha d\alpha} \equiv Ze f(\theta) F(q^2),$$

onde $F(q^2)$ é a *amplitude do fator de forma* do núcleo

Fator de forma $F(q^2)$

A amplitude total do espalhamento é calculada integrando-se sobre todo o núcleo:

$$A(\theta) = 2\pi f(\theta) \int_0^\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr \sin \alpha d\alpha e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar}.$$

Como a carga total é: $Ze = 2\pi \int_0^\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr \sin \alpha d\alpha$, podemos escrever:

$$A(\theta) = Ze f(\theta) \frac{\int_0^\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr \sin \alpha d\alpha e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar}}{\int_0^\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr \sin \alpha d\alpha} \equiv Ze f(\theta) F(q^2),$$

onde $F(q^2)$ é a *amplitude do fator de forma* do núcleo, que altera o cálculo da seção de choque para:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{finito}} = |F(q^2)|^2 \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{puntual}}.$$

- 1 Densidade de carga nuclear
- 2 Fator de forma**
- 3 Exercícios

Fator de forma $F(q^2)$

O fator de forma determina o efeito da forma do núcleo no cálculo da seção de choque e, matematicamente, corresponde à transformada de Fourier da distribuição de carga do núcleo.

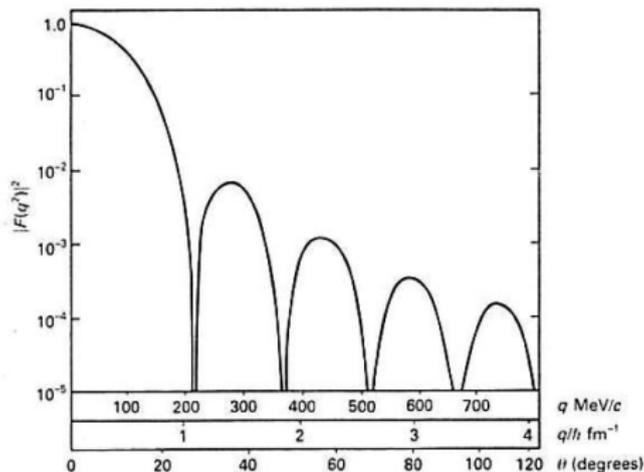


Figura: Intensidade do fator de forma de uma distribuição esférica de carga.

Fator de forma $F(q^2)$

O fator de forma determina o efeito da forma do núcleo no cálculo da seção de choque e, matematicamente, corresponde à transformada de Fourier da distribuição de carga do núcleo.

De uma forma mais compacta, podemos escrever:

$$F(q^2) = \frac{\int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} dV}{\int \rho(\vec{r}) dV}$$

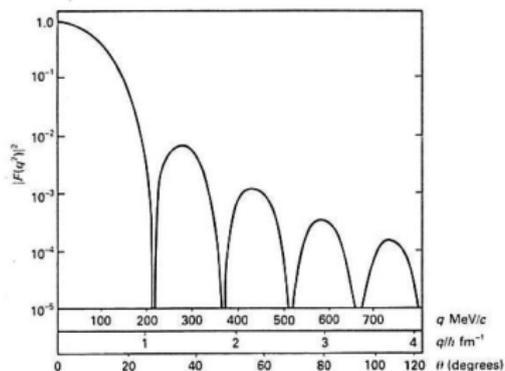


Figura: Intensidade do fator de forma de uma distribuição esférica de carga.

Fator de forma $F(q^2)$

O fator de forma determina o efeito da forma do núcleo no cálculo da seção de choque e, matematicamente, corresponde à transformada de Fourier da distribuição de carga do núcleo.

De uma forma mais compacta, podemos escrever:

$$F(q^2) = \frac{\int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} dV}{\int \rho(\vec{r}) dV} = \frac{1}{Ze} \int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} dV \quad (6)$$

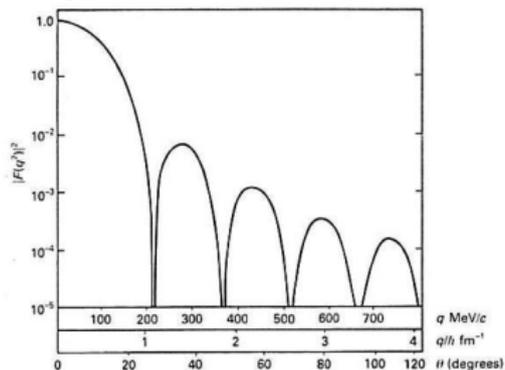


Figura: Intensidade do fator de forma de uma distribuição esférica de carga.

Exemplo 1:

Mostrar que para núcleos esfericamente simétricos o fator de forma é:

$$F(q^2) = \frac{4\pi\hbar}{Ze q} \int_0^\infty \rho(r) \sin(qr/\hbar) r dr$$

Exemplo 1:

Mostrar que para núcleos esfericamente simétricos o fator de forma é:

$$F(q^2) = \frac{4\pi\hbar}{Ze q} \int_0^\infty \rho(r) \sin(qr/\hbar) r dr$$

Partindo de:

$$F(q^2) = \frac{1}{Ze} \int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} dV$$

Exemplo 1:

Mostrar que para núcleos esféricamente simétricos o fator de forma é:

$$F(q^2) = \frac{4\pi\hbar}{Ze q} \int_0^\infty \rho(r) \sin(qr/\hbar) r dr$$

Partindo de:

$$F(q^2) = \frac{1}{Ze} \int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} dV = \frac{1}{Ze} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^\infty \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} r^2 dr d(\cos \alpha) d\beta$$

Exemplo 1:

Mostrar que para núcleos esfericamente simétricos o fator de forma é:

$$F(q^2) = \frac{4\pi\hbar}{Ze q} \int_0^\infty \rho(r) \sin(qr/\hbar) r dr$$

Partindo de:

$$\begin{aligned} F(q^2) &= \frac{1}{Ze} \int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} dV = \frac{1}{Ze} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^\infty \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} r^2 dr d(\cos \alpha) d\beta = \\ &= \frac{2\pi}{Ze} \int_{-1}^1 \int_0^\infty \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} r^2 dr d(\cos \alpha) \end{aligned}$$

Exemplo 1:

Mostrar que para núcleos esfericamente simétricos o fator de forma é:

$$F(q^2) = \frac{4\pi\hbar}{Ze q} \int_0^\infty \rho(r) \sin(qr/\hbar) r dr$$

Partindo de:

$$F(q^2) = \frac{1}{Ze} \int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} dV = \frac{2\pi}{Ze} \int_{-1}^1 \int_0^\infty \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} r^2 dr d(\cos \alpha)$$

Exemplo 1:

Mostrar que para núcleos esfericamente simétricos o fator de forma é:

$$F(q^2) = \frac{4\pi\hbar}{Ze q} \int_0^\infty \rho(r) \sin(qr/\hbar) r dr$$

Partindo de:

$$F(q^2) = \frac{1}{Ze} \int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} dV = \frac{2\pi}{Ze} \int_{-1}^1 \int_0^\infty \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} r^2 dr d(\cos \alpha)$$

e fazendo a integral em α :

$$\int_{-1}^1 e^{i(q/\hbar)r \cos \alpha} d(\cos \alpha) = \left. \frac{e^{i(q/\hbar)r \cos \alpha}}{iqr/\hbar} \right|_{-1}^{+1}$$

Exemplo 1:

Mostrar que para núcleos esfericamente simétricos o fator de forma é:

$$F(q^2) = \frac{4\pi\hbar}{Ze q} \int_0^\infty \rho(r) \sin(qr/\hbar) r dr$$

Partindo de:

$$F(q^2) = \frac{1}{Ze} \int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} dV = \frac{2\pi}{Ze} \int_{-1}^1 \int_0^\infty \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} r^2 dr d(\cos \alpha)$$

e fazendo a integral em α :

$$\int_{-1}^1 e^{i(q/\hbar)r \cos \alpha} d(\cos \alpha) = \frac{e^{i(q/\hbar)r \cos \alpha} \Big|_{-1}^{+1}}{iqr/\hbar} = \frac{1}{iqr/\hbar} \left[e^{i(qr/\hbar)} - e^{-i(qr/\hbar)} \right]$$

Exemplo 1:

Mostrar que para núcleos esfericamente simétricos o fator de forma é:

$$F(q^2) = \frac{4\pi\hbar}{Ze q} \int_0^\infty \rho(r) \sin(qr/\hbar) r dr$$

Partindo de:

$$F(q^2) = \frac{1}{Ze} \int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} dV = \frac{2\pi}{Ze} \int_{-1}^1 \int_0^\infty \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} r^2 dr d(\cos \alpha)$$

e fazendo a integral em α :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 e^{i(q/\hbar)r \cos \alpha} d(\cos \alpha) &= \left. \frac{e^{i(q/\hbar)r \cos \alpha}}{iqr/\hbar} \right|_{-1}^{+1} = \frac{1}{iqr/\hbar} \left[e^{i(qr/\hbar)} - e^{-i(qr/\hbar)} \right] = \\ &= \frac{2 \sin(qr/\hbar)}{qr/\hbar} \end{aligned}$$

Exemplo 1:

Mostrar que para núcleos esfericamente simétricos o fator de forma é:

$$F(q^2) = \frac{4\pi\hbar}{Ze q} \int_0^\infty \rho(r) \sin(qr/\hbar) r dr$$

Partindo de:

$$F(q^2) = \frac{1}{Ze} \int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} dV = \frac{2\pi}{Ze} \int_{-1}^1 \int_0^\infty \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} r^2 dr d(\cos \alpha)$$

e fazendo a integral em α :

$$\int_{-1}^1 e^{i(q/\hbar)r \cos \alpha} d(\cos \alpha) = \frac{2 \sin(qr/\hbar)}{qr/\hbar}$$

Exemplo 1:

Mostrar que para núcleos esfericamente simétricos o fator de forma é:

$$F(q^2) = \frac{4\pi\hbar}{Ze q} \int_0^\infty \rho(r) \sin(qr/\hbar) r dr$$

Portanto:

$$F(q^2) = \frac{2\pi}{Ze} \int_0^\infty \rho(r) \frac{2 \sin(qr/\hbar)}{qr/\hbar} r^2 dr$$

Exemplo 1:

Mostrar que para núcleos esfericamente simétricos o fator de forma é:

$$F(q^2) = \frac{4\pi\hbar}{Ze q} \int_0^\infty \rho(r) \sin(qr/\hbar) r dr$$

Portanto:

$$F(q^2) = \frac{2\pi}{Ze} \int_0^\infty \rho(r) \frac{2 \sin(qr/\hbar)}{qr/\hbar} r^2 dr = \frac{4\pi\hbar}{Ze q} \int_0^\infty \rho(r) \sin(qr/\hbar) r dr$$



- 1 Densidade de carga nuclear
- 2 Fator de forma
- 3 Exercícios**

Exercícios

1. Mostrar que o fator de forma para a distribuição de carga do modelo I é:

$$F(q^2) = 3 \left[\frac{\sin(qa/\hbar) - (qa/\hbar) \cos(qa/\hbar)}{(qa/\hbar)^3} \right].$$

Exercícios

- 2 Calcule o fator de forma para a distribuição de carga:

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{e^{-r/a}}{r}.$$