Notas de Aula de Eletrodinâmica Clássica

Prof. Dr. Marcelo Augusto Leigui de Oliveira
Pós-Graduação em Física - UFABC

1) Cálculo Vetorial - Notação de índices repetidos

Seja um vetor $\vec{v}$ de componentes v_i, onde $i = 1, 2, 3, ...$ e analogamente os vetores $\vec{w}$, $\vec{u}$ e $\vec{m}$.O produto escalar entre dois vetores é:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \Sigma_i v_i w_i \equiv v_i w_i, \tag{1}$$

onde utilizamos a notação de componentes, ou de índices repetidos (a soma está implícita).

Vejam outros exemplos:

1. $\Sigma_i v_i v_i \equiv v_i v_i = v_1 v_1 + v_2 v_2 + v_3 v_3 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^3 = |\vec{v}|^2$
2. $\Sigma_i \Sigma_j v_i w_i u_j m_j = v_i w_i u_j m_j = (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3)(u_1 m_1 + u_2 m_2 + u_3 m_3) = (\vec{v} \cdot \vec{w})(\vec{u} \cdot \vec{m})$
   Definindo-se o delta de Kronecker:
   $$\delta_{ij} = \begin{cases} \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1 \\ \delta_{ij} = 0, \text{para } i \neq j \end{cases} \tag{2}$$
3. $$\delta_{ij} v_j = \delta_{i1} v_1 + \delta_{i2} v_2 + \delta_{i3} v_3 = \left\{ \begin{array}{l} v_1, \text{se } i = 1 \\ v_2, \text{se } i = 2 \\ v_3, \text{se } i = 3 \end{array} \right\} = v_i \Rightarrow \delta_{ij} v_j = v_i$$
4. $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$
   Definindo-se o tensor de Levi-Civita:
   $$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} \epsilon_{123} = \epsilon_{312} = \epsilon_{231} = 1, \text{para permutações cíclicas (ou pares) da ordem natural;} \\ \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = \epsilon_{132} = -1, \text{para permutações não-cíclicas (ou ímpares) da ordem natural;} \\ \text{todos os outros } \epsilon \text{ (com índices repetidos) são zero, p.ex.: } \epsilon_{111} = \epsilon_{112} = ... = 0. \end{cases}$$
5. Produto vetorial:
   $$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \hat{i}(v_y w_z - v_z w_y) + \hat{j}(v_z w_x - v_x w_z) + \hat{k}(v_x w_y - v_y w_x)$$

   Adotando-se a convenção $i = 1, j = 2, k = 3$:
   $$(\vec{v} \times \vec{w})_i = (\vec{v} \times \vec{w})_1$$
   $$(\vec{v} \times \vec{w})_j = (\vec{v} \times \vec{w})_2$$
   $$(\vec{v} \times \vec{w})_k = (\vec{v} \times \vec{w})_3,$$

e inspecionando-se uma das componentes, vemos que:

$$(\vec{v}\times\vec{w})_i = (\vec{v}\times\vec{w})_1 = v_2w_3 - v_3w_2 = \epsilon_{123}v_2w_3 + \epsilon_{132}v_3w_2 =$$

$$= \epsilon_{111}v_1w_1 + \epsilon_{112}v_1w_2 + \epsilon_{113}v_1w_3 +$$

$$+\epsilon_{121}v_2w_1 + \epsilon_{122}v_2w_2 + \epsilon_{123}v_1w_3 +$$

$$+\epsilon_{131}v_3w_1 + \epsilon_{132}v_3w_2 + \epsilon_{133}v_3w_3 =$$

$$= \Sigma_{j,k}\epsilon_{1jk}v_jw_k = \Sigma_{j,k}\epsilon_{ijk}v_jw_k = \epsilon_{ijk}v_jw_k$$

Analogamente:

$$(\vec{v}\times\vec{w})_j = \epsilon_{jki}v_kw_i$$

$$(\vec{v}\times\vec{w})_k = \epsilon_{kij}v_iw_j$$

6.

$$(\vec{v}\times(\vec{w}\times\vec{u}))_i = \epsilon_{ijk}v_j(\vec{w}\times\vec{u})_k = \epsilon_{ijk}v_j\epsilon_{klm}w_lu_m = \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}v_jw_lu_m = \epsilon_{kij}\epsilon_{klm}v_jw_lu_m,$$

onde, na última passagem, fizemos uma rotação cíclica nos índices de $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij}$, o que não altera o seu valor.

Agora, notemos que $\epsilon_{kij}\epsilon_{klm}$ é um produto de 2 números que só podem ser 0, 1 ou -1 e que o produto é feito somando-se sobre o índice repetido k:

$$\epsilon_{kij}\epsilon_{klm} = \epsilon_{1ij}\epsilon_{1lm} + \epsilon_{2ij}\epsilon_{2lm} + \epsilon_{3ij}\epsilon_{3lm}.$$

Inspecionando-se um destes termos (o primeiro), vemos que o produto não é nulo somente quando:

$$\epsilon_{1ij}\epsilon_{1lm} \neq 0, \text{ para:} \begin{cases} \epsilon_{123}\epsilon_{123} = \epsilon_{132}\epsilon_{132} = & 1, \quad \text{se } i = l, j = m \\ \epsilon_{123}\epsilon_{132} = \epsilon_{132}\epsilon_{123} = & -1, \quad \text{se } i = m, j = l \end{cases}$$

e, analogamente, obtemos o mesmo resultado para os segundo e terceiro termos.

Assim:

$$\epsilon_{kij}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta jl,$$

de onde:

$$\begin{aligned}(\vec{v}\times(\vec{w}\times\vec{u}))_i &= \epsilon_{kij}\epsilon_{klm}v_jw_lu_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta jl)v_jw_lu_m = \delta_{il}\delta_{jm}v_jw_lu_m - \delta_{im}\delta jlv_jw_lu_m = \\ &= \delta_{il}v_jw_lu_j - \delta_{im}v_jw_ju_m = v_jw_iu_j - v_jw_ju_i = (\vec{v}\cdot\vec{u})w_i - (\vec{v}\cdot\vec{w})u_i \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\vec{v}\times(\vec{w}\times\vec{u}) = (\vec{v}\cdot\vec{u})\vec{w} - (\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{u}.$$

I. LISTA DE EXERCÍCIOS:

Utilizando-se da notação de componentes, onde $(\vec{\nabla}\phi)_i = \partial_i\phi$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \partial_i v_i$ e $(\vec{\nabla}\times\vec{v})_i = \epsilon_{ijk}\partial_j v_k$:

1. Expresse as equações de Maxwell;
2. Derive a equação da continuidade, a partir das equações de Maxwell.
3. Mostre as igualdades vetoriais abaixo com a notação de componentes:
   (a) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$
   (b) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$
   (c) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$
   (d) $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\psi = 0$
   (e) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{a}) = 0$
   (f) $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{a}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}) - \nabla^2\vec{a}$
   (g) $\vec{\nabla}\cdot(\psi\vec{a}) = \vec{a}\cdot\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla}\cdot\vec{a}$
   (h) $\vec{\nabla}\times(\psi\vec{a}) = \vec{\nabla}\psi\times\vec{a} + \psi\vec{\nabla}\times\vec{a}$
   (i) $\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b} + (\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a} + \vec{a}\times(\vec{\nabla}\times\vec{b}) + \vec{b}\times(\vec{\nabla}\times\vec{a})$
   (j) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{a}) - \vec{a}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{b})$
   (k) $\vec{\nabla}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}(\vec{\nabla}\cdot\vec{b}) - \vec{b}(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}) + (\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b}$
4. Sejam $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ e $\hat{n} = \vec{r}/|\vec{r}|$, mostre que:
   (a) $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\vec{r}/r^3$
   (b) $\vec{\nabla}\cdot\vec{r} = 3$ e $\vec{\nabla}\times\vec{r} = 0$
   (c) $\vec{\nabla}\cdot\hat{n} = 2/r$ e $\vec{\nabla}\times\hat{n} = 0$
   (d) $(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\hat{n} = \frac{1}{r}\left[\vec{a} - \hat{n}(\vec{a}\cdot\hat{n})\right] \equiv \vec{a}_\perp/r$