Cálculo Vetorial

Seja um vetor $\vec{V}$ de componentes V_i, onde $i = 1, 2, 3$
analogamente w_i, u_i, m_i

$(\vec{V} + \vec{W})_i = V_i + W_i$

$(\alpha \vec{V})_i = \alpha V_i$, onde α é um escalar

produto escalar: $\vec{V} \cdot \vec{W} = \sum_i V_i W_i \equiv V_i W_i$
$\uparrow$ notação de índices repetidos (a soma está implícita)

ex. 1) $\sum_i V_i V_i \equiv V_i V_i = V_1 V_1 + V_2 V_2 + V_3 V_3 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 = |\vec{V}|^2$

ex. 2) $\sum_i \sum_j V_i W_i u_j m_j = V_i W_i u_j m_j = (V_1 W_1 + V_2 W_2 + V_3 W_3)(u_1 m_1 + u_2 m_2 + u_3 m_3) = (\vec{V} \cdot \vec{W})(\vec{u} \cdot \vec{m})$

delta de Kronecker: $\delta_{ij} \begin{cases} \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1 \\ \delta_{ij} = 0, \text{ para } i \neq j \end{cases}$

ex. 3) $\delta_{ij} V_j = \delta_{i1} V_1 + \delta_{i2} V_2 + \delta_{i3} V_3 \left.\begin{aligned} &= V_1, \text{ se } i = 1 \\ &= V_2, \text{ se } i = 2 \\ &= V_3, \text{ se } i = 3 \end{aligned}\right\} = V_i \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\delta_{ij} V_j = V_i}$

ex. 4) $\delta_{ii} = 3 = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33}$

tensor de Levi-Civita: $\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} \varepsilon_{123} = \varepsilon_{312} = \varepsilon_{231} = 1, \text{ permutações pares} \\ \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = -1, \text{ permutações ímpares} \\ \text{outros } \varepsilon\text{'s são zero}: \varepsilon_{112} = 0, \text{ etc} \end{cases}$

ex. 5) produto vetorial: $\vec{V} \times \vec{W} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ V_x & V_y & V_z \\ W_x & W_y & W_z \end{vmatrix} =$

$= \hat{i}(V_y W_z - V_z W_y) + \hat{j}(V_z W_x - V_x W_z) + \hat{k}(V_x W_y - V_y W_x)$

$(\vec{v}\times\vec{w})_i = (\vec{v}\times\vec{w})_1 = v_2w_3 - v_3w_2 = \varepsilon_{123}\, v_2w_3 + \varepsilon_{132}\, v_3w_2 =$

$= \varepsilon_{ijk}\, v_j w_k \equiv \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk}\, v_j w_k$

$(\vec{v}\times\vec{w})_j = \varepsilon_{jki}\, v_k w_i$

$(\vec{v}\times\vec{w})_k = \varepsilon_{kij}\, v_i w_j$

ex. 6) $(\vec{v}\times(\vec{w}\times\vec{u}))_i = \varepsilon_{ijk}\, v_j (\vec{w}\times\vec{u})_k = \varepsilon_{ijk}\, v_j\, \varepsilon_{klm}\, w_l u_m =$

$= \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{klm}\, v_j w_l u_m$

$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \varepsilon_{kij}\,\varepsilon_{klm} = \varepsilon_{1ij}\,\varepsilon_{1lm} + \varepsilon_{2ij}\,\varepsilon_{2lm} + \varepsilon_{3ij}\,\varepsilon_{3lm}$

$\varepsilon_{1ij}\,\varepsilon_{1lm} \neq 0$ para $\begin{cases} i=2,\ j=3 & \begin{cases} l=2,\ m=3 \Rightarrow \varepsilon_{123}\,\varepsilon_{123} = 1 \\ l=3,\ m=2 \Rightarrow \varepsilon_{123}\,\varepsilon_{132} = -1 \end{cases} \\ i=3,\ j=2 & \begin{cases} l=2,\ m=3 \Rightarrow \varepsilon_{132}\,\varepsilon_{123} = -1 \\ l=3,\ m=2 \Rightarrow \varepsilon_{132}\,\varepsilon_{132} = 1 \end{cases} \end{cases}$

ou seja: $\begin{cases} 1, & \text{se } i=l \text{ e } j=m \\ -1, & \text{se } i=m \text{ e } j=l \end{cases}$

e analogamente para o 2° e o 3° termo

então

$$\boxed{\varepsilon_{kij}\,\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\,\delta_{jm} - \delta_{im}\,\delta_{jl}}$$

daí

$(\vec{v}\times(\vec{w}\times\vec{u}))_i = \varepsilon_{kij}\,\varepsilon_{klm}\, v_j w_l u_m = (\delta_{il}\,\delta_{jm} - \delta_{im}\,\delta_{jl})\, v_j w_l u_m =$

$= \delta_{il}\,\delta_{jm}\, v_j w_l u_m - \delta_{im}\,\delta_{jl}\, v_j w_l u_m =$

$= \delta_{il}\, v_j w_l u_j - \delta_{im}\, v_j w_j u_m = v_j w_i u_j - v_j w_j u_i =$

$= (\vec{v}\cdot\vec{u})\, w_i - (\vec{v}\cdot\vec{w})\, u_i \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\vec{v}\times(\vec{w}\times\vec{u}) = (\vec{v}\cdot\vec{u})\vec{w} - (\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{u}}$

operador diferencial nabla $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \Rightarrow \nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \equiv \partial_i$

gradiente: $(\vec{\nabla}\varphi)_i = \partial_i \varphi$ — φ: função escalar

divergente: $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \partial_i F_i$ — $\vec{F}$: campo vetorial

rotacional: $(\vec{\nabla}\times\vec{F})_i = \varepsilon_{ijk}\,\partial_j F_k$

ex. 7) rotacional do gradiente: $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\varphi$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\psi)_i = \varepsilon_{ijk}\,\partial_j\partial_k\psi = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\,\partial x_k} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_k\,\partial x_j} =$$

troca de índices para não assustar!

$$= \varepsilon_{ilm}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_m\,\partial x_l} = -\varepsilon_{iml}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_m\,\partial x_l} = -\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\,\partial x_k} = -\varepsilon_{ijk}\,\partial_j\partial_k\psi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{ijk}\,\partial_j\partial_k\psi = -\varepsilon_{ijk}\,\partial_j\partial_k\psi \Rightarrow (\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\psi)_i = 0\,,\ \forall i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\psi = 0}$$

ex. 8) divergente do rotacional: $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{F}$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{F} = \partial_i\,\varepsilon_{ijk}\,\partial_j F_k = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2 F_k}{\partial x_i\,\partial x_j} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2 F_k}{\partial x_j\,\partial x_i} =$$

$$= \varepsilon_{mlk}\frac{\partial^2 F_k}{\partial x_l\,\partial x_m} = -\varepsilon_{lmk}\frac{\partial^2 F_k}{\partial x_l\,\partial x_m} = -\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2 F_k}{\partial x_i\,\partial x_j} =$$

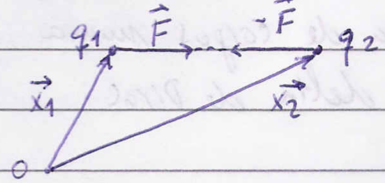
$$= -\partial_i\,\varepsilon_{ijk}\,\partial_j F_k \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0}$$

Eletrostática

Estudo dos fenômenos que envolvem distribuições de cargas e campos independentes do tempo

1) A lei de Coulomb

Charles de Coulomb (1785)



força sobre q_1: $\vec{F} = K q_1 q_2 \dfrac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}$

→ variação com o inverso do quadrado da distância

→ força central

→ superposição linear

nos sists. esu, gauss: $K = 1$, $[q] = stC$ (stat coulomb)

no SI (adotado): $K = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 10^{-7} c^2 = 8987551787 \simeq 9 \cdot 10^9$

permissividade do vácuo $\varepsilon_0 = 8{,}854\,187\,817 \times 10^{-12}\ F/m$

$[q] = C$ (coulomb), $1C = 3 \cdot 10^9\ stC$

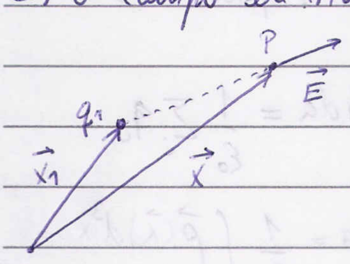
$F[N] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{D^2} = 9 \cdot 10^9\ 1C^2/1m^2 = 9 \cdot 10^9 N = 9 \cdot 10^9 \cdot 10^5\ \text{dina} = 9 \cdot 10^9 \cdot 10^5\ 1statC^2/1cm^2 = 9 \cdot 10^{18}\ 1statC^2/1m^2$

carga elementar (1 elétron): $e = 1{,}602\,176\,462\,(63) \times 10^{-19}\ C$

$e = 4{,}803\,204\,20\,(19) \times 10^{-10}\ stC$

const. de estrutura fina: $\alpha = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} = \dfrac{K e^2}{\hbar c} \simeq \dfrac{1}{137}$

2) O campo elétrico: $\vec{E}(\vec{x})$, $\vec{F} = q\vec{E}$



$\vec{E}(\vec{x}) = K q_1 \dfrac{\vec{x} - \vec{x}_1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|^3} = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{\vec{x} - \vec{x}_1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|^3}$

sistema de n cargas q_i localizadas em $\vec{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$

$\vec{E}(\vec{x}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i \dfrac{\vec{x} - \vec{x}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3}$

Se as cargas forem pequenas e numerosas o suficiente para serem descritas por uma densidade de carga $\rho(\vec{x}')$:

$$dq = \rho(\vec{x}')\, d^3x' \implies \vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho(\vec{x}')\,\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\, d^3x'$$

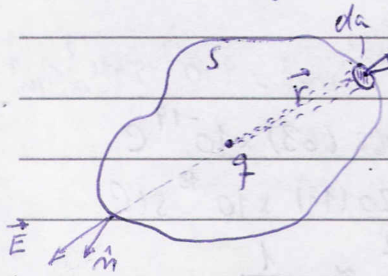
Podemos transformar uma distribuição discreta de cargas numa densidade de cargas, através da função delta de Dirac:

$$\rho(\vec{x}') = \sum_i q_i\, \delta(\vec{x}'-\vec{x}_i)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho(\vec{x}')\,\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\, d^3x' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \sum_i q_i\, \delta(\vec{x}'-\vec{x}_i)\,\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\, d^3x' =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i q_i \int \delta(\vec{x}'-\vec{x}_i)\,\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\, d^3x' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i q_i\, \frac{\vec{x}-\vec{x}_i}{|\vec{x}-\vec{x}_i|^3}.$$

3) A lei de Gauss Johann Carl Friedrich Gauss (1835 form, 1867 publ)



$$\vec{E}\cdot\hat{n}\, da = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2}\, da = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\, d\Omega$$

$d\Omega$ = ângulo sólido subentendido por da

lei de Gauss: $$\oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\, da = \begin{cases} q/\varepsilon_0, & \text{se } q \text{ estiver dentro de } S \\ 0, & \text{se } q \text{ estiver fora de } S \end{cases}$$

para uma distribuição discreta de cargas (dentro de S): $\oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\, da = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i$

para uma distribuição contínua de cargas (dentro de S): $\oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\, da = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{x})\, d^3x$

onde V é o volume compreendido por S

4) Forma diferencial

Teorema da divergência: $\oint_S \vec{A}\cdot\hat{n}\,da = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,d^3x$

$$\oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,da = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,d^3x = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{x})\,d^3x \Rightarrow \int_V\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)d^3x = 0$$

para V arbitrário: $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$ lei de Gauss na forma diferencial

com esta equação resolvemos problemas de eletrostática. Contudo, é mais fácil trabalhar com grandezas escalares. Além disso, a divergência não especifica as 3 componentes de $\vec{E}$, devemos saber o rotacional também.

5) Potencial escalar

do gradiente: $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$

transladando a origem, vem: $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) = -\left[\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\right]$

$$\left[\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)\right]_i = \partial_i\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{\sqrt{x_j x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_i}[x_j x_j]^{-1/2} = -\frac{1}{2}\frac{2x_i}{(x_j x_j)^{3/2}} = -\frac{x_i}{r^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} = -\frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{x}{r^3}$$

então o campo elétrico pode ser expressado como o gradiente de uma função escalar:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\int\frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'$$

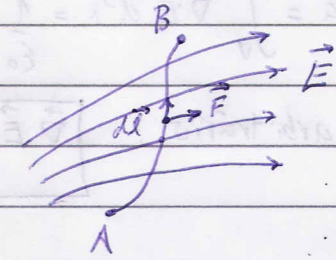
como para toda ψ bem comportada: $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\psi = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{x}) = 0}$

Define-se então o <u>potencial escalar</u> $\phi(\vec{x})$ pela equação $\boxed{\vec{E} = -\nabla\phi}$

de forma que: $$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{x}')\,d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

e $\phi(\vec{x})$ é definida a menos de uma constante aditiva arbitrária

Considere uma carga de prova q transportada de um ponto A para outro ponto B



força: $\vec{F} = q\vec{E}$ e o trabalho realizado <u>sobre</u> a carga é:

$$W = -\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = -q\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = q\int_A^B \vec{\nabla}\phi\cdot d\vec{l} = q\int_A^B \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\,dx_i$$

$$= q\int_A^B \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = q\int_A^B d\phi = q(\phi_B - \phi_A)$$

então $q\phi$ é a energia potencial da carga de prova no campo eletrostático

Verificamos que W é independente do caminho, então a força é dita <u>conservativa</u> e $\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = -(\phi_B - \phi_A)$

Se a trajetória for fechada: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$

que também pode ser obtido da lei de Coulomb:

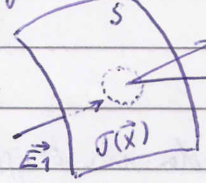
Seja $\vec{A}(\vec{x})$ um campo vetorial bem comportado e C uma curva fechada delimitando uma superfície S aberta, pelo teorema de Stokes, vem:

$$\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\hat{n}\,da \Rightarrow \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot\hat{n}\,da = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0}$$

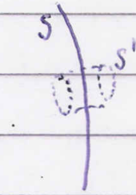
na eletrostática (para campos $\vec{E}$ independentes do tempo) o rotacional é sempre nulo

Seja S uma superfície carregada com densidade superficial $\sigma(\vec{x}')$



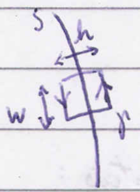
da lei de Gauss (em uma gaussiana S')

$$\int_{S'} \vec{E}\cdot\hat{n}\,da = \frac{q}{\varepsilon_0} = \int_{S'} \frac{\sigma(\vec{x}')\,da}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$



$$\int_{S'} \left[(\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\cdot\hat{n} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \right] da = 0$$

como S' é arbitrária: $\boxed{(\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\cdot\hat{n} = \sigma/\varepsilon_0}$, ou seja,
a componente normal de $\vec{E}$ tem uma descontinuidade de σ/ε_0



tomando agora um caminho γ em torno da superfície S:

$$\oint_{\gamma} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{S''} (\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot\hat{n}\,da = 0 \Rightarrow E_{2t}\cdot w + E_n\cdot h - E_{1t}\cdot w - E_n\cdot h = 0$$

$(h \ll w)$

no limite $h \to 0$: $\boxed{E_{2t} = E_{1t}}$, ou seja,
a componente tangencial de $\vec{E}$ é contínua

6) As equações de Poisson e Laplace

O campo $\vec{E}$ eletrostático é descrito por 2 equações diferenciais:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\nabla\phi \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot(-\nabla\phi) = \rho/\varepsilon_0 \Rightarrow$$

$\boxed{\nabla^2\phi = -\rho/\varepsilon_0}$ que é a Equação de Poisson

em regiões livre de cargas: $\boxed{\nabla^2\phi = 0}$ que é a Equação de Laplace

da solução para o potencial escalar:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x' \Rightarrow \nabla^2\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \rho(\vec{x}')\, \nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) d^3x'$$

Calculemos inicialmente o laplaciano de $1/r$

i) para $r \neq 0$: $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left(r \cdot \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(1) = 0$

ii) para $r=0$: integrando numa pequena esfera centrada na origem:

$$\int_V \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) d^3x = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) d^3x = \int_S \left[\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\cdot\hat{r}\, da =$$

$$= \int_S \frac{-\hat{r}}{r^2}\cdot\hat{r}\, da = -\int_S \frac{r^2 d\Omega}{r^2} = -4\pi$$

então

i) $\nabla^2(1/r) = 0, \quad r\neq 0 \Rightarrow \int_V \nabla^2(1/r)\, d^3x = 0, \quad r \neq 0$

ii) $\int_V \left[-\frac{\nabla^2(1/r)}{4\pi}\right] d^3x = 1, \quad r=0 \in V$

estas são as propriedades da função delta de Dirac, então:

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\,\delta(\vec{x})$$

generalizando : $\boxed{\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) = -4\pi\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')}$

daí:

$$\nabla^2\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho(\vec{x}')\,\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) d^3x' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho(\vec{x}')\left[-4\pi\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')\right] d^3x' =$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho(\vec{x}')\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')\, d^3x' = -\frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0}$$

comprovando o resultado acima