Teorema de Green

Jorge Green (1824)

Seja o teorema da divergência: $\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,d^3x = \oint_S \vec{A}\cdot\hat{n}\,da$

e sejam 2 campos escalares φ e ψ e $\vec{A} = \varphi\vec{\nabla}\psi$, $\vec{A}' = \psi\vec{\nabla}\varphi$

então: $\vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{\nabla}\psi) = \varphi\nabla^2\psi + \vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}\psi$

$\varphi\vec{\nabla}\psi\cdot\hat{n} = \varphi\dfrac{\partial\psi}{\partial n}$, onde $\dfrac{\partial\psi}{\partial n}$ é a derivada normal à superfície S

1ª identidade de Green: $\displaystyle\int_V (\varphi\nabla^2\psi + \vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}\psi)\,d^3x = \oint_S \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\,da$

usando agora $\vec{A}'$: $\displaystyle\int_V (\psi\nabla^2\varphi + \vec{\nabla}\psi\cdot\vec{\nabla}\varphi)\,d^3x = \oint_S \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,da$

subtraindo as igualdades vem o teorema de Green: (2ª identidade de Green)

$$\boxed{\int_V (\varphi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\varphi)\,d^3x = \oint_S \left[\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]da}$$

tomando, em particular, $\psi = \dfrac{1}{R} \equiv \dfrac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$, $\nabla^2\psi = -4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')$

$\varphi = \phi$, $\nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon_0$

vem: $\displaystyle\int_V \left[-4\pi\phi(\vec{x}')\delta(\vec{x}-\vec{x}') + \frac{\rho(\vec{x}')}{\varepsilon_0 R}\right]d^3x' = \oint_S \left[\phi\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial\phi}{\partial n'}\right]da' \Rightarrow$

$$\Rightarrow \phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{R}\,d^3x' + \frac{1}{4\pi}\oint_S \left[\frac{1}{R}\frac{\partial\phi}{\partial n'} - \phi\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right)\right]da'$$

onde o 1º termo é conhecido e o 2º termo indica que temos que especificar em S condições em ϕ e $\partial\phi/\partial n'$ (condições de contorno de Cauchy), mesmo quando o volume V é livre de cargas (eq. Laplace).

Mas, basta especificar uma delas:

$S \to \infty$, voltamos à solução $\phi(\vec{x}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{R}\,d^3x'$

Unicidade das soluções com condições de contorno

Imaginemos 2 soluções ϕ_1 e ϕ_2 e seja: $U = \phi_2 - \phi_1$

$\Rightarrow \nabla^2 U = \nabla^2\phi_2 - \nabla^2\phi_1 = -\rho/\varepsilon_0 + \rho/\varepsilon_0 = 0 \Rightarrow \nabla^2 U = 0$ no interior de V

Condição de contorno de Dirichlet: sobre uma superfície fechada define-se um único potencial: $U = \phi_2 - \phi_1 = 0 \Rightarrow \phi_2 = \phi_1$

Condição de contorno de Neumann: Sobre uma superfície fechada define-se uma única derivada normal do potencial (campo elétrico):

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial \phi_2}{\partial n} - \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = 0 \Rightarrow \phi_2 = \phi_1 + \text{constante}$$

da 1ª igualdade de Green com $\varphi = \psi = U$, vem:

$$\int_V (U \nabla^2 \overset{0}{U} + \vec{\nabla} U \cdot \vec{\nabla} U) d^3x = \oint_S U \frac{\partial U}{\partial n} da \Rightarrow \int_V |\vec{\nabla} U|^2 d^3x = 0 \Rightarrow$$

$\hookrightarrow = 0$ (Neumann) ou

$\hookrightarrow = 0$ (Dirichlet)

$\Rightarrow \vec{\nabla} U = 0 \Rightarrow U$ é constante no interior de V

Vimos que $\nabla'^2 \left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right) = -4\pi \delta(\vec{x}-\vec{x}')$, de um modo geral $\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$ é uma função pertencente a uma classe de funções chamadas funções de Green que satisfazem: $\nabla'^2 G(\vec{x},\vec{x}') = -4\pi \delta(\vec{x}-\vec{x}')$ cuja solução é: $G(\vec{x},\vec{x}') = G(\vec{x}',\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + F(\vec{x},\vec{x}')$

com a função $F(\vec{x},\vec{x}')$ satisfazendo à equação de Laplace: $\nabla'^2 F(\vec{x},\vec{x}') = 0$

Fazendo $\varphi = \phi$, $\psi = G(\vec{x},\vec{x}')$, vem a solução formal da equação de Poisson:

$$\boxed{\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \rho(\vec{x}') G(\vec{x},\vec{x}') d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[G(\vec{x},\vec{x}') \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi(\vec{x}') \frac{\partial G}{\partial n'}(\vec{x},\vec{x}') \right] da'}$$

na condição de contorno de Dirichlet: $G_D(\vec{x},\vec{x}') = 0$ para $\vec{x}'$ sobre S

$$\Rightarrow \phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \rho(\vec{x}') G_D(\vec{x},\vec{x}') d^3x' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \phi(\vec{x}') \frac{\partial G_D}{\partial n'} da'$$

na condição de contorno de Neumann, contudo, a escolha não pode ser $\frac{\partial G_N}{\partial n'}(\vec{x},\vec{x}') = 0$ para $\vec{x}'$ sobre S, pois

$$\int_S \frac{\partial G_N}{\partial n'}(\vec{x},\vec{x}') da' = \int_S \hat{n}' \cdot \vec{\nabla}' G_N(\vec{x},\vec{x}') da' = \int_V \vec{\nabla}' \cdot \vec{\nabla}' G_N(\vec{x},\vec{x}') d^3x' =$$

$$= \int_V \nabla'^2 G_N(\vec{x},\vec{x}') d^3x' = \int_V -4\pi \delta(\vec{x},\vec{x}') d^3x' = -4\pi \neq 0$$

assim não podemos exigir que $\frac{\partial G_N}{\partial n}(\vec{x},\vec{x}') = 0$

A possibilidade mais simples é:

$$\frac{\partial G_N(\vec{x},\vec{x}')}{\partial n'} = -\frac{4\pi}{S} \quad \text{para } \vec{x}' \text{ sobre } S$$

onde S é a área da fronteira, assim:

$$\Rightarrow \phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{x}')G_N(\vec{x},\vec{x}')d^3x' + \frac{1}{4\pi}\oint_S\left[G_N(\vec{x},\vec{x}')\frac{\partial\phi(\vec{x}')}{\partial n'} + \frac{4\pi\phi(\vec{x}')}{S}\right]da' \Rightarrow$$

$$\rightarrow \phi(\vec{x}) = \langle\phi\rangle_S + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{x}')G_N(\vec{x},\vec{x}')d^3x' + \frac{1}{4\pi}\oint_S G_N(\vec{x},\vec{x}')\frac{\partial\phi(\vec{x}')}{\partial n'}da'$$

onde $\langle\phi\rangle_S \equiv \frac{1}{S}\oint\phi(\vec{x}')da'$ é o valor médio do potencial sobre a superfície S

A presença do termo $\langle\phi\rangle_S$ é coerente com o fato de que na condição de Neumann o potencial é definido a menos de uma constante.

Simetria da função de Green: na condição de Dirichlet, sejam $\varphi(\vec{y}) = G(\vec{x},\vec{y})$ e $\psi(\vec{y}) = G(\vec{x}',\vec{y})$ e usando o teorema de Green integrando na variável y:

$$\int_V d^3y\left[G(\vec{x},\vec{y})\nabla^2G(\vec{x}',\vec{y}) - G(\vec{x}',\vec{y})\nabla^2G(\vec{x},\vec{y})\right] = \oint_S d^2y\left[G(\vec{x},\vec{y})\frac{\partial G(\vec{x}',\vec{y})}{\partial n} - G(\vec{x}',\vec{y})\frac{\partial G(\vec{x},\vec{y})}{\partial n}\right]$$

na condição de Dirichlet $G(\vec{x},\vec{y}) = G(\vec{x}',\vec{y}) = 0$ para $\vec{y}$ em S, anulando o lado direito, o lado esquerdo fica:

$$\int_V d^3y\left[G(\vec{x},\vec{y})\nabla^2G(\vec{x}',\vec{y}) - G(\vec{x}',\vec{y})\nabla^2G(\vec{x},\vec{y})\right] = \int_V d^3y\left[-G(\vec{x},\vec{y})4\pi\delta(\vec{x}'-\vec{y}) + G(\vec{x}',\vec{y})4\pi\delta(\vec{x}-\vec{y})\right] =$$

$$= 4\pi\left(-G(\vec{x},\vec{x}') + G(\vec{x}',\vec{x})\right) = 0 \Rightarrow G(\vec{x},\vec{x}') = G(\vec{x}',\vec{x})$$

na condição de Neumann a simetria não é automática, mas pode ser imposta separadamente

8) Energia potencial eletrostática

Vimos que $W = q(\phi_B - \phi_A)$, assim o trabalho para trazer uma carga puntiforme q_i do infinito $(\phi(\infty) \equiv 0)$ até $\vec{x}_i$ é:

$$W_i = q_i\,\phi(\vec{x}_i)$$

Se $\phi(\vec{x_i}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j}{|\vec{x_i}-\vec{x_j}|} \Rightarrow W_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{q_j}{|\vec{x_i}-\vec{x_j}|}$

então a energia potencial de todas as cargas é

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j<i}\frac{q_i q_j}{|\vec{x_i}-\vec{x_j}|}$$

ou "sem restrições": $\boxed{W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\sum_i\sum_{j\neq i}\frac{q_i q_j}{|\vec{x_i}-\vec{x_j}|}}$

os termos $i=j$ são denominados auto-energias que são infinitas, portanto, devem ser omitidos

Para uma distribuição contínua: $\boxed{W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\iint \frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x\, d^3x'}$

lembrando que $\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{x}')d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{x})\phi(\vec{x})d^3x}$

estas são as formulações da energia potencial eletrostática em termos das distribuições de cargas, vamos calcular em termos dos campos:

substituindo $\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0 \Rightarrow W = -\frac{\epsilon_0}{2}\int \phi\nabla^2\phi\, d^3x$

integrando por partes em 3 dimensões:

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot[f(\vec{x})\vec{A}(\vec{x})]d^3x = \oint_S f(\vec{x})[\vec{A}(\vec{x})\cdot\hat{n}]\,da =$$

$$= \int_V [\vec{\nabla}f(\vec{x})\cdot\vec{A}(\vec{x})]d^3x + \int_V f(\vec{x})[\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{x})]d^3x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_V f(\vec{x})[\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{x})]d^3x = -\int_V[\nabla f(\vec{x})\cdot\vec{A}(\vec{x})]d^3x + \oint_S f(\vec{x})[\vec{A}(\vec{x})\cdot\hat{n}]\,da$$

então:

$$W = -\frac{\epsilon_0}{2}\int_V \phi\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi\, d^3x = \frac{\epsilon_0}{2}\int_V \vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\nabla}\phi\, d^3x - \frac{\epsilon_0}{2}\oint_S \phi[\vec{\nabla}\phi\cdot\hat{n}]\,da$$

onde o volume V é todo o espaço, então a superfície S é uma superfície fechada no infinito, ou muito longe das cargas, onde $\phi(\vec{x})\to 0$, então:

$$\boxed{W = \frac{\epsilon_0}{2}\int_V |\vec{\nabla}\phi|^2 d^3x = \frac{\epsilon_0}{2}\int_V |\vec{E}(\vec{x})|^2 d^3x} = \frac{\epsilon_0}{2}\int_V \vec{E}(\vec{x})\cdot\vec{E}(\vec{x})\, d^3x$$

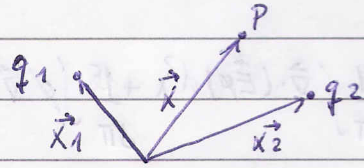
portanto, o integrando é a densidade de energia

$$\boxed{w = \frac{\epsilon_0}{2}|\vec{E}|^2}$$

Portanto, o integrando é a densidade de energia w:

$$\boxed{w = \frac{\varepsilon_0}{2}|\vec{E}|^2}$$

Note que a densidade de energia é definida e sempre positiva e sua integral de volume necessariamente não negativa. Isto contradiz a energia potencial de 2 cargas de sinais opostos. Entretanto, o cálculo em função dos campos inclui as auto-energias que devem ser descontadas, vejamos o exemplo:

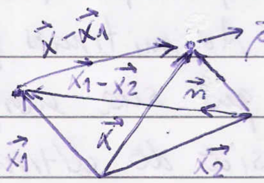


$$\vec{E} = \frac{q_1(\vec{x}-\vec{x_1})}{4\pi\varepsilon_0|\vec{x}-\vec{x_1}|^3} + \frac{q_2(\vec{x}-\vec{x_2})}{4\pi\varepsilon_0|\vec{x}-\vec{x_2}|^3} \Rightarrow$$

$$w = \underbrace{\frac{q_1^2}{32\pi^2\varepsilon_0|\vec{x}-\vec{x_1}|^4} + \frac{q_2^2}{32\pi^2\varepsilon_0|\vec{x}-\vec{x_2}|^4}}_{\text{auto-energias}} + \underbrace{\frac{q_1q_2}{16\pi^2\varepsilon_0}\frac{(\vec{x}-\vec{x_1})\cdot(\vec{x}-\vec{x_2})}{|\vec{x}-\vec{x_1}|^3|\vec{x}-\vec{x_2}|^3}}_{\text{interação}}$$

$$W_{int} = \frac{q_1q_2}{16\pi^2\varepsilon_0}\int\frac{(\vec{x}-\vec{x_1})\cdot(\vec{x}-\vec{x_2})}{|\vec{x}-\vec{x_1}|^3|\vec{x}-\vec{x_2}|^3}d^3x$$

façamos uma mudança de variáveis introduzindo os vetores:



$$\vec{\rho} = \frac{\vec{x}-\vec{x_1}}{|\vec{x_1}-\vec{x_2}|} \Rightarrow \vec{x}-\vec{x_1} = \vec{\rho}\,|\vec{x_1}-\vec{x_2}|$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{x_1}-\vec{x_2}}{|\vec{x_1}-\vec{x_2}|}, \quad |\vec{n}|=1 \Rightarrow \vec{x}-\vec{x_2} = \vec{x}-\vec{x_1}+\vec{x_1}-\vec{x_2} = (\vec{\rho}+\vec{n})|\vec{x_1}-\vec{x_2}|$$

$$W_{int} = \frac{q_1q_2}{16\pi^2\varepsilon_0}\int\frac{\vec{\rho}\,|\vec{x_1}-\vec{x_2}|\cdot[(\vec{\rho}+\vec{n})|\vec{x_1}-\vec{x_2}|]}{\rho^3|\vec{x_1}-\vec{x_2}|^3\,|\vec{\rho}+\vec{n}|^3|\vec{x_1}-\vec{x_2}|^3}|\vec{x_1}-\vec{x_2}|^3 d^3\rho = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0|\vec{x_1}-\vec{x_2}|}\times\frac{1}{4\pi}\int\frac{\vec{\rho}\cdot(\vec{\rho}+\vec{n})}{\rho^3|\vec{\rho}+\vec{n}|^3}d^3\rho$$

agora $\nabla_\rho\left(\frac{-1}{|\vec{\rho}+\vec{n}|}\right) = \frac{\vec{\rho}+\vec{n}}{|\vec{\rho}+\vec{n}|^3} \Rightarrow W_{int} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{|\vec{x_1}-\vec{x_2}|}\cdot\frac{1}{4\pi}\int\frac{\vec{\rho}}{\rho^3}\cdot\nabla_\rho\left(\frac{-1}{|\vec{\rho}+\vec{n}|}\right)d^3\rho$

$$\int_V \frac{\vec{\rho}}{\rho^3}\cdot\vec{\nabla}_\rho\left(\frac{-1}{|\vec{\rho}+\vec{n}|}\right)d^3\rho = \int_S \left(\frac{-1}{\rho^3}\right)\left[\nabla_\rho\left(\frac{-1}{|\vec{\rho}+\vec{n}|}\right)\right]d\vec{a} - \int_V \left(\frac{-1}{\rho^3}\right)\left[\vec{\nabla}_\rho\cdot\left(\vec{\nabla}_\rho\left(\frac{-1}{|\vec{\rho}+\vec{n}|}\right)\right)\right]d^3\rho =$$

$\to 0$, para S no infinito

$$= -\int_V \left(\frac{1}{\rho^3}\right)\nabla^2_\rho\left(\frac{1}{|\vec{\rho}+\vec{n}|}\right)d^3\rho = +\int_V \left(\frac{1}{\rho^3}\right)4\pi\,\delta(\vec{\rho}+\vec{n})\,d^3\rho =$$

$$= \frac{4\pi}{|-\vec{n}|^3} = 4\pi \Rightarrow \boxed{W_{int} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}}$$

reduzindo-se ao valor esperado.

Agora $W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int|\vec{E}|^2 d^3x = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\phi\, d^3x = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\phi)\,d^3x + \frac{\varepsilon_0}{2}\int\phi\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,d^3x =$

$$= -\frac{\varepsilon_0}{2}\int\cancel{(\vec{E}\phi)\cdot\hat{n}\,da}^{\,0} + \frac{\varepsilon_0}{2}\int\phi\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)d^3r = \frac{1}{2}\int\rho\phi\, dV$$

O potencial $\phi(\vec{x}) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0|\vec{x}-\vec{x}_1|}$ no ponto $\vec{x}=\vec{x}_1$ se torna infinito.

Em eletrodinâmica, a energia associada a um elétron (partícula elementar pontual) deveria ser infinita (sua energia própria). Por conseguinte, sua massa ($m = E/c^2$) também deveria ser infinita. O absurdo físico desse resultado mostra que os princípios fundamentais da eletrodinâmica têm aplicação limitada. Adimitimos que o elétron tenha uma certa dimensão R_0 tal que sua energia de repouso seja mc^2. Este é o raio clássico do elétron:

$$R_0 = \frac{e^2}{mc^2} \simeq \frac{(4{,}803\cdot10^{-10}\text{ esu})^2}{(9{,}1\cdot10^{-28}\text{ g})(3\cdot10^{10}\text{ cm/s})^2} \simeq 2{,}81794\cdot10^{-13}\text{ cm}$$

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2} = 2{,}81794\cdot10^{-15}\text{ m},\quad r_e^{exp} < 10^{-18}\text{ m}$$

9) Capacitância

Seja um sistema eletrostático com n condutores isolados. Neste ponto, entenderemos um condutor como um material que não suporta $\vec{E}$ em seu interior, pois as cargas livres movem-se até que $\vec{E}=0$ no interior.

Então, o interior do condutor é equipotencial

Q_i , Q_j , ... $\quad W = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{x})\,\phi(\vec{x})\,d^3x \overset{\phi = cte}{=} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i V_i$

V_i $\quad$ V_j

onde Q_i é a carga do i-ésimo condutor

V_i é o potencial do i-ésimo condutor

agora $\phi(\vec{x}) = \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,d^3x'$ que é uma função linear da carga, então

$V_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\,Q_j, (i=1,\dots,n)$ que são equivalente a $\vec{V} = \hat{P}\vec{Q}$

os <u>coeficientes de potencial</u> p_{ij} são independentes das cargas, mas apenas da geometria (formato e distribuição) dos condutores. Para calcular um p_{ij} particular, determine o potencial que o condutor j produz em i e zere todos os outros. Estas n equações podem ser invertidas:

$Q_i = \sum_{j=1}^{n} C_{ij} V_j, \ (i=1,\dots,n)$ que são equivalentes a $\vec{Q} = \hat{C}\vec{V}$

os coeficientes C_{ij} são os <u>coeficientes de capacitância</u>, os coeficientes da diagonal C_{ii} são as <u>capacitâncias</u> e os coeficientes fora da diagonal $C_{ij}, i \neq j$, são os <u>coeficientes de indução eletrostática</u>.

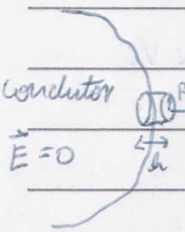
Exemplo: V_1 Q $\quad$ V_2 $-Q$: $\begin{pmatrix} Q \\ -Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$

A energia potencial de um sistema de condutores é então:

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i V_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} V_i V_j}$$

credeal

1) Força na Superfície de um Condutor Carregado



$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho$$

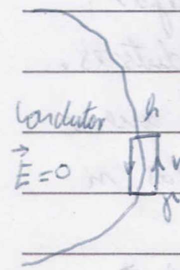
$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, d^3x = \int_S \vec{E}\cdot\hat{n}\, d^2x = \vec{E}_n(\vec{x})\,\pi R^2$$

$$= 4\pi\int_V \rho(\vec{x})\, d^3x = 4\pi\int_S \sigma(\vec{x})\, d^2x = 4\pi\,\sigma(\vec{x})\,\pi R^2 \quad \Big\} \; \vec{E}_n(\vec{x}) = 4\pi\sigma(\vec{x}) \qquad \cancel{E_n = \sigma/\varepsilon_0}$$

$h \ll R$

a contribuição mais importante vem das tampas: $\rho(\vec{x}) = \sigma(\vec{x})\,\delta[\xi(\vec{x})]$
onde $\xi(\vec{x})$ é a distância normal do ponto $\vec{x}$ à superfície do condutor:

$$\int_V \rho(\vec{x})\, d^3x = \int_V \sigma(\vec{x})\,\delta[\xi(\vec{x})]\, d^2x\, dx_n = \int_S \sigma(\vec{x})\, d^2x$$

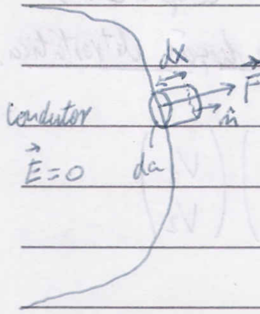


$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$$

$$\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot\hat{n}\, d^2x = \oint_\gamma \vec{E}\cdot d\vec{l} = E_t\cdot w + E_n\cdot h - 0\cdot w - E_n\cdot h = 0 \Rightarrow$$

$h \ll w$ $\qquad \Rightarrow \vec{E}_t(\vec{x}) = 0$

Trabalho virtual: movendo um pequeno elemento de área da



$$dW = \frac{1}{8\pi}\,|\vec{E}(\vec{x})|^2\, d^3x = \frac{1}{8\pi}\,E_n^2\, da\, dx = \frac{1}{8\pi}\,16\pi^2\sigma^2\, da\, dx$$

$$dW = F\,dx \Rightarrow \boxed{F = 2\pi\sigma^2\, da}$$