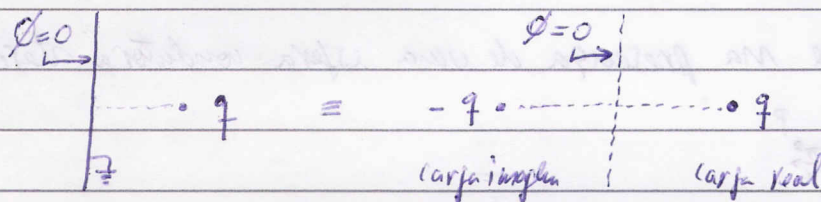


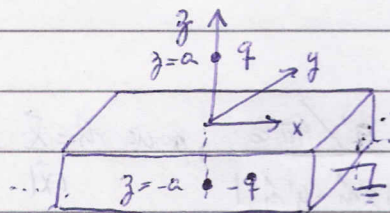
Problemas de contorno

1) Métodos das imagens

Pode-se simular as condições de contorno substituindo-se o problema real por uma região amplada com cargas imagens, cargas de sinais opostos espelhadas na região amplada pela superfície de contorno, desde que as linhas de campo tenham a mesma orientação e densidade na fronteira:



Carga pontiforme em presença de um condutor infinito aterrado



carga real q em $\vec{x}_0 = (0,0,a)$
 condutor aterrado ocupando $z < 0$
 $\phi(x,y,z \leq 0) = 0$ e $\phi(\vec{x}) \rightarrow 0$ para $|\vec{x}| \rightarrow \infty$
 carga imagem $-q$ em $\vec{x}'_0 = (0,0,-a)$

$$\phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'_0|} \right]$$

que satisfaz a equação de Poisson em $z > 0$ e a condição de contorno (de Dirichlet) em $z = 0$

No sistema real existe uma densidade de carga $\sigma(x,y)$

$$E_n = |\vec{E}_n(x,y,0)| = -\left. \frac{\partial \phi(\vec{x})}{\partial z} \right|_{z=0} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}} \right]_{z=0} =$$

$$E_n = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2a}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}} \right] = \frac{-qa}{2\pi\epsilon_0(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}$$

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\sigma(x,y) = \frac{-qa}{2\pi(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}$$

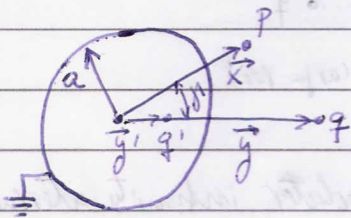
A função de Green na condição de Dirichlet para o semi-espaço infinito $z > 0$ é: $G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}''|} \right)$

onde \vec{x}'' é a imagem especular de \vec{x}' no plano $z=0$. Tomando o volume V o semi-espaço $z > 0$:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{x}') G_D(\vec{x}, \vec{x}') d^3x' - \frac{1}{4\pi} \int_S \phi(\vec{x}') \frac{\partial G_D}{\partial n} da' \quad \begin{cases} \phi=0 \text{ em } z=0 \\ \phi \rightarrow 0 \text{ em } |\vec{x}| \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0'|} \right]$$

2) Carga puntiforme na presença de uma esfera condutora aterrada



q : carga real

q' : carga imagem

$$\phi(\vec{x}) = 0 \text{ para } |\vec{x}| = a$$

$$\phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}'|} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|x\hat{n} - y\hat{n}'|} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|x\hat{n} - y'\hat{n}'|}, \text{ onde } \hat{n} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \text{ e } \hat{n}' = \frac{\vec{y}}{|\vec{y}|}$$

$$\phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x|\hat{n} - y/x\hat{n}'|} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{y'|\hat{n}' - x/y'\hat{n}|}$$

$$\phi(x=a) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a|\hat{n} - y/a\hat{n}'|} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{y'|\hat{n}' - a/y'\hat{n}|} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{q}{a} = -\frac{q'}{y'} \text{ e } \frac{y}{a} = \frac{a}{y'} \Rightarrow \boxed{\frac{y'}{y} = \frac{a^2}{y}} \text{ e } q' = -\frac{y'}{a}q \Rightarrow \boxed{q' = -\frac{aq}{y}}$$

Então, q' e y' variam inversamente proporcionais a y e em $y=a$ $\begin{cases} q' = -q \\ y' = a \end{cases}$

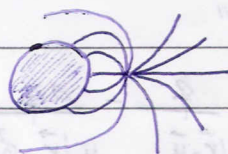
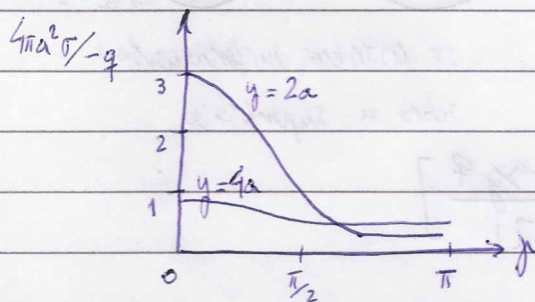
Para calcular a densidade de carga induzida na superfície da esfera:

$$\frac{q}{\epsilon_0} = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} da = \int_S -\vec{\nabla} \phi \cdot \hat{n} da = - \int_S \frac{\partial \phi}{\partial x} da, \text{ onde } \vec{x} \text{ é a direcção radial}$$

$$\sigma = \frac{dq}{da} = -\epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial x}, \text{ na superfície: } \sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=a}$$

fazendo a derivada obtemos:

$$\vec{V} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{a}{y}\right) \frac{1-a^2/y^2}{(1+a^2/y^2-2a/y \cos\mu)^{3/2}}$$

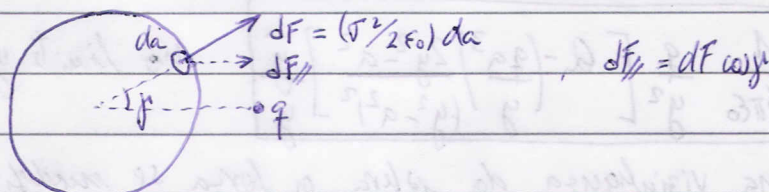


Força que age sobre q:

dist. entre as cargas: $y - y' = y - \frac{a^2}{y} = y \left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right)$

$$|\vec{F}| = F_{qq'} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 (y-y')^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{aq^2}{y} \frac{1}{y^2(1-a^2/y^2)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a^2} \left(\frac{a}{y}\right)^3 \left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right)^{-2}$$

Outro método:



$$dF = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{q^2}{16\pi^2 a^2} \left(\frac{a}{y}\right)^2 \frac{(1-a^2/y^2)^2 da}{(1+a^2/y^2-2ay \cos\mu)^3}, \quad da = a^2 d\Omega$$

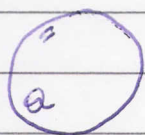
$$|\vec{F}| = \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 a^2} \left(\frac{a}{y}\right)^2 (1-a^2/y^2)^2 \int \frac{\cos\mu d\Omega}{(1+a^2/y^2-2ay \cos\mu)^3}$$

$$\alpha = 1+a^2/y^2, \quad \beta = 2a/y, \quad \cos\mu = u \Rightarrow du = -\sin\mu d\mu$$

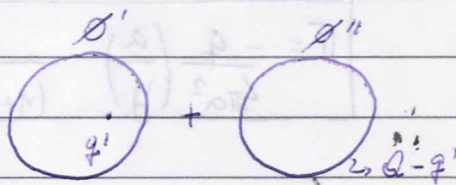
$$\int \frac{\cos\mu d\Omega}{(\alpha - \beta \cos\mu)^3} = 2\pi \int_0^\pi \frac{\cos\mu \sin\mu d\mu}{(\alpha - \beta \cos\mu)^3} = 2\pi \int_1^{-1} \frac{u(-du)}{(\alpha - \beta u)^3} = 2\pi \int_{-1}^1 \frac{u du}{(\alpha - \beta u)^3}$$

$$w = \alpha - \beta u \Rightarrow = 2\pi \int_{\alpha+\beta}^{\alpha-\beta} \left(\frac{\alpha-w}{\beta}\right) \left(\frac{-dw}{\beta}\right) \frac{1}{w^3} = \frac{4\pi\beta}{(\alpha^2 - \beta^2)^2}$$

3) carga pontiforme na presença de uma esfera condutora, isolada e aterrada



Superposição linear:



se distribui uniformemente sobre a superfície

$$\phi = \phi' + \phi''$$

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|\vec{x}-\vec{y}|} - \frac{aq}{y|\vec{x}-a^2\vec{y}/y|} + \frac{Q+aq}{|\vec{x}|} \right]$$

$$F_{qq'} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-aq}{y} \right) \frac{1}{(y-y')^2} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 a^3}{a^2 y^3} \frac{y^4}{(y^2-a^2)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{y^2} \left(\frac{-qa^3}{y} \frac{y^4}{a^2(y^2-a^2)^2} \right)$$

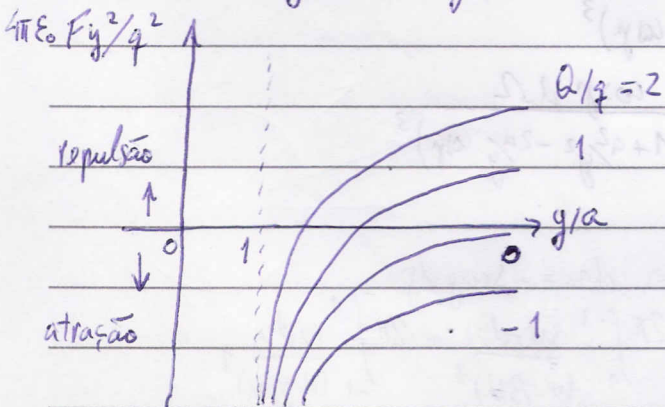
$$F_{q(Q-q')} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{y^2} \left(\frac{Q+aq}{y} \right)$$

$$\Sigma F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{y^2} \left[\frac{Q+aq}{y} - \frac{qa^3}{y} \left(\frac{y^4}{a^2(y^2-a^2)^2} - \frac{1}{a^2} \right) \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{y^2} \left[\frac{Q+qa^3}{y} \left(\frac{2y^2-a^2}{y^2-a^2} \right) \right]$$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{y^2} \left[\frac{Q+qa^3}{y} \left(\frac{2y^2-a^2}{y^2-a^2} \right) \right] \vec{y}$$

no limite $y \gg a$: $\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 y^2} \vec{y}$

mas, na vizinhança da esfera a força se modifica devido à distribuição de carga induzida



A força é atrativa quando $Q/q \leq 0$ ou a pequenas distâncias independente do valor de Q

4) Carga pontiforme nas vizinhanças de uma esfera condutora mantida em potencial fixo

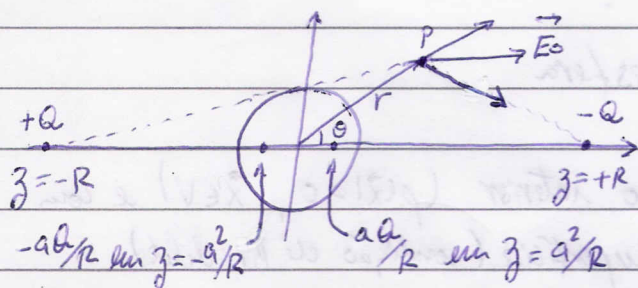
$$\frac{(Q-q')}{4\pi\epsilon_0} \rightarrow V_a : \phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|\vec{x}-\vec{y}|} - \frac{aq}{y|\vec{x}-a^2\vec{y}/y|} \right] + \frac{V_a}{|\vec{x}|}$$

zero em $|\vec{x}|=a \Rightarrow \phi(a)=V$

$$F_{qq'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{y^2} \left(\frac{-qa^3}{y} \frac{y^4}{a^2(y^2-a^2)^2} \right), \quad F_{q,V_a} = \frac{q}{y^2} (V_a)$$

$$\Sigma F = \frac{q}{y^2} \left[V_a - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qa^3}{y} \frac{y^4}{a^2(y^2-a^2)^2} \right] \Rightarrow \vec{F} = \frac{q}{y^2} \left[V_a - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qa^3}{(y^2-a^2)^2} \right] \frac{\vec{y}}{y}$$

5) Esfera condutora num \vec{E} uniforme



$$\vec{E}_0 \approx \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{z}$$

$$\text{quando } R \rightarrow \infty : \vec{E}_0 = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{z}$$

$$\left. \begin{aligned} |\vec{x}-\vec{y}| &= \sqrt{r^2+R^2+2rR\cos\theta} \\ |\vec{x}-\vec{y}'| &= \sqrt{r^2+\frac{a^4}{R^2}+\frac{2a^2r}{R}\cos\theta} \end{aligned} \right\} \text{+ para } z = \mp R$$

$$\phi = \frac{Q/4\pi\epsilon_0}{\sqrt{r^2+R^2+2rR\cos\theta}} - \frac{Q/4\pi\epsilon_0}{\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\theta}} - \frac{aQ/4\pi\epsilon_0}{R\sqrt{r^2+\frac{a^4}{R^2}+\frac{2a^2r}{R}\cos\theta}} + \frac{aQ/4\pi\epsilon_0}{R\sqrt{r^2+\frac{a^4}{R^2}-\frac{2a^2r}{R}\cos\theta}}$$

$R \gg r$ $r \gg a$

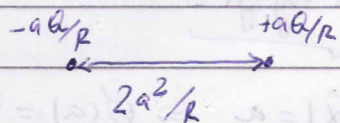
$$(1+r^2/R^2+2r/R\cos\theta)^{-1/2} \approx 1 \mp r/R\cos\theta, \quad (1+a^4/R^2+\frac{2a^2r}{R}\cos\theta)^{-1/2} \approx 1 \mp \frac{a^2}{rR}\cos\theta$$

$$\Rightarrow \left| \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{2Q}{R^2} r\cos\theta + \frac{2Q}{R^2} \frac{a^3}{r^2} \cos\theta \right] + \dots \right|$$

lembrando que em $R \rightarrow \infty$: $E_0 = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \Rightarrow \boxed{\phi = -E_0 \left(r - \frac{a^3}{r^2} \right) \cos\theta}$

onde 1º termo: $-E_0 z$ - potencial do campo uniforme

2º termo: potencial devido à densidade de carga induzida (imagens)



dipolo: $D = q_a \frac{2a^2}{r} = 4\pi\epsilon_0 E_0 a^3$

densidade superficial de carga induzida:

$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial\phi}{\partial r} \Big|_{r=a}$

$\frac{\partial\phi}{\partial r} = -E_0 \left(1 - a^3 \left(\frac{-2}{r^3} \right) \right) \cos\theta = -E_0 \left(1 + \frac{2a^3}{r^3} \right) \cos\theta \Rightarrow$

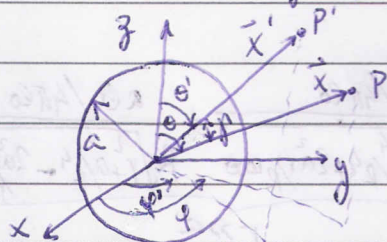
$\Rightarrow \sigma = \epsilon_0 E_0 \left(1 + \frac{2a^3}{a^3} \right) \cos\theta \Rightarrow \boxed{\sigma = 3\epsilon_0 E_0 \cos\theta}$

(c) Funções de Green para a esfera

Para uma esfera sem cargas no interior ($\rho(\vec{x})=0$, $\vec{x} \in V$) e com um potencial especificado na superfície (condições de Dirichlet)

$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \phi(\vec{x}') \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} da'$

com a função de Green: $G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{a}{|\vec{x}' - \frac{a^2}{|\vec{x}|^2} \vec{x}|}$, $|\vec{x}| \geq a$, $|\vec{x}'| \geq a$



$|\vec{x} - \vec{x}'| = \sqrt{x^2 + x'^2 - 2xx' \cos\theta}$
 $\frac{a}{|\vec{x}' - \frac{a^2}{|\vec{x}|^2} \vec{x}|} = \frac{ax'}{\sqrt{x'^2/a^2 + a^2 - 2xx' \cos\theta}}$

$\Rightarrow G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x'^2 - 2xx' \cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{x'^2/a^2 + a^2 - 2xx' \cos\theta}}$

(Simetria $\vec{x} \leftrightarrow \vec{x}'$)

$G=0$ para $\vec{x} = a\hat{x}$, $\vec{x}' = a\hat{x}'$

$\frac{\partial G}{\partial x'} \Big|_{x'=a} = -\frac{1}{2} \left[\frac{2a - 2x \cos\theta}{(x^2 + a^2 - 2xa \cos\theta)^{3/2}} - \frac{a \cdot 2ax' - 2xa^2 \cos\theta}{(x^2/a^2 + a^2 - 2xx' \cos\theta)^{3/2}} \right] = -\frac{(x^2 - a^2)}{a(x^2 + a^2 - 2xa \cos\theta)^{3/2}}$

assim,

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \phi(a, \theta', \varphi') \frac{a(a^2 - x^2)}{(x^2 + a^2 - 2ax \cos \psi)^{3/2}} d\Omega'$$

que é a solução do chamado problema interior

O problema exterior é análogo, com $\frac{\partial \phi}{\partial n'} = -\frac{\partial \phi}{\partial x'}$; tendo como

solução (para ausência de cargas):

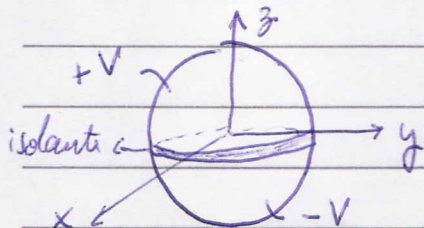
$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \phi(a, \theta', \varphi') \frac{a(x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2 - 2ax \cos \psi)^{3/2}} d\Omega'$$

Para um problema com distribuição de cargas, usamos:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{x}') G(\vec{x}, \vec{x}') d^3x' - \frac{1}{4\pi} \int_S \phi(\vec{x}') \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} da'$$

com a mesma função de Green

7) Esfera condutora com hemisfério a diferentes potenciais



do resultado para o problema exterior:

$$\phi(x, \theta, \varphi) = \frac{V}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \left\{ \int_0^{\pi} d\omega \theta' - \int_{-1}^0 d\omega \theta' \right\} \frac{a(x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2 - 2ax \cos \psi)^{3/2}}$$

mudando as variáveis na segunda integral:

$$\left. \begin{array}{l} \theta' \rightarrow \pi - \theta' \\ \varphi' \rightarrow \varphi' + \pi \end{array} \right\} \begin{array}{l} \cos \theta' \rightarrow -\cos \theta' \\ \cos \psi = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi') \rightarrow -\cos \psi \end{array}$$

$$\Rightarrow \phi(x, \theta, \varphi) = \frac{Va(x^2 - a^2)}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} d\omega \theta' \left[\frac{1}{(x^2 + a^2 - 2ax \cos \psi)^{3/2}} - \frac{1}{(x^2 + a^2 + 2ax \cos \psi)^{3/2}} \right]$$

no eixo z: $\theta = 0$: $\cos \psi = \cos \theta' \Rightarrow \phi(z) = V \left[1 - \frac{(z^2 - a^2)}{z\sqrt{z^2 + a^2}} \right]$

que em $z = a \Rightarrow \phi = V$, em $z \rightarrow \infty$: $\phi \approx \frac{3Va^2}{2z^2}$

fatorando (x^2+a^2) dos denominadores:

$$\phi(x, \theta, d) = \frac{Va(x^2-a^2)}{4\pi(x^2+a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 d\cos\theta' \left[\frac{1}{(1-2d\cos\theta')^{3/2}} - \frac{1}{(1+2d\cos\theta')^{3/2}} \right]$$

onde $d = ax/(x^2+a^2)$

expandindo: $(1-2d\cos\theta')^{-3/2} - (1+2d\cos\theta')^{-3/2} \approx 6d\cos\theta' + 35d^3\cos^3\theta' + \dots$

e integrando:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 d\cos\theta' \cos\theta' = \pi \cos\theta$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 d\cos\theta' \cos^3\theta' = \frac{\pi}{4} \cos\theta (3 - \cos^2\theta)$$

e o potencial se torna:

$$\phi(x, \theta, d) = \frac{3Va^2}{2x^2} \left(\frac{x^3(x-a^2)}{(x^2+a^2)^{5/2}} \right) \cos\theta \left[1 + \frac{35}{24} \frac{a^2 x^2}{(x^2+a^2)^2} (3 - \cos^2\theta) + \dots \right]$$

