$\boxed{\text{Separação de Variáveis}}$

As equações que envolvem o operador laplaciano são separáveis

1) Coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

definindo $\phi(x,y,z) = X(x)\,Y(y)\,Z(z) \Rightarrow \dfrac{1}{X(x)}\dfrac{d^2X}{dx^2} + \dfrac{1}{Y(y)}\dfrac{d^2Y}{dy^2} + \dfrac{1}{Z(z)}\dfrac{d^2Z}{dz^2} = 0$

que deve valer para valores arbitrários das coordenadas independentes, então:

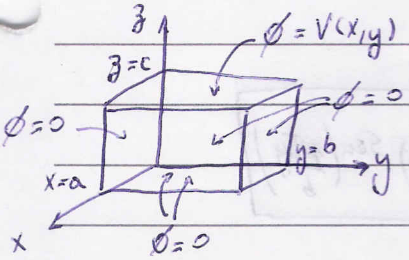
$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\alpha^2 \;,\; \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -\beta^2 \;,\; \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = \gamma^2$$

onde $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$ e $\alpha^2 > 0$, $\beta^2 > 0$ (arbitrariamente)

as soluções são: $X = X_0\, e^{\pm i\alpha x}$, $Y = Y_0\, e^{\pm i\beta y}$, $Z = Z_0\, e^{\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\, z}$

e o potencial: $\phi = \phi_0\, e^{\pm i\alpha x}\, e^{\pm i\beta y}\, e^{\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\, z}$

Condições de Contorno: todas as superfícies são mantidas a $\phi = 0$, exceto a superfície $z = c$ a $\phi = V(x,y)$.



De $x=0, y=0, z=0$ vem:

$X = \operatorname{sen}\alpha x$, $Y = \operatorname{sen}\beta y$, $Z = \operatorname{senh}(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\, z)$

Para que $\phi = 0$ em $x = a$ e $y = b$:

$$\alpha a = n\pi \Rightarrow \alpha_n = n\pi/a$$

$$\beta b = m\pi \Rightarrow \beta_m = m\pi/b$$

$$\gamma_{nm} = \pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}$$

Assim $\phi_{nm} = \operatorname{sen}(\alpha_n x)\operatorname{sen}(\beta_m y)\operatorname{senh}(\gamma_{nm} z)$

e o potencial pode ser desenvolvido em termos de ϕ_{nm}:

$$\phi(x,y,z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} \,\text{sen}(\alpha_n x)\,\text{sen}(\beta_m y)\,\text{senh}(\gamma_{nm} z)$$

Falta a condição de contorno $\phi = V(x,y)$ em $z = c$:

$$V(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm}\,\text{sen}(\alpha_n x)\,\text{sen}(\beta_m y)\,\text{senh}(\gamma_{nm} c)$$

que é uma série dupla de Fourier, os coeficientes A_{nm} são calculados multiplicando a série por $\text{sen}(\alpha_\ell x)\,\text{sen}(\beta_p y)$ e integrando sobre a face da caixa. Verifica-se que:

Vamos verificar inicialmente que: $\int_0^a \text{sen}(\alpha_n x)\,\text{sen}(\alpha_\ell x)\,dx = \frac{a}{2}\delta_{n\ell}$

$$\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2} \Rightarrow \int_0^a \text{sen}(\alpha_n x)\,\text{sen}(\alpha_\ell x)\,dx = \int_0^a \frac{\cos(\alpha_n-\alpha_\ell)x\,dx}{2} +$$

$$-\int_0^a \frac{\cos(\alpha_n+\alpha_\ell)x\,dx}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\text{sen}(\alpha_n-\alpha_\ell)x}{\alpha_n-\alpha_\ell}\Big|_0^a - \frac{\text{sen}(\alpha_n+\alpha_\ell)x}{\alpha_n+\alpha_\ell}\Big|_0^a\right] =$$

$$= \frac{a}{2}\left[\frac{\text{sen}(n-\ell)\pi}{(n-\ell)\pi} - \frac{\text{sen}(n+\ell)\pi}{(n+\ell)\pi}\right], \quad \left.\begin{array}{l} \text{se } n=\ell \left\{ \frac{\text{sen}\,0}{0} - \frac{\text{sen}\,2n\pi}{2n\pi} = 1 \right. \\ \text{se } n\neq\ell \left\{ \frac{\text{sen}\,k\pi}{k\pi} - \frac{\text{sen}\,k'\pi}{k'\pi} = 0 \right. \end{array}\right\} = \delta_{n\ell}$$

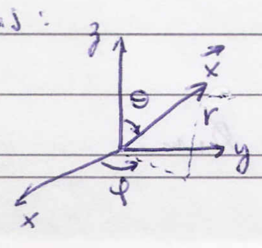
então: $$\int_0^a dx\int_0^b dy\, V(x,y)\,\text{sen}\left(\frac{\ell\pi x}{a}\right)\text{sen}\left(\frac{p\pi y}{b}\right) = \sum_{n,m} A_{nm}\frac{a}{2}\delta_{n\ell}\frac{b}{2}\delta_{mp}\,\text{senh}(\gamma_{nm}c) =$$

$$= A_{\ell p}\frac{ab}{4}\,\text{senh}(\gamma_{\ell p}c)$$

ou $$\boxed{A_{\ell p} = \frac{4}{ab\,\text{senh}(\gamma_{\ell p}c)}\int_0^a dx\int_0^b dy\, V(x,y)\,\text{sen}\left(\frac{\ell\pi x}{a}\right)\text{sen}\left(\frac{p\pi y}{b}\right)}$$

2) Coordenadas esféricas

Em coordenadas esféricas:
$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi) + \frac{1}{r^2\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\,\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\text{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0$$



escrevendo o potencial na forma de um produto:

$$\phi(r,\theta,\varphi) = R(r)\,P(\theta)\,Q(\varphi) = \frac{U(r)}{r}\,P(\theta)\,Q(\varphi)$$

substituindo na expressão do laplaciano, vem:

$$\frac{PQ}{r}\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{UQ}{r^3 \operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + \frac{UP}{r^3\operatorname{sen}^2\theta}\frac{d^2Q}{d\varphi^2} = 0 \qquad \times\ \frac{r^3\operatorname{sen}^2\theta}{UPQ} \Rightarrow$$

$$\frac{r^2\operatorname{sen}^2\theta}{U}\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{P}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + \frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\varphi^2} = 0$$

a última parcela depende somente de φ, portanto deve ser constante:

$$\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\varphi^2} = -m^2 \Rightarrow Q \sim e^{\pm i m\varphi}$$, onde m é inteiro para $0 \le \varphi \le 2\pi$

Agora a equação de Laplace fica: $$\frac{r^2\operatorname{sen}^2\theta}{U}\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{P}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dP}{d\theta}\right) - m^2 = 0$$

ou $$\frac{r^2}{U}\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{P\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dP}{d\theta}\right) - \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta} = 0$$

onde o primeiro termo depende somente de r e os outros dois somente de θ, portanto, são constantes. Do primeiro:

$$\frac{r^2}{U}\frac{d^2U}{dr^2} = A \Rightarrow \frac{d^2U}{dr^2} = \frac{AU}{r^2} = \frac{\ell(\ell+1)U}{r^2}$$

cujas soluções são: $$\begin{cases} U \sim r^{\ell+1} \\ U \sim 1/r^{\ell} \end{cases}$$ (verificação direta)

A equação em θ é a equação de Legendre generalizada:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta}\right]P = 0$$

$\frac{dx}{d\theta} = -\operatorname{sen}\theta = -\sqrt{1-x^2}$

$0 \le \theta \le \pi$
$-1 \le x \le 1$

fazendo a mudança de variáveis $x \equiv \cos\theta \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-x^2}$

$$\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dP}{d\theta}\right) = \frac{dx}{d\theta}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}\,\frac{dx}{d\theta}\frac{dP}{dx}\right) = -\sqrt{1-x^2}\,\frac{d}{dx}\left(-(1-x^2)\frac{dP}{dx}\right) = \sqrt{1-x^2}\,\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dP}{dx}\right)$$

$$\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta} = \ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}$$

então: $$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dP}{dx}\right) + \left(\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)P = 0$$

Caso especial de um potencial invariante azimutal : $m=0 \Rightarrow Q(\varphi)=1$

A equação de Legendre fica : $\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP}{dx}\right] + l(l+1)P = 0$

Cuja solução vem de uma série de potências : $P(x) = x^{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j = \sum_j a_j x^{j+\alpha}$

$$\frac{dP}{dx} = \sum_j (j+\alpha)\, a_j x^{j+\alpha-1} \quad ; \quad \frac{d^2P}{dx^2} = \sum_j (j+\alpha)(j+\alpha-1)\, a_j x^{j+\alpha-2} \; ;$$

$$-\frac{d}{dx} x^2 \frac{dP}{dx} = -\sum_j (j+\alpha)(j+\alpha+1)\, a_j x^{j+\alpha}$$

Substituindo na equação de Legendre fica :

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left[(\alpha+j)(\alpha+j-1)\, x^{\alpha+j-2} a_j - (\alpha+j)(\alpha+j+1)\, x^{\alpha+j} a_j + l(l+1)\, x^{\alpha+j} a_j\right] = 0$$

ou $\alpha(\alpha-1)\, x^{\alpha-2} a_0 + \alpha(\alpha+1)\, a_1 x^{\alpha-1} + \sum_{j=0}^{\infty}\left[(\alpha+j+2)(\alpha+j+1)\, a_{j+2} + \left(l(l+1) - (\alpha+j)(\alpha+j+1)\right) a_j\right] x^{\alpha+j} = 0$

onde o coeficiente de cada potência deve anular-se separadamente

se $a_0 \neq 0 \Rightarrow \alpha(\alpha-1) = 0$

se $a_1 \neq 0 \Rightarrow \alpha(\alpha+1) = 0$

e a relação de recorrência $a_{j+2} = \frac{(\alpha+j)(\alpha+j+1) - l(l+1)}{(\alpha+j+1)(\alpha+j+2)}\, a_j$

Por definição o 1º termo da série não pode ser zero, portanto, $a_0 \neq 0$, então $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$, mas a_1 pode ser zero

Para $\alpha = 0 \Rightarrow P(x)$ terá somente termos com potências pares

Para $\alpha = 1 \Rightarrow P(x)$ terá somente termos com potências ímpares

Em ambos os casos, a série converge para $x^2 < 1$ e diverge para $x = \pm 1$ a menos que ela trunque em algum valor de j. Isso ocorrerá somente quando $(\alpha+j)[(\alpha+j)+1] - l(l+1) = 0$, se $l \in \mathbb{Z}$, $l \geq \alpha$

$$\Rightarrow \alpha + j = l$$

Então a série é finita $\Rightarrow$ Polinômio de Legendre : $P_l(x)$

Convenciona-se normalizar os polinômios, de forma que $P_l(x=+1) = 1$:

$P_0(x) = 1$	$P_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
$P_1(x) = x$	$P_4 = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$	etc

Fórmula de Rodrigues : $P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2-1)^\ell$

os polinômios de Legendre formam um conjunto completo de funções ortogonais no intervalo $-1 \le x \le +1$: tomemos a equação diferencial de Legendre, multiplicamos-na por $P_{\ell'}(x)$ e integramos:

$$\int_{-1}^{1} P_{\ell'}(x) \left\{ \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_\ell}{dx}\right] + \ell(\ell+1)P_\ell(x)\right\} dx = 0$$

mas $\int_{-1}^{1} P_{\ell'}(x) \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_\ell}{dx}\right] dx = P_{\ell'}(x)\cancel{(1-x^2)}^{0}\frac{dP_\ell}{dx}\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}(x^2-1)\frac{dP_\ell}{dx}\frac{dP_{\ell'}}{dx}dx$

então $\int_{-1}^{1}\left[(x^2-1)\frac{dP_\ell}{dx}\frac{dP_{\ell'}}{dx} + \ell(\ell+1)P_{\ell'}(x)P_\ell(x)\right]dx = 0$ (1)

$\ell \leftrightarrow \ell'$: $\int_{-1}^{1}\left[(x^2-1)\frac{dP_{\ell'}}{dx}\frac{dP_\ell}{dx} + \ell'(\ell'+1)P_\ell(x)P_{\ell'}(x)\right]dx = 0$ (2)

(1) − (2) : $\left[\ell(\ell+1) - \ell'(\ell'+1)\right]\int_{-1}^{1} P_{\ell'}(x)P_\ell(x)\,dx = 0$ (ortogonalidade)

Para $\ell \neq \ell'$, a integral se anula

Para $\ell = \ell'$: $N_\ell \equiv \int_{-1}^{1}\left[P_\ell(x)\right]^2 dx \xrightarrow{\text{Rodrigues}} \frac{1}{2^{2\ell}(\ell!)^2}\int_{-1}^{1}\frac{d^\ell}{dx^\ell}(x^2-1)^\ell \frac{d^\ell}{dx^\ell}(x^2-1)^\ell dx$

integrando por partes ℓ vezes : $N_\ell = \frac{(-1)^\ell}{2^{2\ell}(\ell!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^\ell \frac{d^{2\ell}}{dx^{2\ell}}(x^2-1)^\ell dx$

$\ell=1$: $\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1) = \frac{d}{dx}(2x) = 2\cdot 1 = 2!$ $\quad (-1)^\ell (x^2-1)^\ell = (1-x^2)^\ell$

$\ell=2$: $\frac{d^4}{dx^4}(x^2-1)^2 = \frac{d^4}{dx^4}(x^4-2x^2+1) = \frac{d^3}{dx^3}(4x^3-2\cdot 2x) = \frac{d^2}{dx^2}(4\cdot 3x^2-4) = \frac{d}{dx}(4\cdot 3\cdot 2x) = 4!$

etc : $\frac{d^{2\ell}}{dx^{2\ell}}(x^2-1)^\ell = (2\ell)!$ $\Rightarrow$ $N_\ell = \frac{(2\ell)!}{2^{2\ell}(\ell!)^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^\ell dx$

agora : $(1-x^2)^\ell = (1-x^2)(1-x^2)^{\ell-1} = (1-x^2)^{\ell-1} - x^2(1-x^2)^{\ell-1}\frac{2\ell}{2\ell} =$

$= (1-x^2)^{\ell-1} + \frac{x}{2\ell}(-2x)\,\ell(1-x^2)^{\ell-1} = (1-x^2)^{\ell-1} + \frac{x}{2\ell}\frac{d}{dx}(1-x^2)^\ell$

ainda : $\frac{(2\ell)!}{2^{2\ell}(\ell!)^2} = \frac{2\cancel{\ell}(2\ell-1)(2\ell-2)!}{2^{2\ell}\,\ell^{\cancel{2}}((\ell-1)!)^2}\frac{2}{2} = \left(\frac{2\ell-1}{2\ell}\right)\frac{2^2(2(\ell-1))!}{2^{2\ell}((\ell-1)!)^2} = \left(\frac{2\ell-1}{2\ell}\right)\frac{[2(\ell-1)]!}{2^{2(\ell-1)}[(\ell-1)!]^2}$

no 1º termo só

então: $N_l = \left(\frac{2l-1}{2l}\right) N_{l-1} + \frac{(2l-1)!}{2^{2l}(l!)^2} \int_{-1}^{1} x \, d[(1-x^2)^l]$

$\int x \, d[(1-x^2)^l] = x(1-x^2)^l \Big|_{-1}^{1} - \int (1-x^2)^l dx \Rightarrow N_l = \left(\frac{2l-1}{2l}\right) N_{l-1} - \frac{1}{2l} N_l \Rightarrow$

$\Rightarrow (2l+1) N_l = (2l-1) N_{l-1} \Rightarrow N_l = \left(\frac{2l-1}{2l+1}\right) N_{l-1}$

como $N_0 = \int_{-1}^{1} [P_0(x)]^2 dx = \int_{-1}^{1} 1 \, dx = x \Big|_{-1}^{1} = 2$

$N_1 = \frac{2\cdot1-1}{2\cdot1+1} N_0 = \frac{N_0}{2\cdot1+1}$, $N_2 = \frac{2\cdot2-1}{2\cdot2+1} N_1 = \frac{\cancel{3}}{2\cdot2+1} \frac{1}{\cancel{3}} N_0$, $N_3 = \frac{\cancel{5}}{2\cdot3+1} \frac{\cancel{3}}{\cancel{5}} \frac{1}{\cancel{3}} N_0$

então $\boxed{N_l = \frac{2}{2l+1}}$ e a condição de ortogonalidade: $\boxed{\int_{-1}^{1} P_{l'}(x) P_l(x) dx = \frac{2\delta_{l'l}}{2l+1}}$

e as funções ortonormais: $U_l(x) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l(x)$, tais que $\int_{-1}^{+1} U_{l'}(x) U_l(x) dx = \delta_{l'l}$

assim qualquer função $f(x)$ no intervalo $-1 \leq x \leq +1$ pode ser desenvolvida como

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x) \quad \text{, onde } A_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_l(x) dx$$

Exemplo: Problema de contorno com simetria axial ($m=0$)

A solução geral é:

$$\phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos\theta)$$

Seja $V(\theta)$ na superfície de uma esfera de raio a

Para que $\phi(r \to 0, \theta)$ seja finito $\Rightarrow B_l = 0, \forall l$

assim em $r=a$:

$$V(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l(\cos\theta)$$

invertem-se os limites

que é uma série de Legendre e $A_l = \frac{2l+1}{2a^l} \int_0^{\pi} V(\theta) P_l(\cos\theta) \operatorname{sen}\theta \, d\theta$

—//—

Para incluir as soluções sem simetria azimutal ($m \neq 0$), temos que diferenciar o polinômio de Legendre m vezes

$$\frac{d^m}{dx^m}\left\{ (1-x^2)P_\ell'' - 2x P_\ell' + \ell(\ell+1) P_\ell \right\} = 0$$

$$\frac{d}{dx}(x f(x)) = x\frac{df}{dx} + f(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(x f(x)) = x\frac{d^2 f}{dx^2} + 2\frac{df}{dx}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^m}{dx^m}(x f(x)) = x\frac{d^m f}{dx^m} + m\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} f$$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2) f(x)\right] = (1-x^2)\frac{df}{dx} - 2x f$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[(1-x^2) f(x)\right] = (1-x^2)\frac{d^2 f}{dx^2} - 4x\frac{df}{dx} - 2f$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\left[(1-x^2) f(x)\right] = (1-x^2)\frac{d^3 f}{dx^3} - 6x\frac{d^2 f}{dx^2} - 6\frac{df}{dx}$$

$$\frac{d^4}{dx^4}\left[(1-x^2) f(x)\right] = (1-x^2)\frac{d^4 f}{dx^4} - 8x\frac{d^3 f}{dx^3} - 12\frac{d^2 f}{dx^2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^m}{dx^m}\left[(1-x^2) f(x)\right] = (1-x^2)\frac{d^m f}{dx^m} - 2mx\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} f - m(m-1)\frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}} f$$

substituindo na equação de Legendre:

$$(1-x^2)\frac{d^m}{dx^m}P_\ell'' - 2mx\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}P_\ell'' - m(m-1)\frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}P_\ell'' - 2x\frac{d^m}{dx^m}P_\ell' +$$

$$-2m\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}P_\ell' + \ell(\ell+1)\frac{d^m}{dx^m}P_\ell = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-x^2)\frac{d^m}{dx^m}P_\ell'' - 2(m+1)x\frac{d^m}{dx^m}P_\ell' + \left[\ell(\ell+1) - 2m - m(m-1)\right]\frac{d^m P_\ell}{dx^m} = 0$$

$$-2m - m^2 + m = -m^2 - m \Rightarrow$$

$$= -m(m+1)$$

$$\Rightarrow (1-x^2)\frac{d^m}{dx^m}P_\ell'' - 2(m+1)x\frac{d^m}{dx^m}P_\ell' + [\ell(\ell+1) - m(m+1)]\frac{d^m P_\ell}{dx^m} = 0$$

Seja $u(x) = \frac{d^m}{dx^m}P_\ell(x)$; $v(x) = (1-x^2)^{m/2}u(x) \Rightarrow u(x) = \frac{v(x)}{(1-x^2)^{m/2}}$

$$\frac{du}{dx} = u' = \left[v' + \frac{vmx}{1-x^2}\right](1-x^2)^{-m/2}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = u'' = \left[v'' + \frac{2v'mx}{1-x^2} + \frac{vm}{1-x^2} + \frac{m(m+2)x^2v}{(1-x^2)^2}\right](1-x^2)^{-m/2}$$

então $(1-x^2)u'' - 2(m+1)xu' + [\ell(\ell+1) - m(m+1)]u = 0 \Rightarrow$

$$(1-x^2)\cancel{(1-x^2)^{-m/2}}\left[v'' + \frac{2v'mx}{1-x^2} + \frac{vm}{1-x^2} + \frac{vm(m+2)x^2}{(1-x^2)^2}\right] +$$

$$-2(m+1)x\left[v' + \frac{vmx}{1-x^2}\right]\cancel{(1-x^2)^{-m/2}} + [\ell(\ell+1) - m(m+1)]v\cancel{(1-x^2)^{-m/2}} = 0 \Rightarrow$$

$$(1-x^2)v'' + v'(\cancel{2mx} - 2(\cancel{m}+1)x) + v\left[\cancel{m} + \frac{m(m+2)x^2}{1-x^2} - \frac{2(m+1)x\,mx}{1-x^2} + \right.$$

$$\left. + \ell(\ell+1) - m^2 - \cancel{m}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$(1-x^2)v'' - 2xv' + \left[\ell(\ell+1) + \frac{x^2}{1-x^2}(m^2 + \cancel{2m} - 2m^2 - \cancel{2m}) - m^2\right]v = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{(1-x^2)v'' - 2xv' + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]v = 0}$$ que é a equação associada de Legendre

cujas soluções são as funções associadas de Legendre:

$$P_\ell^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_\ell(x) \quad , \quad 0 \le m \le \ell$$

contudo pode-se ampliar para o caso $-\ell \le m \le \ell$, notando que $P_l^m(x) = \frac{1}{2^l l!}(1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l$

pois $\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}(x^2-1)^l = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!}(1-x^2)^m \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l$

então: $P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x)$

Ex: $m=1, l=3$: $(x^2-1)^3 = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$

$\frac{d^4}{dx^4}(x^2-1)^3 = 360x^2 - 72 = 72(5x^2-1)$

$\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^3 = 30x^4 - 36x^2 + 6 = 6(x^2-1)(5x^2-1) = (-1)\frac{6}{72}(1-x^2)72(5x^2-1) =$

$= (-1)\frac{2.3}{24.3}(1-x^2)[72(5x^2-1)] = (-1)\frac{2!}{4!}(1-x^2)\frac{d^4}{dx^4}(x^2-1)^3 =$

$\frac{d^{3-1}}{dx^{3-1}}(x^2-1)^3 = (-1)^1 \frac{(3-1)!}{(3+1)!}(1-x^2)^1 \frac{d^{3+1}}{dx^{3+1}}(x^2-1)^3$

fórmula de Leibniz: $\frac{d^n}{dx^n}[A(x)B(x)] = \sum_{s=0}^{n} \frac{n!}{s!(n-s)!} \frac{d^{n-s}}{dx^{n-s}}A(x) \frac{d^s}{dx^s}B(x)$

$\frac{d^s}{dx^s}(x+1)^l = l\frac{d^{s-1}}{dx^{s-1}}(x+1)^{l-1} = l(l-1)\frac{d^{s-2}}{dx^{s-2}}(x+1)^{l-2} = l(l-1)\ldots(l-s+1)(x+1)^{l-s} \Rightarrow$

$\frac{d^s}{dx^s}(x+1)^l = \frac{l!}{(l-s)!}(x+1)^{l-s}$; $\frac{d^s}{dx^s}(x-1)^l = \frac{l!}{(l-s)!}(x-1)^{l-s}$

$\frac{d^{l+m-s}}{dx^{l+m-s}}(x\pm1)^l = \frac{l!(x\pm1)^{s-m}}{(s-m)!}$; $\frac{d^{l-m-s}}{dx^{l-m-s}}(x\pm1)^l = \frac{l!(x\pm1)^{s+m}}{(s+m)!}$

usando a fórmula de Leibniz

$D^{l+m} = \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l = \sum_{s=0}^{l+m} \frac{(l+m)!}{s!(l+m-s)!} \frac{l!}{(s-m)!}(x+1)^{s-m} \frac{l!}{(l-s)!}(x-1)^{l-s}$

$= (l+m)!(l!)^2(x+1)^{-m} \sum_{s=0}^{l+m} \frac{(x+1)^s(x-1)^{l-s}}{s!(l+m-s)!(s-m)!(l-s)!}$

$$D^{l-m} = \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}(x^2-1)^l = \sum_{s=0}^{l-m} \frac{(l-m)!}{s!(l-m-s)!}\,\frac{l!}{(s+m)!}(x-1)^{s+m}\,\frac{l!}{(l-s)!}(x+1)^{l-s}$$

$$= (l-m)!\,(l!)^2\,(x-1)^m \sum_{s=0}^{l-m} \frac{(x-1)^s(x+1)^{l-s}}{s!\,(l-m-s)!\,(s+m)!\,(l-s)!}$$

$$\frac{D^{l-m}}{D^{l+m}} = \frac{(l-m)!}{(l+m)!}\,\frac{(x-1)^m}{(x+1)^{-m}} \left\{ \sum_{s=0}^{l-m} \frac{(x-1)^s(x+1)^{l-s}}{s!(l-m-s)!(s+m)!(l-s)!} \Big/ \sum_{s=0}^{l+m} \frac{(x+1)^s(x-1)^{l-s}}{s!(l+m-s)!(s-m)!(l-s)!} \right\}$$

$$= \frac{(l-m)!}{(l+m)!}(-1)^m(1-x)^m(1+x)^m \left\{ \sum_{s=0}^{l-m} \Big/ \sum_{s=0}^{l+m} \right\} = \frac{(l-m)!}{(l+m)!}(-1)^m(1-x^2)^m \left\{ \sum_{s=0}^{l-m} \Big/ \sum_{s=0}^{l+m} \right\}$$

resta somente provar que as somas são iguais

observando os termos da soma $\sum_{s=0}^{l-m}$ verificamos que não há nenhuma indefinição já que $s \leq l-m \leq l$ sempre, mas na soma $\sum_{s=0}^{l+m}$ há, pois

$(s-m)!$ não pode ser calculado para $s < m$

$(l-s)!$ não pode ser calculado para $s > l+1$

então esta soma se reduz a:

$$\sum_{s=0}^{l+m} = \sum_{s=m}^{l} \frac{(x+1)^s(x-1)^{l-s}}{s!(l+m-s)!(s-m)!(l-s)!} \quad , \text{ definindo } s' = l-s$$

$$= \sum_{s'=l-m}^{s'=0} \frac{(x+1)^{l-s'}(x-1)^{s'}}{(l-s')!(s'+m)!(l-m-s')!\,s'!} = \sum_{s'=0}^{l-m} \frac{(x-1)^{s'}(x+1)^{l-s'}}{s'!(l-m-s')!(s'+m)!(l-s')!}$$

cqd

então $\quad P_l^{-m}(x) = (-1)^m \dfrac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x) \quad , \quad |m| \leq l$

com a condição de normalização: $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_{l'}^m(x)\,P_l^m(x)\,dx = \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\delta_{l'l}$

As funções $Q_m(\varphi) = e^{im\varphi}$ formam um conjunto completo de funções ortogonais no índice m no intervalo $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ e as funções $P_l^m(\cos\theta)$ um conjunto semelhante no índice l, para cada valor de m, no intervalo $-1 \leq \cos\theta \leq +1$

O produto $P_\ell^m Q_m$ forma um conjunto ortogonal completo sobre a superfície de uma esfera unitária nos índices ℓ e m, estas funções normalizadas são:

$$Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\, P_\ell^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}$$

verifica-se que: $Y_{\ell,-m}(\theta,\varphi) = (-1)^m Y^*_{\ell m}(\theta,\varphi)$

condições de ortonormalidade: $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, Y^*_{\ell' m'}(\theta,\varphi)\, Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = \delta_{\ell'\ell}\,\delta_{m'm}$

relação de completeza: $\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y^*_{\ell m}(\theta',\varphi')\, Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = \delta(\varphi-\varphi')\,\delta(\cos\theta-\cos\theta')$

$Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ são os harmônicos esféricos:

$\ell=0$: $Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$

$\ell=1$: $Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$, $Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\operatorname{sen}\theta\, e^{i\varphi}$

$\ell=2$: $\begin{cases} Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right), \quad Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\, e^{i\varphi}, \\ Y_{22} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\operatorname{sen}^2\theta\, e^{2i\varphi} \end{cases}$

etc

Uma função arbitrária $g(\theta,\varphi)$ pode ser desenvolvida em série de harmônicos esféricos:

$$g(\theta,\varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$$

onde os coeficientes são: $A_{\ell m} = \int d\Omega\, Y^*_{\ell m}(\theta,\varphi)\, g(\theta,\varphi)$

A solução geral do potencial pode ser escrita como:

$$\boxed{\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\left[A_{\ell m} r^{\ell} + B_{\ell m} r^{-(\ell+1)}\right] Y_{\ell m}(\theta,\varphi)}$$