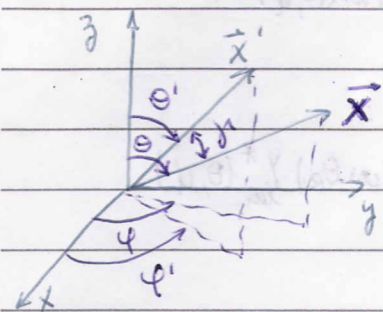


### 3) Teorema da Adição

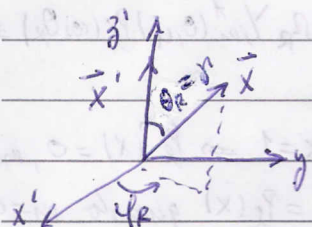


$$P_l(\cos \gamma) = ?$$

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')$$

$\gamma$  é o ângulo entre  $\vec{x}$  e  $\vec{x}'$

Imaginemos uma rotação no sistema acima tal que o novo sistema tenha o eixo  $z' \parallel \vec{x}'$ . Neste novo sistema o ângulo zenital é  $\theta_r$  e  $\varphi$ .



$$P_l(\cos \gamma) = f(\theta, \varphi) \text{ para } \theta' \text{ e } \varphi' \text{ fixos, então:}$$

parâmetros

$$P_l(\cos \gamma) = \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m=-l'}^{l'} A_{l'm}(\theta', \varphi') Y_{l'm}(\theta, \varphi)$$

verifica-se ainda que:  $P_l(\cos \gamma) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{l,0}(\theta_r, \varphi_r)$

Os harmônicos esféricos satisfazem à equação diferencial:

$$\nabla^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) + \frac{l(l+1)}{r^2} Y_{lm}(\theta, \varphi) = 0$$

e devem satisfazê-la também para as variáveis  $\theta_r$  e  $\varphi_r$ , mas o laplaciano é invariante sob rotações:  $\nabla'^2 \psi = \vec{\nabla}' \cdot \vec{\nabla}' \psi = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \psi = \nabla^2 \psi$

então:  $\nabla^2 Y_{lm}(\theta_r, \varphi_r) + \frac{l(l+1)}{r^2} Y_{lm}(\theta_r, \varphi_r) = 0$

então:  $Y_{l,0}(\theta_r, \varphi_r) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m=-l'}^{l'} A_{l'm}(\theta', \varphi') Y_{l'm}(\theta, \varphi)$

que nas equações diferenciais ficam:

$$\sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m=-l'}^{l'} A_{l'm}(\theta', \varphi') \left[ \nabla^2 Y_{l'm}(\theta, \varphi) + \frac{l(l+1)}{r^2} Y_{l'm}(\theta, \varphi) \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m=-l'}^{l'} A_{l'm}(\theta', \varphi') \left[ -\frac{l'(l'+1)}{r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] Y_{l'm}(\theta, \varphi) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l = l' \text{ ou } A_{l'm} = 0 \Rightarrow A_{l'm} = 0 \text{ para } l \neq l'$$

portanto, a expansão de  $P_l(\cos\theta)$  se reduz a:

$$P_l(\cos\theta) = \sum_{m=-l}^l A_m Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

( $l=1$ , não precisa da soma em  $l'$ )

e os coeficientes calculados na forma usual:

$$A_m = \int d\Omega P_l(\cos\theta) Y_{lm}^*(\theta, \varphi) = \int d\Omega_P P_l(\cos\theta_P) Y_{lm}^*(\theta, \varphi)$$

Analogamente podemos expandir:

$$\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}^*(\theta, \varphi) = \sum_{m'=-l}^l B_{lm'}(m) Y_{lm'}(\theta_P, \varphi_P)$$

$$\text{onde } B_{l0}(m) = \int d\Omega_P \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{l0}(\theta_P, \varphi_P) = \int d\Omega_P Y_{lm}^*(\theta, \varphi) P_l(\cos\theta_P) = A_{lm}$$

como  $P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$ , quando  $x=1 \Rightarrow P_l^m(x) = 0, m \neq 0$   
 e  $P_l^m(x) = P_l(x)$  quando  $m=0$

$$\text{assim: } \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \Big|_{\theta_P=0} = B_{l0}(m) \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} P_l(1) = B_{l0}(m) \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}$$

normaliz

$$\text{então: } A_m = B_{l0}(m) = \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \Big|_{\theta_P=0} = \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}^*(\theta', \varphi')$$

para  $\theta_P=0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{x}'$

$$\text{então: } P_l(\cos\theta) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

que é o teorema da adição dos harmônicos esféricos

$$\text{quando } \varphi \rightarrow 0: \sum_{m=-l}^l |Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi}$$

que é a regra da soma dos módulos quadrados dos  $Y_{lm}$

O potencial em  $\vec{x}$  de uma carga pontual em  $\vec{x}'$ , satisfaz a equação de Laplace em coordenadas esféricas com simetria azimutal, se usarmos o sistema de eixos rodado ( $z' \parallel \vec{x}'$ ), daí:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos\theta)$$

$$\phi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos\theta)$$

em particular, para  $y=0$ :

$$\text{para } r < r': \phi(r,0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'-r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'(1-r/r')} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'} \left\{ 1 + \frac{r}{r'} + \frac{r^2}{r'^2} + \dots \right\} = \\ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^l$$

$$\text{para } r > r': \phi(r,0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r-r'} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r(1-r'/r)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ 1 + \frac{r'}{r} + \frac{r'^2}{r^2} + \dots \right\} = \\ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l$$

estendendo estes resultados para  $y \neq 0$ :

$$\phi(r,0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^l P_l(\cos y), \quad r < r'$$

$$\phi(r,0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos y), \quad r > r'$$

que numa notação mais geral fica:

$$\phi(r,0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos y)$$

ou usando o teorema da adição:

$$\phi(r,0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

chegamos à fatoração muito útil nas integrações sobre densidades de carga:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

4)

## 5) Expansão das Funções de Green em Coordenadas Esféricas

S	T	Q	Q	S	S	D
□	□	□	□	□	□	□
L	M	M	J	V	S	D

SEMANA

Vimos a expansão das funções de Green:

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_l^l}{r_l^{l+1}} y_{lm}^*(\theta, \varphi) y_{lm}(\theta', \varphi')$$

para o caso sem superfícies de contorno (exceto no infinito).  
Para um problema exterior com uma superfície de contorno em  $r=a$ , vimos pelo método das imagens que:

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} - \frac{a}{x'|\vec{x}-\frac{a^2}{x'}\vec{x}'|} = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} - \frac{1}{|\vec{y}-\vec{y}'|}$$

com  $\vec{y} = x'\vec{x}/a$  e  $\vec{y}' = a\vec{x}'/x'$

cujos módulos são:  $y = r'r/a$  e  $y' = a$

então a expansão para o segundo termo irá conter:

$$\frac{r_l^l}{r_l^{l+1}} = \frac{a^l}{(rr'/a)^{l+1}} = \frac{a^l a^{l+1}}{(rr')^{l+1}} \frac{1}{a} = \left(\frac{a^2}{rr'}\right)^{l+1} \frac{1}{a}$$

assim:

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = 4\pi \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1} \left[ \frac{r_l^l}{r_l^{l+1}} - \frac{1}{a} \left(\frac{a^2}{rr'}\right)^{l+1} \right] y_{lm}^*(\theta, \varphi) y_{lm}(\theta', \varphi')$$

agora o fator radial entre colchetes fica para:

$$r < r': [\dots] = \frac{1}{r^{l+1}} \left[ r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} \right] = 0, \text{ se } r=a$$

$$\rightarrow 0, \text{ se } r' \rightarrow \infty$$

$$r > r': [\dots] = \frac{1}{r^{l+1}} \left[ r^{l+1} - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} \right] = 0, \text{ se } r'=a$$

$$\rightarrow 0, \text{ se } r \rightarrow \infty$$

são simétricos  $r \leftrightarrow r'$

são combinações lineares de  $r^l$  e  $r^{-(l+1)}$  } Soluções da parte radial da eq. de Laplace

As funções de Green satisfazem a equação:  $\nabla_x^2 G(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}')$

com a condição de contorno  $G(\vec{x}, \vec{x}') = 0$  para  $\vec{x}$  ou  $\vec{x}'$  em  $S$  em coordenadas esféricas:

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \delta(\omega_0 - \omega_0') \delta(\varphi - \varphi')$$

que da relação de completiza

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) = \delta(\omega_0 - \omega_0') \delta(\varphi - \varphi')$$

vem:

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

Assim:

$$\nabla_x^2 G(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r - r') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

e procuramos solução na forma:

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l g_l(r, r') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

Substituindo na equação diferencial, vem:

$$\sum_{l,m} \nabla_x^2 g_l(r, r') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r - r') \sum_{l,m} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dr^2} g_l(r, r') + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} g_l(r, r') - \frac{l(l+1)}{r^2} g_l(r, r') = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r - r')$$

no caso  $r \neq r'$  temos a equação de Laplace com soluções:

$$g_l(r, r') = \begin{cases} A r^l + B r^{-(l+1)}, & \text{para } r < r' \\ A' r^l + B' r^{-(l+1)}, & \text{para } r > r' \end{cases}$$

Sejam duas superfícies de contorno em  $r=a$  e  $r=b$  definindo um volume  $V$ :



$g_l(r, r') = 0$  para  $r=a$  e  $r=b$

$$\begin{cases} A a^l + B a^{-(l+1)} = 0 \Rightarrow B = -A a^{2l+1} \\ A' b^l + B' b^{-(l+1)} = 0 \Rightarrow A' = -B' b^{-(2l+1)} \end{cases}$$

daí:  $g_l(r, r') = \begin{cases} A \left( r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} \right), & r < r' \\ B' \left( \frac{1}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right), & r > r' \end{cases}$

$\begin{cases} A = A(r') \\ B' = B'(r') \end{cases}$

e  $g_l(r', r) = \begin{cases} A \left( r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right), & r' < r \\ B' \left( \frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}} \right), & r' > r \end{cases}$

$\begin{cases} A = A(r) \\ B' = B'(r) \end{cases}$

Como temos a simetria  $g_l(r, r') = g_l(r', r)$ , podemos escrever a função  $g_l(r, r')$  numa forma mais compacta como:

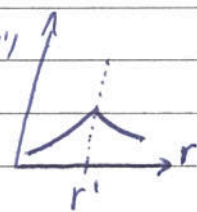
$g_l(r, r') = C \left( r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) \left( \frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}} \right)$

falta determinar C: da eq. diferencial:

$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r g_l(r, r')) - \frac{l(l+1)}{r^2} g_l(r, r') = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r-r') \xrightarrow{+r}$

$\frac{d^2}{dr^2} (r g_l(r, r')) - \frac{l(l+1)}{r} g_l(r, r') = -\frac{4\pi}{r} \delta(r-r') \xrightarrow{\int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} dr}$   
 $(\epsilon \rightarrow 0)$

$\left\{ \frac{d}{dr} (r g_l(r, r')) \right\}_{r'+\epsilon} - \left\{ \frac{d}{dr} (r g_l(r, r')) \right\}_{r'-\epsilon} = -\frac{4\pi}{r'} \quad (*)$

indicando uma descontinuidade em  $r=r'$ : 

fazendo  $r_2 = r'$  e  $r_3 = r$ :

$r g_l(r, r') = C \left( r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) \left( \frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}} \right)$

$\Rightarrow \left\{ \frac{d}{dr} [r g_l(r, r')] \right\}_{r'+\epsilon} = C \left( r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right) \left[ \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r^l} - \frac{r^{l+1}}{b^{2l+1}} \right) \right]_{r=r'}$   
 $= -\frac{C}{r'} \left[ 1 - \left( \frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \right] \left[ l + (l+1) \left( \frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right]$

analogamente:  $\left\{ \frac{d}{dr} [r g_l(r, r')] \right\}_{r'-\epsilon} = \frac{C}{r'} \left[ l + (l+1) \left( \frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \right] \left[ 1 - \left( \frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right]$

substituindo de volta em (\*):  $C = \frac{4\pi}{(2l+1) \left[ 1 - \left( \frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right]}$

a expansão da função de Green fica:

$G(\vec{x}, \vec{x}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta', \phi')}{(2l+1) \left[ 1 - \left( \frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right]} \left( r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) \left( \frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}} \right)$

2 casos especiais importantes são:

$$a=0 : G(\vec{x}, \vec{x}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)}{2l+1} r_2^l \left( \frac{1}{r_1^{2l+1}} - \frac{r_2^{2l}}{b^{2l+1}} \right)$$

que pode ser aplicado para o potencial dentro da esfera;

$$b \rightarrow \infty : G(\vec{x}, \vec{x}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)}{2l+1} \frac{1}{r_1^{2l+1}} \left( r_2^{2l} - \frac{a^{2l+1}}{r_2^{2l+1}} \right)$$

que pode ser aplicado para o potencial fora da esfera.

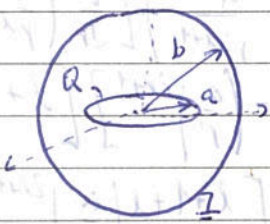
no caso  $a=0$  e tomando  $r_2 = r$  e  $r_1 = r'$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n'} &= \frac{\partial G}{\partial r'} \Big|_{r'=b} = 4\pi \sum_{l,m} \frac{Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)}{2l+1} r^l \left[ \frac{-(l+1)}{r'^{l+2}} - \frac{l r'^{l-1}}{b^{2l+1}} \right]_{r'=b} \\ &= 4\pi \sum_{l,m} \frac{Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)}{2l+1} r^l \left[ \frac{-(2l+1)}{b^{l+2}} \right] \\ &= -\frac{4\pi}{b^2} \sum_{l,m} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \left( \frac{r}{b} \right)^l \end{aligned}$$

é a solução da equação de Laplace dentro de  $r=b$  com  $\phi = V(\theta', \varphi')$  na superfície  $\vec{x}'$ :

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\vec{x}') G(\vec{x}, \vec{x}') d^3x' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \phi(\vec{x}') \frac{\partial G}{\partial n'} da' \\ &= + \frac{4\pi}{4\pi b^2} \sum_{l,m} \left[ \int V(\theta', \varphi') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') b^2 d\Omega' \right] \left( \frac{r}{b} \right)^l Y_{lm}(\theta, \varphi) \\ &= \sum_{l,m} \left[ \int V(\theta', \varphi') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') d\Omega' \right] \left( \frac{r}{b} \right)^l Y_{lm}(\theta, \varphi) \end{aligned}$$

Exemplo 1)



esfera oca aterrada (raio b) com um eixoel concêntrico (raio a) com carga Q sobre o plano xy.

anel:  $\rho(\vec{x}') = \frac{Q}{2\pi a^2} \delta(r'-a) \delta(\cos\theta'-1)$

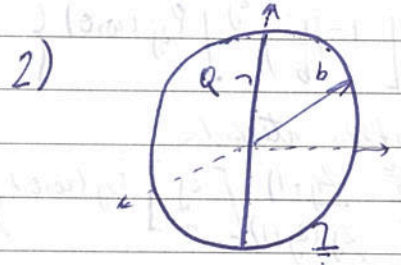
$\rho(\vec{x}') = kQ \delta(r'-a) \delta(\cos\theta'-1)$

$$\begin{aligned} Q &= \int \rho(\vec{x}') d^3x' = kQ \int \delta(r'-a) \delta(\cos\theta'-1) r'^2 \sin\theta' dr' d\theta' d\varphi' \\ &= kQ \int \delta(r'-a) \delta(-\cos\theta') r'^2 dr' d\theta' d\varphi' \\ &= kQ [a^2 2\pi] \Rightarrow k = \frac{1}{2\pi a^2} \end{aligned}$$

Como, neste caso, temos simetria azimutal, somente termos com  $m=0$  sobrevivem na expansão de  $G(\vec{x}, \vec{x}')$  de  $a=0$ . A integral de volume fica:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{x}') G(\vec{x}, \vec{x}') d^3x' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{Q}{2\pi r'^2} \delta(r'-a) \delta(\omega_0') 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{Y_{l0}^*(\theta, \varphi') Y_{l0}(\theta, \varphi)}{2l+1} r'^l \left( \frac{1-r'^l}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right) r'^2 dr' d\omega_0' d\varphi' \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2l+1}}{4\pi} P_l(0) r^l \left( \frac{1-r^l}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right) \frac{\sqrt{2l+1}}{4\pi} P_l(\omega_0) \Rightarrow \\ \phi(\vec{x}) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(0) r^l \left( \frac{1-r^l}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right) P_l(\omega_0), \end{aligned}$$

onde  $r < (r >)$  é o menor (maior) entre  $r$  e  $a$



2) esfera oca aterrada (raio  $b$ ) com uma linha de comprimento  $2b$  com carga  $Q$  entre os polos da esfera

linha:  $\rho(\vec{x}') = \frac{Q}{2b} \frac{1}{2\pi r'^2} [\delta(\omega_0'-1) + \delta(\omega_0'+1)]$

usar  $\lambda = \frac{dQ}{dz}$

$$\begin{aligned} \rho(\vec{x}') &= KQ [\delta(\omega_0'-1) + \delta(\omega_0'+1)] \\ Q &= \int \rho(\vec{x}') d^3x' = KQ \int [\delta(\omega_0'-1) + \delta(\omega_0'+1)] r' dr' r' d(\omega_0') d\varphi' = \\ &= KQ \int_0^{\pi} [\delta(z'/r'-1) + \delta(z'/r'+1)] r'/r' dz' d\varphi' = \\ &= KQ r'^2 2b 2\pi \Rightarrow K = \frac{1}{2b 2\pi r'^2} \end{aligned}$$

agora:  $\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{x}') G(\vec{x}, \vec{x}') d^3x' =$

$$\begin{aligned} &= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 b} \int_V \frac{1}{2\pi r'^2} [\delta(\omega_0'-1) + \delta(\omega_0'+1)] 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{Y_{l0}^*(\theta, \varphi') Y_{l0}(\theta, \varphi)}{2l+1} r'^l \left( \frac{1-r'^l}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right) r'^2 dr' d(\omega_0') d\varphi' = \\ &= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 b} \sum_{l=0}^{\infty} [P_l(1) + P_l(-1)] P_l(\omega_0) \int_0^b r'^l \left( \frac{1-r'^l}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right) dr' \end{aligned}$$

quebrando a integral em 2 intervalos:  $0 \leq r' < r$  e  $r \leq r' \leq b$

$$\begin{aligned} \int_0^b &= \left( \frac{1}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right) \int_0^r r'^l dr' + r^l \int_r^b \left( \frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right) dr' = \\ &= \left( \frac{1}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right) \frac{r^{l+1}}{l+1} + r^l \left( \frac{-b^{-l} + r^{-l}}{l} - \frac{r^l}{(l+1)b^{2l+1}} + \frac{r^{l+1}}{(l+1)b^{2l+1}} \right) \Rightarrow \end{aligned}$$



$$\int_0^b \frac{1}{l+1} - \frac{r^{2l+1}}{(l+1)b^{2l+1}} - \frac{r^l}{lb^l} + \frac{1}{l} - \frac{r^l}{(l+1)b^l} + \frac{r^{2l+1}}{(l+1)b^{2l+1}} =$$

$$= \frac{1}{l+1} + \frac{1}{l} - \frac{r^l}{b^l} \left( \frac{1}{l} + \frac{1}{l+1} \right) - \frac{2l+1}{l(l+1)} \left[ \frac{1-r^l}{b^l} \right]$$

este resultado é indeterminado para  $l=0$ , neste caso, per L'Hopital:

$$\int_0^b = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{d/dl [1 - (r/b)^{2l}]}{d/dl [1 - (r/b)^l]} = \lim_{l \rightarrow 0} \left[ -d \frac{e^{l \ln r/b}}{dl} \right] =$$

$$= \lim_{l \rightarrow 0} \left[ -\frac{\ln r}{b} e^l \right] = \frac{\ln b}{r}$$

assim, lembrando que  $P_2(1) = 1$  e  $P_2(-1) = (-1)^2$

$$\phi(\bar{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} \left\{ \frac{\ln b}{r} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(4j+1)}{2^j(2j+1)} \left[ \frac{1-(r/b)^{2j}}{b} \right] P_{2j}(\cos\theta) \right\}$$

e a densidade superficial de carga na esfera aterrada:

$$\sigma(\theta) = \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=b} = \frac{Q}{4\pi b^2} \left\{ \frac{-1}{b} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(4j+1)}{2^j(2j+1)} \left[ \frac{-2r^j}{b} \right] P_{2j}(\cos\theta) \right\} =$$

$$= -\frac{Q}{4\pi b^2} \left[ 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(4j+1)}{2^j(2j+1)} P_{2j}(\cos\theta) \right]$$