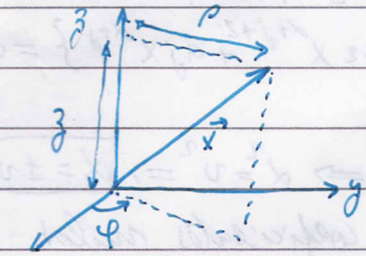
3) Coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$



escrevendo o potencial na forma:

$$\phi(\rho,\varphi,z) = R(\rho)\,Q(\varphi)\,Z(z)$$

conduz a três eqs. diferenciais ordinárias:

$$\frac{d^2Z}{dz^2} - K^2 Z = 0 \;, \quad \frac{d^2Q}{d\varphi^2} + \nu^2 Q = 0$$

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(K^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R = 0$$

as soluções das duas primeiras são triviais:

$$Z(z) \sim e^{\pm Kz} \;, \quad Q(\varphi) \sim e^{\pm i\nu\varphi}$$

onde K é arbitrário e ν é um inteiro, vamos admitir que K seja real e positivo

Para a eq. radial: $x \equiv K\rho \Rightarrow \boxed{\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)R = 0}$

esta é a equação de Bessel cujas soluções são as funções de Bessel de ordem ν.

Propondo-se a solução na forma $R(x) = x^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$

$$\frac{1}{x^2}R = \sum_j x^{\alpha+j-2} \;, \quad \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} = \frac{1}{x}\sum_j (\alpha+j)a_j x^{\alpha+j-1} = \sum_j (\alpha+j)a_j x^{\alpha+j-2}$$

$$\frac{d^2R}{dx^2} = \sum_j (\alpha+j)(\alpha+j-1)a_j x^{\alpha+j-2}$$

na eq. de Bessel:

$$\Rightarrow \sum_j (\alpha+j)(\alpha+j-1)\, a_j\, x^{\alpha+j-2} + \sum_j (\alpha+j)\, a_j\, x^{\alpha+j-2} + \sum_j a_j x^{\alpha+j} - \nu^2 \sum_j a_j x^{\alpha+j-2} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_j \left[(\alpha+j)(\alpha+j-1) + (\alpha+j) - \nu^2\right] a_j\, x^{\alpha+j-2} + \sum_j a_j x^{\alpha+j} = 0$$

$$\Rightarrow \left[\alpha(\alpha-1)+\alpha-\nu^2\right] a_0\, x^{\alpha-2} + \left[(\alpha+1)\alpha + (\alpha+1) - \nu^2\right] a_1\, x^{\alpha-1} +$$
$$+ \sum_{j=0} \left\{ \left[(\alpha+j+2)(\alpha+j+1) + (\alpha+j+2) - \nu^2\right] a_{j+2}\, x^{\alpha+j} + a_j x^{\alpha+j} \right\} = 0$$

para $a_1 = 0$ e $a_0 \neq 0 \Rightarrow \alpha(\alpha-1)+\alpha-\nu^2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = \nu^2 \Rightarrow \boxed{\alpha = \pm \nu}$
e todas as potências ímpares de x^j têm coeficientes nulos
agora

$$(\alpha+j+2)(\alpha+j+1) + (\alpha+j+2) - \nu^2 = \cancel{\alpha^2} + \alpha j + \alpha + \alpha j + j^2 + j + 2\alpha + 2j + 2 +$$
$$+ \alpha + j + 2 - \cancel{\nu^2} =$$
$$= (\alpha+j+2)(\alpha+j+1+1) - \nu^2 = (\alpha+j+2)^2 - \nu^2 = \cancel{\alpha^2} + 2\alpha(j+2) + (j+2)^2 - \cancel{\nu^2} =$$
$$= 2\alpha j + 4\alpha + j^2 + 4j + 4$$

assim $\quad \left[2\alpha j + 4\alpha + j^2 + 4j + 4\right] a_{j+2} = -a_j$

fazendo $2j' = j+2$ ou $j = 2j'-2$ vem

$$\left[2\alpha(2j'-2) + 4\alpha + (2j'-2)^2 + 4(2j'-2) + 4\right] a_{2j'} = -a_{2j'-2}$$

$$\left[4\alpha j' - \cancel{4\alpha} + \cancel{4\alpha} + 4j'^2 - \cancel{8j'} + \cancel{4} + \cancel{8j'} - \cancel{8} + \cancel{4}\right] a_{2j'} = -a_{2j'-2}$$

$$\left[4j'^2 + 4\alpha j'\right] a_{2j'} = -a_{2j'-2} \Rightarrow \boxed{a_{2j'} = \frac{-a_{2j'-2}}{4j'(j'+\alpha)}}\ , j' = 1, 2, 3, \ldots$$

$$a_2 = \frac{-a_0}{4\cdot 1\cdot(1+\alpha)} = \frac{(-1)^1 a_0}{2^2\cdot 1\,(\alpha+1)}, \quad a_4 = \frac{(-1)^2 a_0}{2^4\cdot 2\cdot 1\,(\alpha+2)(\alpha+1)}, \quad a_6 = \frac{(-1)^3 a_0}{2^6\cdot 3\cdot 2\cdot 1\,(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)}, \text{ etc.}$$

e por convenção: $a_0 \equiv \dfrac{1}{2^\alpha}$, assim: $a_{2j'} = \dfrac{(-1)^{j'}\,\alpha!}{2^{2j'+\alpha}\, j'!\,(\alpha+j')!}$

então: $R(x) = x^\alpha \sum_j a_j x^j = \left(\dfrac{x}{2}\right)^\alpha \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^j\,\alpha!}{j!\,(\alpha+j)!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2j}$ → somente potências pares

e as duas soluções são:

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j\,\nu!}{j!\,(j+\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j}$$

$(j+\nu)! = \Gamma(j+\nu+1)$

$$J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j\,\nu!}{j!\,(j-\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j},$$

$(j-\nu)! = \Gamma(j-\nu+1)$

que são as funções de Bessel de primeira espécie de ordem ν e $-\nu$

Como $\nu = m$ (inteiro)

$$J_{-m} = \sum_j \frac{(-1)^j \, \nu!}{j!\,(j-m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j-m} \overset{j-m=j'}{=} \sum_{j'} \frac{(-1)^{j'}(-1)^m \, \nu!}{(j'+m)!\,j'!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j'+m} = (-1)^m J_m$$

portanto são linearmente dependentes e é necessário encontrar outra solução.

As funções de Neumann (ou de Bessel de segunda espécie) são definidas:

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\operatorname{sen}\nu\pi} = -\frac{(\nu-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu + \dots$$

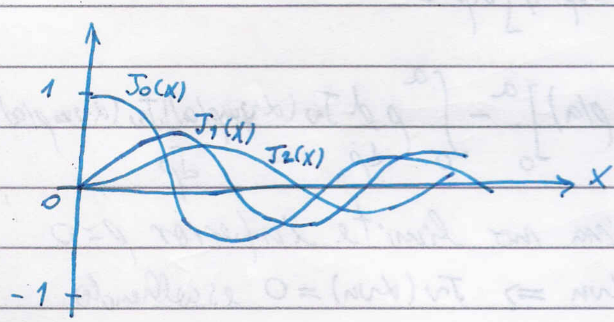
e as funções de Hankel (ou de Bessel de terceira espécie) são:

$$\begin{cases} H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + i N_\nu(x) \\ H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - i N_\nu(x) \end{cases}$$

que formam um conjunto de soluções da equação de Bessel.

Qualquer uma destas funções satisfazem às fórmulas de recorrência:

$$\left.\begin{aligned} \Omega_{\nu-1}(x) + \Omega_{\nu+1}(x) &= \frac{2\nu}{x}\Omega_\nu(x) \\ \Omega_{\nu-1}(x) - \Omega_{\nu+1}(x) &= 2\frac{d}{dx}\Omega_\nu(x) \end{aligned}\right\} \Omega_{\nu+1}(x) = \frac{\nu}{x}\Omega_\nu(x) - \frac{d}{dx}\Omega_\nu(x)$$



$x_{\nu n}$: n-ésima raiz de $J_\nu(x)$

$J_\nu(x_{\nu n}) = 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$

$\nu = 0$: $x_{0n} = 2.405, 5.520, 8.654$

$\nu = 1$: $x_{1n} = 3.832, 7.016, 10.173$

$\nu = 2$: $x_{2n} = 5.136, 8.417, 11.620$

e para raízes de ordem superior: $x_{\nu n} \simeq n\pi + (\nu - 1/2)\frac{\pi}{2}$

Como: $\frac{d^2}{dx^2}J_\nu(x) + \frac{1}{x}\frac{d J_\nu(x)}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)J_\nu(x) = 0$

lembrando que $x = k\rho$ e definindo $k_{\nu n} = \alpha_{\nu n}/a$, vem:

$$\frac{d^2}{d\rho^2}J_\nu(\alpha_{\nu n}\rho/a) + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}J_\nu(\alpha_{\nu n}\rho/a) + \left(\frac{\alpha_{\nu n}^2}{a^2} - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right)J_\nu(\alpha_{\nu n}\rho/a) = 0$$

introduzindo um novo índice $k_{\nu m} = \alpha_{\nu m}/a$: $(m \neq n)$

$$\frac{d^2}{d\rho^2} J_\nu(\alpha_{\nu m}\rho/a) + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho} J_\nu(\alpha_{\nu m}\rho/a) + \left(\frac{\alpha_{\nu m}^2}{a^2} - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right) J_\nu(\alpha_{\nu m}\rho/a) = 0$$

multiplicando a primeira equação por $\rho J_\nu(\alpha_{\nu m}\rho/a)$ e a segunda por $\rho J_\nu(\alpha_{\nu n}\rho/a)$ e subtraindo as duas:

$$J_\nu(\alpha_{\nu n}\rho/a)\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d}{d\rho} J_\nu(\alpha_{\nu m}\rho/a)\right] - J_\nu(\alpha_{\nu m}\rho/a)\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d}{d\rho} J_\nu(\alpha_{\nu n}\rho/a)\right] =$$

$$= \frac{\alpha_{\nu n}^2 - \alpha_{\nu m}^2}{a^2}\,\rho\, J_\nu(\alpha_{\nu m}\rho/a) J_\nu(\alpha_{\nu n}\rho/a)$$

integrando de $\rho = 0$ a $\rho = a$:

$$\int_0^a J_\nu(\alpha_{\nu n}\rho/a)\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d}{d\rho} J_\nu(\alpha_{\nu m}\rho/a)\right] d\rho - \int_0^a J_\nu(\alpha_{\nu m}\rho/a)\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d}{d\rho} J_\nu(\alpha_{\nu n}\rho/a)\right] d\rho =$$

$$= \frac{\alpha_{\nu n}^2 - \alpha_{\nu m}^2}{a^2}\int_0^a J_\nu(\alpha_{\nu m}\rho/a) J_\nu(\alpha_{\nu n}\rho/a)\,\rho\, d\rho \qquad (*)$$

agora: $\displaystyle\int_0^a J_\nu(\alpha_{\nu n}\rho/a)\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d}{d\rho} J_\nu(\alpha_{\nu m}\rho/a)\right] d\rho =$

$$= \left[J_\nu(\alpha_{\nu n}\rho/a)\,\rho\frac{d}{d\rho} J_\nu(\alpha_{\nu m}\rho/a)\right]_0^a - \int_0^a \rho\frac{d}{d\rho} J_\nu(\alpha_{\nu m}\rho/a)\frac{d}{d\rho} J_\nu(\alpha_{\nu n}\rho/a)\, d\rho$$

o fator ρ no 1º termo determina no limite inferior $\rho = 0$

no limite superior $\alpha_{\nu n}\rho/a = \alpha_{\nu n} \Rightarrow J_\nu(\alpha_{\nu n}) = 0$ escolhendo $\alpha_{\nu n}$ como raiz de J_ν

o 2º termo é exatamente o mesmo trocando os índices $n \Leftrightarrow m$, então todo o lado esquerdo da igualdade $(*)$ é zero

então: $\displaystyle\int_0^a J_\nu(\alpha_{\nu m}\rho/a) J_\nu(\alpha_{\nu n}\rho/a)\,\rho\, d\rho = 0$, para $n \neq m$

Suponhamos agora que $\alpha_{\nu m}$ satisfaça a condição de contorno $J_\nu(\alpha_{\nu m}\rho/a) = 0$, mas existe um K que não necessariamente o faça. Reescrevendo $(*)$ para $K = \alpha_{\nu n}/a$:

$$\int_0^a J_\nu(k\rho)\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d}{d\rho}J_\nu(k_{\nu m}\rho)\right]d\rho-\int_0^a J_\nu(k_{\nu m}\rho)\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d}{d\rho}J_\nu(k\rho)\right]d\rho=$$

$$=\left[J_\nu(k\rho)\rho\frac{d}{d\rho}J_\nu(k_{\nu m}\rho)-\cancelto{0}{J_\nu(k_{\nu m}\rho)}\rho\frac{d}{d\rho}J_\nu(k\rho)\right]_0^a=$$

$$=aJ_\nu(ka)k_{\nu m}J_\nu'(k_{\nu m}a)=(k^2-k_{\nu m}^2)\int_0^a J_\nu(k_{\nu m}\rho)J_\nu(k\rho)\rho\,d\rho$$

diferenciando em k:

$$a\,a J_\nu'(ka)k_{\nu m}J_\nu'(k_{\nu m}a)=2k\int_0^a J_\nu(k_{\nu m}\rho)J_\nu(k\rho)\rho\,d\rho+$$
$$+(k^2-k_{\nu m}^2)\int_0^a J_\nu(k_{\nu m}\rho)\rho J_\nu'(k\rho)\rho\,d\rho$$

tomando o limite $k\to k_{\nu m}$ chegamos à normalização:

$$\int_0^a[J_\nu(k_{\nu m}\rho)]^2\rho\,d\rho=\frac{a^2}{2}[J_\nu'(k_{\nu m}a)]^2.$$

Resumindo: $\int_0^a J_\nu(\alpha_{\nu m}\rho/a)J_\nu(\alpha_{\nu n}\rho/a)\rho\,d\rho=\frac{a^2}{2}[J_\nu'(k_{\nu m}a)]^2\delta_{mn}$

das fórmulas de recorrência vemos ainda que

$J_\nu'(x)=\frac{\nu}{x}J_\nu(x)-J_{\nu+1}(x)$

mas, se $x_{\nu m}$ é raiz de $J_\nu(x)\Rightarrow J_\nu(x_{\nu m})=J_\nu(k_{\nu m}a)=0$

então

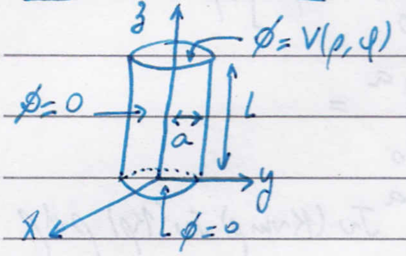
$$\boxed{\int_0^a J_\nu(k_{\nu m}\rho)J_\nu(k_{\nu n}\rho)\rho\,d\rho=\frac{a^2}{2}[J_{\nu+1}(k_{\nu m}a)]^2\delta_{mn}}$$

Admitindo que o conjunto de funções de Bessel é completo, podemos expandir uma função arbitrária $f(\rho)$ no intervalo $0\le\rho\le a$ na Série de Fourier-Bessel

$$f(\rho)=\sum_{m=1}^{\infty}A_{\nu m}J_\nu(k_{\nu m}\rho)$$

onde $$A_{\nu m}=\frac{2}{a^2J_{\nu+1}^2(k_{\nu m}a)}\int_0^a\rho f(\rho)J_\nu(k_{\nu m}\rho)\,d\rho$$

Problema de Contorno:



$$\phi = R(\rho)Q(\varphi)Z(z)$$
$$\begin{cases} Q(\varphi) = A\,\mathrm{sen}\, m\varphi + B\,\mathrm{sen}\, m\varphi \\ Z(z) = \mathrm{senh}(Kz) \end{cases}$$

com m inteiro e K um parâmetro a determinar

$$R(\rho) = C J_m(K\rho) + D N_m(K\rho)$$

como $\phi(\rho=a)=0$: $K_{mn} = \dfrac{x_{mn}}{a}$, $n = 1,2,3,\ldots$ onde $J_m(x_{mn}) = 0$

$\phi(\rho=0) = \text{finito} \Rightarrow D = 0$

Solução geral: $$\phi(\rho,\varphi,z) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} J_m(K_{mn}\rho)\,\mathrm{senh}(K_{mn}z)\left(A_{mn}\,\mathrm{sen}\, m\varphi + B_{mn}\cos m\varphi\right)$$

em $z=L$: $\phi(\rho,\varphi,L) = V(\rho,\varphi)$:

$$V(\rho,\varphi) = \sum_{m,n} J_m(K_{mn}\rho)\,\mathrm{senh}(K_{mn}L)\left(A_{mn}\,\mathrm{sen}\, m\varphi + B_{mn}\cos m\varphi\right)$$

que é uma série de Fourier-Bessel, então:

$$A_{mn} = \frac{2\,\mathrm{cosech}(K_{mn}L)}{\pi a^2 J_{m+1}^2(K_{mn}a)}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a d\rho\,\rho\, V(\rho,\varphi) J_m(K_{mn}\rho)\,\mathrm{sen}\, m\varphi$$

$$B_{mn} = \frac{2\,\mathrm{cosech}(K_{mn}L)}{\pi a^2 J_{m+1}^2(K_{mn}a)}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a d\rho\,\rho\, V(\rho,\varphi) J_m(K_{mn}\rho)\cos m\varphi$$

com $\frac{1}{2}B_{0n}$ quando $m=0$

Se $a\to\infty$: $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{senh}(K_{mn}z) \to \int_0^{\infty} dK\, e^{-Kz}$

para a condição de contorno $\phi(z\to\infty) = 0$, então

$$\phi(\rho,\varphi,z) = \sum_{m=0}^{\infty}\int_0^{\infty} dK\, e^{-Kz} J_m(K\rho)\left[A_m(K)\,\mathrm{sen}\, m\varphi + B_m(K)\cos m\varphi\right]$$

Se sobre o plano $z=0$: $\phi = V(\rho,\varphi)$ ← nova condição!

$$V(\rho,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty}\int_0^{\infty} dK\, J_m(K\rho)\left[A_m(K)\,\mathrm{sen}\, m\varphi + B_m(K)\cos m\varphi\right]$$

e os coeficientes serão

$$A_m(K) = \frac{K}{\pi}\int_0^{\infty} d\rho\,\rho \int_0^{2\pi} d\varphi\, V(\rho,\varphi) J_m(K\rho)\,\mathrm{sen}\, m\varphi$$

$$B_m(K) = \frac{K}{\pi}\int_0^{\infty} d\rho\,\rho \int_0^{2\pi} d\varphi\, V(\rho,\varphi) J_m(K\rho)\cos m\varphi,$$ (e para $m=0$ $\frac{1}{2}B_0(K)$)