

# Expansão em Multipolos

O potencial devido a uma distribuição de carga finita é:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'$$

tomaremos a origem dentro da distribuição de carga que é muito pequena:  $|\vec{x}| = r \gg R$  (dimensão da distribuição de carga)

Fora da esfera  $R$ , o potencial pode ser expandido em harmônicos esféricos:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}}$$

vimos que  $\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)$

como estamos fora da distribuição de carga  $r < r'$  e  $r > r'$ :

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1} \left[ \int r'^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \rho(\vec{x}') d^3x' \right] \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}}$$

assim  $q_{lm} = \int r'^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \rho(\vec{x}') d^3x'$

que são conhecidos como momentos de multipolo

$q_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int \rho(\vec{x}') d^3x' = \frac{q}{\sqrt{4\pi}}$  → escalar

$q_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int (x' - iy') \rho(\vec{x}') d^3x' = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x - ip_y)$  } componentes de um vetor

$q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int z' \rho(\vec{x}') d^3x' = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z$

$q_{22} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \int (x' - iy')^2 \rho(\vec{x}') d^3x' = \frac{1}{12\sqrt{2\pi}} (Q_{11} - 2iQ_{12} - Q_{22})$  } componentes de um tensor

$q_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \int z' (x' - iy') \rho(\vec{x}') d^3x' = -\frac{1}{3\sqrt{8\pi}} (Q_{13} - iQ_{23})$

$q_{20} = \frac{1}{2\sqrt{4\pi}} \int (3z'^2 - r'^2) \rho(\vec{x}') d^3x' = \frac{1}{2\sqrt{4\pi}} Q_{33}$

$$\text{como } \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\vec{x}\cdot\vec{x}' + r'^2}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\vec{x}\cdot\vec{x}'/r^2 + r'^2/r^2}} \approx$$

$$\approx \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{2\vec{x}\cdot\vec{x}'}{r^2} - \frac{r'^2}{r^2} \right) + \frac{3}{8} \left( 4 \frac{(\vec{x}\cdot\vec{x}')^2}{r^4} + \dots \right) + \dots = \right.$$

$$\approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{r^3} + \frac{1}{2r^5} [3(\vec{x}\cdot\vec{x}')^2 - r'^2 r^2] + \dots$$

Logo isso:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} \int d^3x' \rho(\vec{x}') + \frac{\vec{x}\cdot\vec{p}}{r^3} + \frac{1}{2r^5} \int d^3x' [3(\vec{x}\cdot\vec{x}')^2 - r'^2 r^2] \rho(\vec{x}') + \dots \right]$$

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{r} + \frac{\vec{x}\cdot\vec{p}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{ij} Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} + \dots \right]$$

onde: Momento de monopolo:  $q = \int d^3x' \rho(\vec{x}')$ , (escalar)

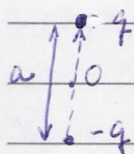
Momento de dipolo:  $\vec{p} = \int d^3x' \vec{x}' \rho(\vec{x}')$ , (vetor)

Momento de quadrupolo:  $Q_{ij} = \int d^3x' (3x_i x_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\vec{x}')$ , (tensor)

$$\text{Tr} Q = \sum_i Q_{ii} = \int d^3x' (3x_i x_i - r'^2 \delta_{ii}) \rho(\vec{x}') = \int d^3x' (3r'^2 - 3r'^2) \rho(\vec{x}') = 0 \quad \text{real, simétrico, traço nulo} \Rightarrow 5 \text{ graus}$$

O termo de monopolo dá o potencial devido às cargas como um todo e é o termo dominante para  $r \gg R$ : decaindo  $\propto 1/r$

O momento de dipolo é o primeiro momento da distribuição de cargas e está relacionado com distribuição espacial das cargas

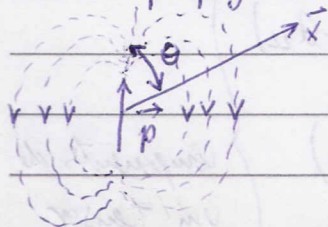


$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{|\vec{x}-\vec{a}/2|} + \frac{-q}{|\vec{x}+\vec{a}/2|} \right)$$

$$\text{para } |\vec{x}| = r \gg a: \frac{1}{|\vec{x} \pm \vec{a}/2|} = \frac{1}{r} \left( 1 \pm \frac{\vec{x}\cdot\vec{a}}{2r^2} \right) + \dots$$

$$\phi(\vec{x}) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left( 1 + \frac{\vec{x}\cdot\vec{a}}{2r^2} \right) - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left( 1 - \frac{\vec{x}\cdot\vec{a}}{2r^2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{x}\cdot\vec{a})}{r^3} = \frac{\vec{x}\cdot\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$\text{como } \vec{p} = p \hat{z}: \phi(\vec{x}) = \frac{r p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



$$E_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{2p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{p \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad E_\phi = -\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\phi}{\partial\phi} = 0$$

em coordenadas Cartesianas

$$(\vec{E}^p)_i = -\nabla \left( \frac{\vec{x} \cdot \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right)_i = -\partial_i \frac{x_j p_j}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{\delta_{ij} p_j}{r^3} - x_j p_j \left( -\frac{3\partial_i r}{r^4} \right) \right) =$$

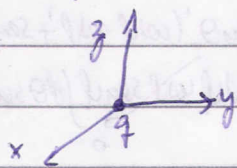
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{p_i}{r^3} + \frac{3x_j p_j}{r^4} \frac{x_i}{r} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3(\vec{x} \cdot \vec{p})\vec{x}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right)_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}^p = \frac{3\vec{x}(\vec{p} \cdot \vec{x})}{4\pi\epsilon_0 r^5} - \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{3\hat{n}(\vec{p} \cdot \hat{n}) - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}_0|^3}}, \quad \hat{n} = \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{|\vec{x} - \vec{x}_0|}$$

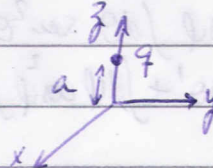
o momento de quadrupolo pode ser calculado de modo análogo com uma distribuição de 4 cargas:

+q     •     -q     e assim sucessivamente para octupolos,  
-q     •     +q     hexadecupolos, etc

A posição da origem muda tudo:



$$\phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$



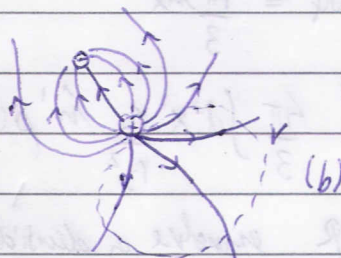
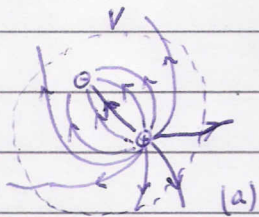
$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{x} - \vec{a}|}$$

(monopolo)

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{r} + \frac{q}{r^3} (\vec{x} \cdot \vec{a}) + \frac{q}{2r^5} (3(\vec{x} \cdot \vec{a})^2 - r^2 a^2) + \dots \right]$$

(dipolo)

Consideremos as seguintes situações:



queremos calcular a integral de  $\vec{E}(\vec{x})$  sobre o volume  $V$  das esferas representadas em (a) e em (b)

$$\int_{r \leq R} \vec{E}(\vec{x}) d^3x = - \int_{r \leq R} \vec{\nabla} \phi d^3x = -R^2 \int_{r=R} \phi(\vec{x}) \hat{n} d\Omega, \quad \text{onde}$$

onde  $\hat{n} = \vec{x}/R$  é a normal externa:  $\hat{n} = \sin\theta \cos\varphi \hat{i} + \sin\theta \sin\varphi \hat{j} + \cos\theta \hat{k}$  que são combinações lineares de Yem para  $l=1$ , então

$$-R^2 \int_{r=R} \rho(\vec{x}) \hat{n} d\Omega = -R^2 \int_{r=R} \frac{d^3x' \rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}-\vec{x}'|} \hat{n} d\Omega = -\frac{R^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{r=R} \frac{d^3x' \rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \hat{n} d\Omega$$

agora vemos que

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

a ortogonalidade dos Yem anulará todos os termos da soma, exceto os que têm  $l=1$ :

$$\int_{r=R} \frac{\hat{n} d\Omega}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{r_<}{r_>^2} \int d\Omega \hat{n} \cos\varphi$$

onde  $\cos\varphi = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\varphi - \varphi')$

calculando explicitamente a componente  $\hat{i}$  da integral:

$$\begin{aligned} \int d\Omega \, mx \cos\varphi &= \int \sin\theta d\theta d\varphi \cdot \sin\theta \cos\varphi \cdot (\cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\varphi - \varphi')) = \\ &= \int d\varphi \cos\varphi \int d\theta \sin^2\theta (\cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' (\cos\varphi \cos\varphi' + \sin\varphi \sin\varphi')) = \\ &= \int d\varphi \cos\varphi \int d\theta \sin^2\theta \cos\theta \cos\theta' + \int d\varphi \cos\varphi \int d\theta \sin^3\theta \sin\theta' \cos\varphi' + \int d\varphi \cos\varphi \sin\varphi \int d\theta \sin^3\theta \sin\theta' \sin\varphi' \end{aligned}$$

$$= \int d\varphi \cos^2\varphi = \int d\varphi (1 - \sin^2\varphi) = 2\pi - \int d\varphi \sin^2\varphi = 2\pi + \sin\varphi \cos\varphi \Big|_0^{2\pi} - \int d\varphi \cos^2\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \int d\varphi \cos^2\varphi = 2\pi \Rightarrow \int d\varphi \cos^2\varphi = \pi$$

$$\begin{aligned} \int d\theta \sin^3\theta &= \int d\theta \sin\theta (1 - \cos^2\theta) = \int \sin\theta d\theta - \int \sin\theta \cos^2\theta d\theta = \\ &= -\cos\theta \Big|_0^\pi + \int_1^{-1} u^2 du = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\int d\Omega \, mx \cos\varphi = \frac{4\pi}{3} \sin\theta' \cos\varphi' = \frac{4\pi}{3} mx'$$

$$\text{então: } \int_{r < R} \vec{E}(\vec{x}) d^3x = -\frac{R^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi}{3} \int d^3x' \frac{r_<}{r_>^2} \hat{n}' \rho(\vec{x}') = -\frac{\vec{p}}{3\epsilon_0}$$

a) quando a esfera de raio  $R$  envolve a densidade de carga:

$$r_> = R, r_< = r', \text{ daí } \int_{r < R} \vec{E}(\vec{x}) d^3x = -\frac{R^2}{3\epsilon_0} \int d^3x' \frac{r'}{R^2 r'} \hat{n}' \rho(\vec{x}') = -\frac{\vec{p}}{3\epsilon_0}$$

b) quando a esfera de raio  $R$  não envolve a densidade de carga:

$$\begin{aligned} r_< = R, r_> = r', \text{ daí } \int_{r < R} \vec{E}(\vec{x}) d^3x &= -\frac{R^3}{3\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\hat{n}' \rho(\vec{x}')}{r'^2} = -\frac{R^3}{3\epsilon_0} (-4\pi\epsilon_0 \vec{E}(0)) = \\ &= \frac{4\pi}{3} R^3 \vec{E}(0) \end{aligned}$$

em o valor médio do campo elétrico sobre um volume esférico que não contém cargas é o valor do campo no centro da esfera.

Conseqüentemente, o resultado de (a) deve ser incluído como correção para o campo de dipolo quando as cargas estão dentro da esfera.

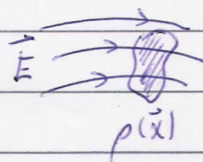
No resultado obtido anteriormente:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3\hat{n}(\vec{p}\cdot\hat{n}) - \vec{p}}{|\vec{x}-\vec{x}_0|^3} - \frac{4\pi}{3} \vec{p} \delta(\vec{x}-\vec{x}_0) \right]$$

Energia de uma distribuição de carga num campo externo:

A energia eletrostática, ignorando a auto-energia é:

$$W = \int \rho(\vec{x}) \phi(\vec{x}) d^3x$$



Se  $\phi$  varia lentamente na região onde  $\rho(\vec{x}) \neq 0$ , pode ser expandido em série de Taylor em torno da origem:

$$\phi(\vec{x}) = \phi(0) + \vec{x} \cdot \vec{\nabla} \phi(\vec{x}) \Big|_{x=0} + \frac{1}{2} x_i x_j \partial_i \partial_j \phi(\vec{x}) \Big|_{x=0} + \dots$$

$$= \phi(0) - \vec{x} \cdot \vec{E}(0) - \frac{1}{2} x_i x_j \partial_i \partial_j \phi(\vec{x}) \Big|_{x=0} + \dots$$

como  $\vec{E}$  é externo à região de  $\rho(\vec{x})$ :  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$

$$\text{então, adicionar o termo: } \frac{1}{6} r^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) \Big|_{x=0} = \frac{1}{6} r^2 \delta_{ij} \partial_i \partial_j \phi(\vec{x}) \Big|_{x=0}$$

não muda o potencial:

$$\phi(\vec{x}) = \phi(0) - \vec{x} \cdot \vec{E}(0) - \frac{1}{6} (3 x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \partial_i \partial_j \phi(\vec{x}) \Big|_{x=0} + \dots$$

$$\Rightarrow W = q \phi(0) - \vec{p} \cdot \vec{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_{i,j} Q_{ij} \partial_i \partial_j \phi(\vec{x}) \Big|_{x=0} + \dots$$

$$\text{assim: } \phi(\vec{x}) = \phi(0) - \vec{x} \cdot \vec{E}(0) - \frac{1}{6} (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \partial_i \partial_j \phi \Big|_{x=0} + \dots$$

$$\Rightarrow W = q\phi(0) - \vec{p} \cdot \vec{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_{ij} Q_{ij} \partial_i \partial_j \phi(\vec{x}) \Big|_{x=0} + \dots$$

Ex1) Energia de interação de um dipolo

$$\vec{p}_1 \uparrow (\vec{x}_1) \quad \vec{p}_2 \uparrow (\vec{x}_2) \quad W_{12} = -\vec{p}_1 \cdot \vec{E}_2(\vec{x}_1) = -\vec{p}_1 \cdot \left( \frac{3\hat{n}(\vec{p}_2 \cdot \hat{n}) - \vec{p}_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right), \vec{x}_1 \neq \vec{x}_2$$

$$\hat{n} = \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \quad W_{12} = \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - 3(\hat{n} \cdot \vec{p}_1)(\hat{n} \cdot \vec{p}_2)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}$$

Ex2) Energia de quadrupolo nuclear: qualquer objeto com carga líquida não-nula não possui momento de dipolo, basta escolher bem a origem

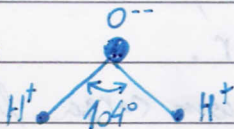
núcleos num auto-estado de momento angular  $|J, M\rangle$  terá densidade de carga invariante sob rotação em torno do eixo z:

$$\rho \propto Y_J^M Y_J^{M*} \propto e^{iM\phi} e^{-iM\phi}$$

gerando uma matriz Q em diagonal:  $Q_{xx} = Q_{yy}$  com traço nulo:

$$Q_{xx} = Q_{yy} = -Q_{zz}/2 \Rightarrow W = -\frac{1}{4} Q_{zz} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \Big|_{x=0}$$

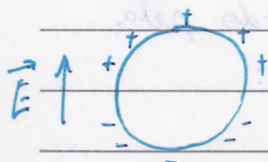
Ex3) Dipolo da água: (permanente)



$$|\vec{p}| = 1,86 \cdot 10^{-18} \text{ esu} \cdot \text{cm} = 1,86 \text{ Debyes}$$

Ex4) Dipolo induzido

Vimos no exemplo da esfera condutora no campo externo:



$$\phi(\vec{x}) = \phi_{\text{ext}}(\vec{x}) + \phi_{\text{ind}}(\vec{x})$$

$$\text{onde } \phi_{\text{ind}}(\vec{x}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad \vec{p} = \epsilon_0 a^3 \chi = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

$\chi$  é a polarizabilidade do corpo, neste caso  $\chi = a^3/\epsilon_0$

Em geral  $\epsilon_p \sim \text{Volume} \Rightarrow \rho_{\text{átomo}} \approx \frac{10^{-24}}{\epsilon_0} \text{ cm}^3$

Se  $E = 100 \text{ st V/cm}$

$$E \uparrow \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} \downarrow a \quad p = \epsilon_p E = e a \Rightarrow a = \frac{\epsilon_p E}{e} = \frac{10^{-24} \cdot 100}{4,8 \cdot 10^{-10}} \approx 2 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$$

O átomo é rígido à polarização

Modelo dinâmico: suponha o elétron preso ao íon por uma mola:  $\vec{F} = -m\omega_0^2 \vec{x}$

Aplicando o campo externo:  $e\vec{E} = -(-m\omega_0^2 \vec{x}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{p} = e\vec{x} = \frac{e^2}{m\omega_0^2} \vec{E} = \epsilon_p \vec{E} \Rightarrow \rho = \frac{e^2}{\epsilon_0 m \omega_0^2}$$

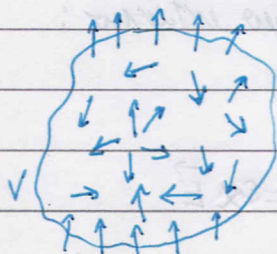
$\omega_0 \approx \omega$  emissão de luz pelos átomos, para  $\lambda = 3000 \text{ \AA} \Rightarrow \omega_0 \approx 6 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$

$$\rho = \frac{(4,8 \cdot 10^{-10})^2}{\epsilon_0 \cdot 9 \cdot 10^{-28} \cdot (6 \cdot 10^{15})^2} \approx \frac{7 \cdot 10^{-24}}{\epsilon_0} \text{ cm}^3$$

## 2) Meios macroscópicos e dielétricos

Estudamos na eletrostática de condutores que  $\vec{E} = 0$  no seu interior por este ser uma equipotencial. Contudo, sabemos que existem elétrons e átomos gerando fortes  $\vec{E}$ . Portanto,  $\vec{E} = 0$  é válido como média numa região pequena, mas muito maior que a dimensão atômica ou molecular.

Consideremos uma região  $V$  com carga líquida zero, mas um grande número de dipolos moleculares. Suponhamos ainda que não existem momentos de ordem superior.



O potencial inicialmente é calculado pela soma dos potenciais dos dipolos:

$$\phi(\vec{x}) = \sum_j \frac{\vec{p}_j \cdot (\vec{x} - \vec{x}_j)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}_j|^3}$$

Definindo o momento de dipolo por unidade de volume:

$$\vec{P}(\vec{x}) = \sum_i N_i \langle \vec{p}_i \rangle$$

onde  $\langle \vec{p}_i \rangle$  é a média tomada sobre um volume centrado em  $\vec{x}$  do momento de dipolo da  $i$ -ésima espécie molecular

$N_i$  é o número médio por unidade de volume de moléculas do tipo  $i$  no ponto  $\vec{x}$

→ somente dos dipoles (supondo livre de cargas externas)

O potencial fica: 
$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3x'}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\vec{P}(\vec{x}') \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right] = \int \frac{d^3x'}{4\pi\epsilon_0} \left[ \vec{P}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \right]$$

que pela regra da cadeia: 
$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3x'}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla}' \cdot \left( \frac{\vec{P}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) - \int \frac{d^3x'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

e aplicando o teorema de Gauss:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \int_S d^2x' \hat{n}' \cdot \frac{\vec{P}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \int_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right]$$

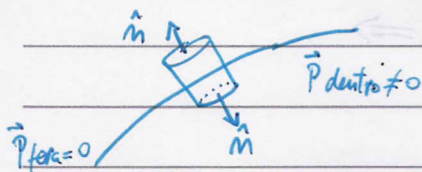
podemos, então, definir as densidades superficial e volumétrica de polarização por:

$$\begin{cases} \sigma_p(\vec{x}) = \hat{n} \cdot \vec{P}(\vec{x}) = P_n(\vec{x}) \\ \rho_p(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{x}) \end{cases}$$

Se a superfície  $S$  estiver infinitesimalmente fora de  $V$ , então:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \int_S d^2x' \frac{\hat{n}' \cdot \vec{P}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \int_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

mas a densidade superficial ainda existe e pode ser calculada da descontinuidade de  $\vec{P}$ :



$$\int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{x}) = \int_S d^2x \hat{n} \cdot \vec{P}(\vec{x})$$

para uma região pequena: 
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} d^3x = (-\hat{n} \cdot \vec{P}_{dentro} + \hat{n} \cdot \vec{P}_{fora}) da \Rightarrow$$
  

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} d^3x = -\hat{n} \cdot \vec{P} da$$



Resumindo: 
$$\phi(\vec{x}) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Se existirem cargas livres no material ( $\Rightarrow$  dielétrico)

gerando uma densidade  $\rho_f(\vec{x})$ , o potencial será

$$\phi(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\rho_f(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}'|} - \int d^3x' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' [\rho_f(\vec{x}') - \vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{x}')] \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

então a <sup>dens.</sup> carga total é:  $\rho_t = \rho_f - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$

como  $\vec{E}$  é gerado pelas cargas totais:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_t = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_f - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}) \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_f$$

definindo o deslocamento elétrico  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ , vem a 1ª equação de Maxwell:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f}$$

$\vec{D}$  é o campo gerado pelas cargas livres

em geral  $P_i = \epsilon_0 \sum_{j=1}^3 \chi_{ij} E_j$ , onde os nove números  $\chi_{ij}$  são as componentes do tensor de suscetibilidade elétrica. Em materiais desordenados ou altamente ordenados (cristais cúbicos, p.ex.) o tensor se reduz a um número:  $\chi_e$  e o material é dito isotrópico.  $\chi_e$  é a suscetibilidade elétrica do meio. Neste caso:

$$\vec{D} = (\epsilon_0 + \epsilon_0 \chi_e) \vec{E} \equiv \epsilon \vec{E}, \quad \epsilon/\epsilon_0 = 1 + \chi_e$$

onde  $\epsilon$  é a constante dielétrica ou permissividade elétrica relativa.

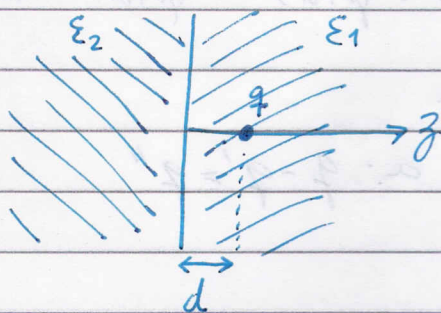
Agora:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \epsilon \vec{E} = \rho_f \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_f / \epsilon}$  (para cargas livres)

$$\phi(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\rho_t}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (\text{para cargas totais}) \Rightarrow$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0}$$

Assim, toda a teoria desenvolvida pode ser aplicada aos dielétricos e aos campos macroscópicos

### 3) Problemas de contornos com dielétricas



interface = (plano  $z=0$ )

$$\begin{cases} \epsilon_1 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho & , z > 0 \\ \epsilon_2 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 & , z < 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 & , \text{todo o espaço} \end{cases}$$

condições de contorno em  $z=0$ :

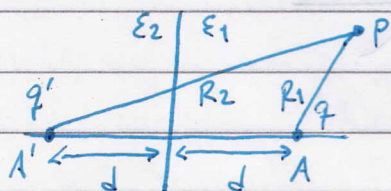
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{ext} \Rightarrow \int d^3x (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) = \int d^2x \vec{D} \cdot \hat{n} = q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n} = \sigma_{ext}} \Rightarrow \lim_{z \rightarrow 0^+} \epsilon_1 E_z = \lim_{z \rightarrow 0^-} \epsilon_2 E_z$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \int d^2x (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \boxed{(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \hat{n} = 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{2t} = E_{1t} \Rightarrow \lim_{z \rightarrow 0^+} E_x = \lim_{z \rightarrow 0^-} E_x, \quad \lim_{z \rightarrow 0^+} E_y = \lim_{z \rightarrow 0^-} E_y$$

Pelo método das imagens:



$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left( \frac{q}{R_1} + \frac{q'}{R_2} \right), \quad z > 0$$

$$\text{onde } R_1 = \sqrt{\rho^2 + (d-z)^2}$$

$$R_2 = \sqrt{\rho^2 + (d+z)^2}$$

Para  $z < 0$  superemos uma carga  $q''$  na posição A e

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q''}{R_1}, \quad z < 0$$

$$\text{como } \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{R_1} \right)_{z=0} = - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{R_2} \right)_{z=0} = \frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{R_1} \right)_{z=0} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{R_2} \right)_{z=0} = \frac{-\rho}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \epsilon_1 E_z = -\epsilon_1 \frac{\partial \phi(z > 0)}{\partial z} = -\frac{\epsilon_1}{4\pi \epsilon_1} \frac{q d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} + \frac{\epsilon_1}{4\pi \epsilon_1} \frac{q' d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} = -\frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} \frac{(q - q')}{4\pi}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0^-} \epsilon_2 E_z = -\epsilon_2 \frac{\partial \phi(z < 0)}{\partial z} = -\frac{\epsilon_2}{4\pi \epsilon_2} \frac{q'' d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}$$

então, a condição de contorno leva a:  $q - q' = q''$

$$E_{1t} = -\frac{\partial \phi(z > 0)}{\partial \rho} = \frac{+\rho}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} \frac{q''}{4\pi \epsilon_2}$$

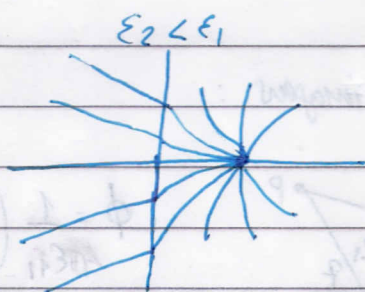
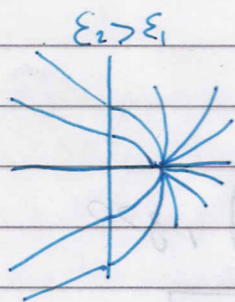
$$E_{2t} = -\frac{\partial \phi(z < 0)}{\partial \rho} = \frac{+\rho}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} \left[ \frac{1}{4\pi \epsilon_1} (q + q') \right]$$

então, a condição de contorno leva a:  $\frac{q + q'}{\epsilon_1} = \frac{q''}{\epsilon_2}$

que resolvidas levam a:

$$\left\{ \begin{array}{l} q' = -\left( \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right) q \\ q'' = \left( \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right) q \end{array} \right.$$

disuntivo  $\epsilon_2 \gg \epsilon_1$



nos dois dielétricos:  $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \Rightarrow \rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\epsilon_0 \chi_e \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ , exceto sobre  $q$   
na superfície:  $\vec{P}_i = \epsilon_0 \chi_i \vec{E}_i = (\epsilon_i - \epsilon_0) \vec{E}_i$

como  $\sigma_p = (\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot \hat{n}_{12} = (\epsilon_2 - \epsilon_0) E_{2z} - (\epsilon_1 - \epsilon_0) E_{1z}$

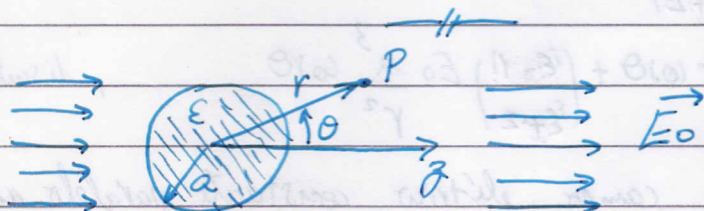
mas em  $z=0$ :  $E_{1z} = -\frac{1}{4\pi \epsilon_1} \frac{(q - q') d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}$ ,  $E_{2z} = -\frac{1}{4\pi \epsilon_2} \frac{q'' d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}$

assim  $\sigma_p = -P_{1z} + P_{2z} = \frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} \frac{1}{4\pi} \left\{ \left( \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1} \right) (q - q') - \left( \frac{\epsilon_2 - \epsilon_0}{\epsilon_2} \right) q'' \right\} =$

$$= \frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1} \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} - \frac{\epsilon_2 - \epsilon_0}{\epsilon_2} \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1} \right\} q =$$

$$= \frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\epsilon_1(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \left\{ (\epsilon_1 - \epsilon_0)2\epsilon_2 - (\epsilon_2 - \epsilon_0)2\epsilon_1 \right\} q =$$

$$\Rightarrow \sigma_p = \frac{q}{2\pi} \left( \frac{\epsilon_0(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{\epsilon_1(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \right) \frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} \quad \text{discutir } \epsilon_2 \gg \epsilon_1$$



$$r < a : \phi_{in} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) = E_0 a \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A'_l}{a^l} r^l P_l(\cos\theta)$$

$$r > a : \phi_{ex} = \sum_{l=0}^{\infty} [B_l r^l + C_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos\theta) =$$

$$= -E_0 r \cos\theta + E_0 a \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C'_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta)$$

pois no infinito  $\phi \rightarrow -E_0 z = -E_0 r \cos\theta$

$$E_{tangencial} : \left. -\frac{1}{a} \frac{\partial \phi_{in}}{\partial \theta} \right|_{r=a} = \left. -\frac{1}{a} \frac{\partial \phi_{ex}}{\partial \theta} \right|_{r=a}$$

$$D_{normal} : \left. -\epsilon \frac{\partial \phi_{in}}{\partial r} \right|_{r=a} = \left. -\epsilon_0 \frac{\partial \phi_{ex}}{\partial r} \right|_{r=a}$$

a primeira condição leva a :

$$\begin{cases} A_1 = -E_0 + \frac{C_1}{a^3} \\ A_l = \frac{C_l}{a^{2l+1}}, \quad l \neq 1 \end{cases}$$

a segunda condição leva a :

$$\begin{cases} \epsilon A_1 = -E_0 - 2 \frac{C_1}{a^3} \\ \epsilon l A_l = -(l+1) \frac{C_l}{a^{2l+1}}, \quad l \neq 1 \end{cases}$$

as segundas equações só podem ser satisfeitas se ,  
para  $l \neq 1$ ,  $A_l = C_l = 0$

Os outros são dados em termos de  $E_0$ :

$$A_1 = -\left(\frac{3}{2 + \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0}}\right) E_0, \quad C_1 = \left(\frac{\epsilon_0 - 1}{\epsilon_0 + 2}\right) a^3 E_0$$

assim:  $\phi_{in} = -\left(\frac{3}{\epsilon_0 + 2}\right) E_0 r \cos \theta$

$$\phi_{ex} = -E_0 r \cos \theta + \left(\frac{\epsilon_0 - 1}{\epsilon_0 + 2}\right) E_0 \frac{a^3 \cos \theta}{r^2}, \quad \text{disuntir } \epsilon \rightarrow \infty$$

No interior temos um campo elétrico constante paralelo ao aplicado,  
cujo módulo é:  $E_{in} = \left(\frac{3}{\epsilon_0 + 2}\right) E_0$

No exterior temos o campo aplicado mais o de um dipolo:

$$\phi_{dipolo} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \Rightarrow \vec{p} = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{\epsilon_0 - 1}{\epsilon_0 + 2}\right) E_0 a^3 \hat{z}$$

Dentro da esfera o campo é constante e  $\vec{D}$  também:

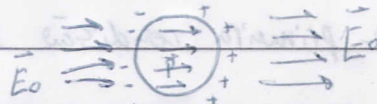
$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \frac{3\epsilon_0}{\epsilon_0 + 2} E_0 \hat{z} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{P} = 3\epsilon_0 \left(\frac{\epsilon_0 - 1}{\epsilon_0 + 2}\right) E_0 \hat{z}$$

Note que:  $\int_{\text{Vetora}} d^3x P = p \Rightarrow \int_V d^3x P = P \frac{4}{3}\pi a^3 = p$

Não existe densidade volumétrica de polarização ( $\vec{D} \cdot \vec{P} = 0$ ), mas  
existe densidade superficial de polarização:  $\hookrightarrow \vec{P} = \text{const.}$

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{r} = P_r = 3\epsilon_0 \left(\frac{\epsilon_0 - 1}{\epsilon_0 + 2}\right) E_0 \cos \theta$$



P. ex. , para a água ; uma gota no ar :

$$\epsilon_{\text{água}} \approx 81, \quad \epsilon_{\text{ar}} \approx 1$$

a polarizabilidade:  $\gamma = \frac{p}{\epsilon_0 E} = \left(\frac{\epsilon_0 - 1}{\epsilon_0 + 2}\right) a^3 = \left(\frac{81 - 1}{81 + 2}\right) a^3 \approx 0,964 a^3$

a gota de água parece uma esfera metálica para um  $\vec{E}$  estático

#### 4) Polarizabilidade molecular e suscetibilidade elétrica

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}, \text{ onde } \vec{E} = \text{campo elétrico macroscópico}$$

Em meios rarefeitos:  $\vec{E} \approx \vec{E}_{\text{moléc}}$

Em meios densos, porém, a polarização das moléculas vizinhas gera um campo interno  $\vec{E}_i$ , tal que  $\vec{E}_{\text{moléc}} = \vec{E} + \vec{E}_i$ , onde

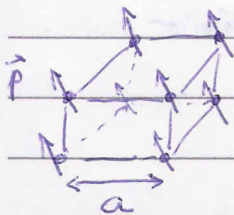
$$\vec{E}_i = \vec{E}_{\text{prox}} - \vec{E}_P \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_{\text{prox}} = \text{contrib. das moléculas próximas} \\ \vec{E}_P = \text{contrib. dos dipolos promediados num volume} \\ \text{pequeno microscopicamente e grande microscopicamente} \end{array} \right.$$

Como  $\vec{p} = \int_V d^3x \vec{P} = \frac{4\pi R^3}{3} \vec{P}$ , desde que em  $V$ ,  $\vec{P} \approx \text{const.}$

então  $\vec{E}_P = \frac{3}{4\pi R^3} \int_{V_{LR}} \vec{E} d^3x \approx \frac{3}{4\pi R^3} \left( \frac{-\vec{p}}{3\epsilon_0} \right) = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{E}_i = \vec{E}_{\text{prox}} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

Cálculo do campo interno: contrib. de moléculas vizinhas



arranjo cúbico de dipolos, posições:  $\vec{X}_{ijk} = (ia, ja, ka)$   
 $a = \text{const. de rede}$

de  $\vec{E}(\vec{X}) = \frac{3\hat{n}(\vec{p} \cdot \hat{n}) - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{X} - \vec{X}_0|^3}$  vem  $\vec{E} = \sum_{ijk} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{X}_{ijk}) \vec{X}_{ijk} - X_{ijk}^2 \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 X_{ijk}^5}$

na componente  $x$ :  $E_1 = \sum_{ijk} \frac{3(i^2 p_1 + j^2 p_2 + k^2 p_3) - (i^2 + j^2 + k^2) p_1}{4\pi\epsilon_0 a^3 (i^2 + j^2 + k^2)^{5/2}} a^2$

os termos cruzados ( $j^2 p_2 + k^2 p_3$ ) zeram quando os índices correm sobre valores positivos e negativos, além disso:

$$\sum_{ijk} \frac{i^2}{(i^2 + j^2 + k^2)^{5/2}} = \sum_{ijk} \frac{j^2}{(i^2 + j^2 + k^2)^{5/2}} = \sum_{ijk} \frac{k^2}{(i^2 + j^2 + k^2)^{5/2}}$$

então:  $E_1 = \sum_{ijk} \frac{[3i^2 - (i^2 + j^2 + k^2)] p_1}{4\pi\epsilon_0 a^3 (i^2 + j^2 + k^2)^{5/2}} = 0$

analogamente para as componentes  $y$  e  $z \Rightarrow \vec{E}_{\text{prox}} = 0$

para materiais amorfos também  $\vec{E}_{\text{prox}} = 0$  e para outras estruturas  $\vec{E}_{\text{prox}} \approx 0$

temos  $\vec{P} = N \langle \vec{p}_{mol} \rangle$  e vamos definir  $\langle \vec{p}_{mol} \rangle = \epsilon_0 \chi_{mol} (\vec{E} + \vec{E}_i)$   
onde  $\chi_{mol}$  é a polarizabilidade molecular, então

$$\vec{P} = N \chi_{mol} (\epsilon_0 \vec{E} + \frac{1}{3} \vec{P}) \Rightarrow \epsilon_0 \chi_{mol} \vec{E} = N \chi_{mol} (\epsilon_0 \vec{E} + \frac{1}{3} \epsilon_0 \chi_{mol} \vec{E}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \chi_{mol} = \frac{N \chi_{mol}}{1 - \frac{1}{3} N \chi_{mol}} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 - 1} \Rightarrow \chi_{mol} = \frac{3}{N} \left( \frac{\epsilon_0 - 1}{\epsilon_0 + 2} \right)$$

que é a equação de Clausius-Mossotti, válida para gases  
e aproximada para líquidos e sólidos

Modelo dinâmico: Suponha o elétron preso ao íon por uma mola:

$$\vec{F} = -m\omega_0^2 \vec{x}$$

aplicando o campo externo:  $-e\vec{E} = -m\omega_0^2 \vec{x} \Rightarrow$

$$\vec{p}_{mol} = e\vec{x} = \frac{e^2 \vec{E}}{m\omega_0^2} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \Rightarrow \chi = \frac{e^2}{m\omega_0^2 \epsilon_0}$$

se houver mais de uma espécie:  $\chi_{mol} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_j \frac{e_j^2}{m_j \omega_j^2}$

$\omega_0 \approx \omega$  da emissão de luz pelos átomos, tomando  $\lambda = 3000 \text{ \AA} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \omega_0 \approx 6 \cdot 10^{15} \text{ Hz} \Rightarrow \chi \approx 9 \cdot 10^{-29} \text{ m}^3 \approx 10^{-24} \text{ cm}^3 \approx \text{Vatômico}$

## 5) Energia Eletrostática em Meios Dielétricos

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{x}) \phi(\vec{x}) d^3x$$

que não pode ser aplicada em meios dielétricos, pois o trabalho para trazer cargas do infinito deve considerar também a energia gasta para produzir polarizações. Seja uma mudança  $\delta\rho$  na densidade de carga macroscópica  $\rho$ , o trabalho será:

$$\delta W = \int \delta\rho(\vec{x}) \phi(\vec{x}) d^3x$$

onde  $\phi(\vec{x})$  é o potencial devido a  $\rho(\vec{x})$ , como  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\delta\vec{D}) = \delta\rho$  então  $\delta W = \int \vec{E} \cdot \delta\vec{D} d^3x$ , onde  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ , assim podemos calcular

$$W = \int d^3x \int_0^D \vec{E} \cdot \delta\vec{D}$$

Se o meio for linear  $\vec{E} \cdot \delta\vec{D} = \frac{1}{2} \delta(\vec{E} \cdot \vec{D})$  e a energia eletrostática total é:

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} d^3x$$

que pode ser transformada na forma original com  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$  e  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$ . Assim, a forma original é válida macroscopicamente somente se o meio for linear.

Suponha um campo  $\vec{E}_0$  devido a uma certa distribuição de carga  $\rho(\vec{x})$  presente num meio com suscetibilidade  $\epsilon_0$ :

$$W_0 = \frac{1}{2} \int \vec{E}_0 \cdot \vec{D}_0 d^3x, \text{ onde } \vec{D}_0 = \epsilon_0 \vec{E}_0$$

Introduzimos um objeto dielétrico de volume  $V_1$  tal que:

$$\epsilon(\vec{x}) = \begin{cases} \epsilon_1 & \text{dentro de } V_1 \\ \epsilon_0 & \text{fora de } V_1 \end{cases}$$

com isso,  $\vec{E}_0 \rightarrow \vec{E}$ ,  $\vec{D}_0 \rightarrow \vec{D} = \epsilon \vec{E}$  e  $W_1 = \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} d^3x$

a diferença em energia:

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int (\vec{E} \cdot \vec{D} - \vec{E}_0 \cdot \vec{D}_0) d^3x = \frac{1}{2} \int (\vec{E} \cdot \vec{D}_0 - \vec{D} \cdot \vec{E}_0) d^3x + \frac{1}{2} \int (\vec{E} + \vec{E}_0) \cdot (\vec{D} - \vec{D}_0) d^3x$$

de  $\vec{\nabla} \times (\vec{E} + \vec{E}_0) = 0 \Rightarrow \vec{E} + \vec{E}_0 = -\vec{\nabla}\phi$  e a segunda integral fica



int. por partes  $\vec{D} = \vec{D}_0$

$$I = -\frac{1}{2} \int \vec{\nabla} \phi \cdot (\vec{D} - \vec{D}_0) d^3x = \frac{1}{2} \int \phi \vec{\nabla} \cdot (\vec{D} - \vec{D}_0) d^3x = 0$$

pois  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{D} - \vec{D}_0) = 0$ , pois a fonte  $\rho(\vec{x})$  não muda com a inserção do dielétrico, conseqüentemente:  $\Delta W = \frac{1}{2} \int (\vec{E} \cdot \vec{D}_0 - \vec{D} \cdot \vec{E}_0) d^3x$

mas fora de  $V_1$ :  $E = E_0$  e  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ , gerando a integral, então  $\Delta W = \frac{1}{2} \int_{V_1} (\vec{E} \cdot \epsilon_0 \vec{E}_0 - \epsilon_1 \vec{E} \cdot \vec{E}_0) d^3x = -\frac{1}{2} \int_{V_1} (\epsilon_1 - \epsilon_0) \cdot \vec{E} \cdot \vec{E}_0 d^3x \Rightarrow$

$$\boxed{\Delta W = -\frac{1}{2} \int_{V_1} \vec{P} \cdot \vec{E}_0 d^3x} \Rightarrow \boxed{\Delta W = -\frac{1}{2} \vec{P} \cdot \vec{E}_0}$$

O corpo dielétrico se moverá para regiões de  $\vec{E}_0$  crescente se  $\epsilon_1 > \epsilon_0$  a força num deslocamento  $\delta \xi$ :

$$F_\xi = -\left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)_a, \text{ a: fontes de campo constante}$$

$$\text{de } W = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{x}) \phi(\vec{x}) d^3x \Rightarrow \delta W = \frac{1}{2} \int (\rho \delta \phi + \phi \delta \rho) d^3x$$

fizemos até agora uma mudança do tipo:  $E(\vec{x}) \rightarrow E(\vec{x}) + \delta E(\vec{x})$  com as cargas fixas  $\delta \rho = 0$ , assim  $\delta W_1 = \frac{1}{2} \int \rho \delta \phi_1 d^3x$

Suponhamos o dielétrico movendo-se entre eletrodos que mantêm potenciais fixos e restaurado aos valores originais:  $\phi_2 = -\phi_1$ , haverá um fluxo de cargas da bateria  $\delta \rho_2$ , assim:

$$\delta W_2 = \frac{1}{2} \int \rho \delta \phi_2 + \phi \delta \rho_2 = -2 \delta W_1$$

No segundo passo a mudança de energia é de duas vezes a do primeiro passo e na direção oposta, assim a mudança final será:  $\delta W = -\frac{1}{2} \int \rho \phi_1 d^3x$

$$\text{e concluímos que: } \delta W_V = -\delta W_A \text{ e } F_\xi = +\left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)_V$$

Se o dielétrico  $\epsilon > \epsilon_0$  move-se numa região de campo maior a energia aumentará