Magnetostática

1) Introdução e definições

Não existem cargas magnéticas livres. A entidade básica é o dipolo magnético

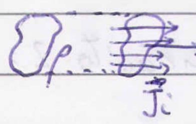
$\vec{B}$: densidade de fluxo magnético, indução magnética

$\vec{\mu}$: momento magnético do dipolo

torque mecânico: $\vec{N} = \vec{\mu} \times \vec{B}$

correntes elétricas estacionárias, independentes do tempo, são fontes de campo de indução magnética

$\vec{J}(\vec{x})$: densidade de corrente, dada em unidades de carga/área-tempo



$$\vec{J}(\vec{x}) = \rho(\vec{x})\,\vec{v}$$

Fato experimental: carga é conservada

Considere:

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{J}\, d^3x = \int_S \vec{J}\cdot\hat{n}\, d^2x = \text{fluxo de carga para fora de } V \text{ através de } S$$

$$\int_S \vec{J}\cdot\hat{n}\, d^2x = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_V \rho(\vec{x})\, d^3x\right) = \text{negativo da variação de cargas em } V$$

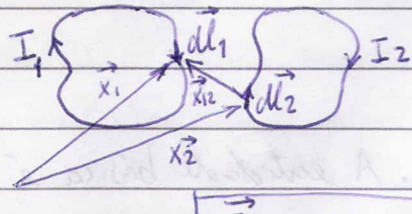
Sendo V um volume arbitrário:

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{J}\, d^3x = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho(\vec{x})\, d^3x \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{J}(\vec{x}) + \frac{\partial \rho(\vec{x})}{\partial t} = 0}$$

esta é a equação da continuidade que é verdadeira se a carga for conservada localmente. Se houverem fontes ou sorvedouros de cargas, teremos termos adicionais na equação. Para correntes estacionárias (magnetostática): $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{J}(\vec{x}) = 0}$

2) Lei de Ampère e lei de Biot e Savart

A lei de Ampère (1825) trata de forças atuando entre circuitos fechados de corrente



Seja $\vec{F}_{12}$ a força atuando sobre o circuito 1 devido ao circuito 2.
A lei de Ampère é expressa por:

$$\boxed{\vec{F}_{12} = K I_1 I_2 \oint\oint \frac{\vec{dl}_1 \times (\vec{dl}_2 \times \vec{x}_{12})}{|\vec{x}_{12}|^3}}$$

onde as integrais são sobre os circuitos fechados

$K = K2 = \frac{1}{c^2}$ no sistema Gaussiano, $K = \frac{\mu_0}{4\pi}$ no MKSA

$[I] = stC/s = stA$ no sist. Gaussiano, $[I] = C/s = A$ no MKSA

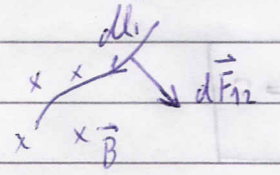
Introduzindo a indução magnética, tal que:

$$\vec{F}_{12} \equiv I_1 \oint \vec{dl}_1 \times \vec{B}(\vec{x})$$

$\vec{B}(\vec{x})$ é a indução magnética produzida pelo circuito 2:

$$\boxed{\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \oint \frac{\vec{dl}_2 \times \vec{x}_{12}}{|\vec{x}_{12}|^3}}$$

que é a lei de Biot e Savart (1820) na forma integral
Tomemos um pedaço infinitesimal do circuito de corrente I_1 e calculemos a força devido somente ao circuito de corrente I_2, desconsiderando outras partes do circuito 1, esta é a forma diferencial da lei de Biot e Savart



$$d\vec{F}_{12} = I_1 (\vec{dl}_1 \times \vec{B})$$

$$\Rightarrow \boxed{d\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \frac{\vec{dl}_2 \times \vec{x}_{12}}{|\vec{x}_{12}|^3}}$$

mas esta equação não faz sentido isoladamente: a corrente I_2 não pode surgir e desaparecer ao percorrer $\vec{dl}_2$. Pode-se evitar este problema substituindo $I\vec{dl} \to q\vec{v}$, daí:

$$\boxed{\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3}}$$

Note agora que:

$$\vec{dl_1} \times \frac{\vec{dl_2} \times \vec{x_{12}}}{|\vec{x_{12}}|^3} = \left(\vec{dl_1} \cdot \frac{\vec{x_{12}}}{|\vec{x_{12}}|}\right)\vec{dl_2} - (\vec{dl_1}\cdot\vec{dl_2})\frac{\vec{x_{12}}}{|\vec{x_{12}}|^3}$$

o produto escalar do primeiro termo pode ser desenvolvido em:

$$\vec{dl_1}\cdot\frac{\vec{x_{12}}}{|\vec{x_{12}}|} = \vec{dl_1}\cdot\left[-\vec{\nabla}_1\left(\frac{1}{|\vec{x_{12}}|}\right)\right] = -\sum_i dx_{i_1}\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{1}{|\vec{x_{12}}|}\right) = -d\left(\frac{1}{|\vec{x_{12}}|}\right) \equiv -d\varphi(\vec{x_{12}})$$

Substituindo na fórmula da força, o primeiro termo é zero:

$$\vec{F_{12}} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \left[-\oint \vec{dl_2} \underbrace{\oint d\varphi(\vec{x_{12}})}_{0} - \oint\oint \vec{dl_1}\cdot\vec{dl_2}\frac{\vec{x_{12}}}{|\vec{x_{12}}|^3}\right]$$

pois a integral é sobre um ciclo fechado $\oint \varphi(\vec{x}) = \varphi(\vec{x_0}) - \varphi(\vec{x_0}) = 0$

assim:
$$\boxed{\vec{F_{12}} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint\oint (\vec{dl_1}\cdot\vec{dl_2})\frac{\vec{x_{12}}}{|\vec{x_{12}}|^3}}$$

eq (5.11) → demonstrar na lista

Indução de uma densidade de corrente

$$\vec{J} da \vec{dl} = \vec{J} d^3x$$

então $\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{x}') \times (\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} d^3x' \Rightarrow d\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{J}(\vec{x})\times(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} d^3x'$

$$\vec{F} = \int \vec{J}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x}) d^3x \Rightarrow d\vec{F} = \vec{J}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x}) d^3x$$

Um objeto sujeito a uma força $\vec{F}$, tem torque relativo a um ponto O dado por $\vec{N} = \vec{x} \times \vec{F}$, então o torque na distribuição de corrente é: $\boxed{\vec{N} = \int \vec{x} \times [\vec{J}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x})] d^3x}$

3) Equações diferenciais da magnetostática

Objetivo: Calcular $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}$ e $\vec{\nabla}\times\vec{B}$

A indução magnética é: $\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{J}(\vec{x}') \times \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} d^3x'$

analogamente ao caso anterior: $\vec{B}(\vec{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{J}(\vec{x}') \times \vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) d^3x'$

aplicando a identidade: $\vec{\nabla}\times(f\vec{A}) = (\vec{\nabla}\times\vec{A})f + \vec{\nabla}f \times \vec{A}$, vem:

$$\vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) = (\vec{\nabla}\times\vec{J}(\vec{x}'))\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)\times\vec{J}(\vec{x}')$$

o rotacional atua sobre as componentes de $\vec{x}$: $\vec{\nabla}\times\vec{J}(\vec{x}')=0$

assim: $\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\times\int\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'$

como $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0$, para qualquer campo vetorial $\vec{A}$, segue que o divergente de $\vec{B}$ deve ser zero: $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{x})=0}$

Aplicando o rotacional: $\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\times\left[\vec{\nabla}\times\int\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'\right]$

e usando a identidade: $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$

vem: $\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\int\vec{J}(\vec{x}')\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)d^3x' - \frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec{J}(\vec{x}')\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)d^3x'$

onde $\vec{\nabla}$ e ∇^2 atuam sobre as componentes de $\vec{x}$ somente

usando agora: $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) = -\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)$ e $\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) = -4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')$

Vem: $\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\int\vec{J}(\vec{x}')\cdot\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)d^3x' + \mu_0\int\vec{J}(\vec{x}')\delta(\vec{x}-\vec{x}')d^3x' =$

regra da cadeia → $= -\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\int\vec{\nabla}'\cdot\left(\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)d^3x' + \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\int\frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x' + \mu_0\vec{J}(\vec{x})$

t. de Gauss + eq. da continuidade → $= -\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\int_S\frac{\vec{J}(\vec{x}')\cdot\hat{n}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^2x' - \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\int_V\frac{\partial\rho(\vec{x}')}{\partial t}\frac{d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \mu_0\vec{J}(\vec{x})$

a primeira integral deve ser zero, pois basta tomar a superfície S além dos circuitos de corrente, anulando o fluxo de $\vec{J}(\vec{x}')$ sobre ela; a segunda integral também deve ser zero, pois estamos tratando casos estacionários, consequentemente:

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{x}) = \mu_0\vec{J}(\vec{x})}$$

que é a lei de Ampère na forma diferencial

do teorema de Gauss: $\int_V\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\,d^3x = \int_S\vec{B}\cdot\hat{n}\,d^2x = 0$

do teorema de Stokes: $\int_S(\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot\hat{n}\,d^2x = \oint_C\vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\int_S\vec{J}\cdot\hat{n}\,d^2x = \mu_0 I$

$\Rightarrow \boxed{\oint_C\vec{B}(\vec{x})\cdot d\vec{l} = \mu_0 I}$ que é a lei de Ampère na forma integral

4) Potencial vetor e potencial escalar

Numa região livre de correntes: $\vec{\nabla}\times\vec{B}=0 \Rightarrow \boxed{\vec{B}(\vec{x})=-\nabla\phi_M(\vec{x})}$
onde ϕ_M é o potencial magnético escalar
como $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \Rightarrow \boxed{\nabla^2\phi_M(\vec{x})=0}$ satisfazendo à equação de Laplace
como $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \Rightarrow \nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=0$ para qualquer $\vec{A}$, então
$\boxed{\vec{B}(\vec{x})=\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x})}$, onde $\vec{A}(\vec{x})$ é o potencial vetor
Já vimos que: $\vec{B}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\times\int\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'$

então, $\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{x}')d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$

contudo à expressão acima pode-se adicionar o gradiente de uma função escalar arbitrária ψ sem mudar o resultado para $\vec{B}$:

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{x}')d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|}+\vec{\nabla}\psi(\vec{x})$$

A transformação $\vec{A}\rightarrow\vec{A}+\vec{\nabla}\psi$ é uma <u>transformação de calibre</u>
Agora:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}=\mu_0\vec{J}$$

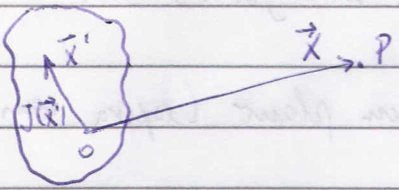
Podemos fazer uma escolha de calibre conveniente, estabelecendo que $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$, sem alterar o resultado para $\vec{B}$. Este é o <u>calibre de Coulomb</u> e o potencial vetor satisfará a equação de Poisson: $\boxed{\nabla^2\vec{A}=-\mu_0\vec{J}}$
o calibre de Coulomb é satisfeito para $\psi(\vec{x})=$ constante $\Rightarrow$
$\Rightarrow \vec{\nabla}\psi(\vec{x})=0$ e $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec{J}(\vec{x}')\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)d^3x'+\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\psi^{\,0}\Rightarrow$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec{J}(\vec{x}')\cdot\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)d^3x'=\frac{\mu_0}{4\pi}\left(-\int\vec{\nabla}'\cdot\left(\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)d^3x'+\int\frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{J}(\vec{x}')d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)=$$

$$=\underbrace{-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_S\frac{\vec{J}(\vec{x}')\cdot\hat{n}'d^2x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|}}_{=0\ S\text{ além dos circuitos}}\underbrace{-\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\partial\rho(\vec{x})}{\partial t}\frac{d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|}}_{\text{caso estacionário}}=0$$

Então a escolha $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ se reduz a $\nabla^2\psi=0 \Rightarrow \psi=$ constante

5) Campos de uma distribuição localizada de corrente



$|\vec{x}| \gg |\vec{x}'|$: $\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \simeq \frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{|\vec{x}|^3} + \dots$

O potencial vetor fica: $\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{1}{|\vec{x}|}\int \vec{J}(\vec{x}')d^3x' + \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}\cdot\int \vec{J}(\vec{x}')\vec{x}'d^3x' + \dots\right]$

mas $\vec{\nabla}'\cdot(x_i'\vec{J}(\vec{x}')) = \nabla' x_i'\cdot\vec{J}(\vec{x}') + x_i'\cancel{(\vec{\nabla}'\cdot\vec{J}(\vec{x}'))}^{0} = \hat{x}_i\cdot\vec{J}(\vec{x}') = J_i(\vec{x}')$

então a primeira integral pode ser escrita como:

$$\int \vec{J}(\vec{x}')d^3x' = \int[\vec{\nabla}'\cdot(\vec{x}'\vec{J}(\vec{x}'))]d^3x'$$

agora $(\vec{x}\cdot\vec{x}')\vec{J} = -\vec{x}\times(\vec{x}'\times\vec{J}) + (\vec{x}\cdot\vec{J})\vec{x}' \Rightarrow$

$$\vec{A}_d(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}|^3}\left\{\int d^3x'(\vec{x}\cdot\vec{J}(\vec{x}'))\vec{x}' - \vec{x}\times\int d^3x'(\vec{x}'\times\vec{J}(\vec{x}'))\right\}$$

a componente j da 1ª integral acima é:

$$\int d^3x'\, x_j'(\vec{x}\cdot\vec{J}(\vec{x}')) = \sum_i \int d^3x'\, x_j' x_i J_i(\vec{x}')$$

mas $J_i(\vec{x}') = \hat{x}_i\cdot\vec{J}(\vec{x}') = (\vec{\nabla}'x_i')\cdot\vec{J}(\vec{x}') + x_i'\underbrace{(\vec{\nabla}'\cdot\vec{J}(\vec{x}'))}_{=0} = \vec{\nabla}'\cdot(x_i'\vec{J}(\vec{x}')) \Rightarrow$

$$\int d^3x'(\vec{x}\cdot\vec{J}(\vec{x}'))x_j' = \sum_i x_i\int d^3x'\, x_j'[\vec{\nabla}'\cdot(x_i'\vec{J}(\vec{x}'))] =$$

integrando por partes: $= -\sum_i x_i\int d^3x'(x_i'\vec{J}(\vec{x}'))\cdot\underbrace{\vec{\nabla}'x_j'}_{\hat{x}_j} + \sum_i x_i[x_i'\underbrace{\vec{J}(\vec{x}')}_{=0 \text{ para } V \text{ em } P^*}x_j']$

$= -\int d^3x'(\vec{x}\cdot\vec{x}')J_j(\vec{x}') \Rightarrow$ * não há corrente em P.

$$\int d^3x'(\vec{x}\cdot\vec{J}(\vec{x}'))\vec{x}' = -\int d^3x'(\vec{x}\cdot\vec{x}')\vec{J}(\vec{x}')$$

então: $\vec{A}_d(\vec{x}) = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}|^3}\int d^3x'(\vec{x}\cdot\vec{x}')\vec{J}(\vec{x}')}_{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}|^3}\left\{\underbrace{\int d^3x'(\vec{x}\cdot\vec{J}(\vec{x}'))\vec{x}'}_{I_2} - \underbrace{\vec{x}\times\int d^3x'\,\vec{x}'\times\vec{J}(\vec{x}')}_{I_3}\right\}$

$\Rightarrow \vec{A}_d(\vec{x}) = I_1 = I_2 - I_3 = -I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{1}{2}I_3 \Rightarrow$

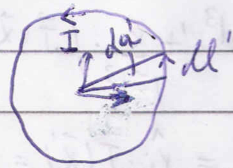
$$\vec{A}_d(\vec{x}) = -\frac{1}{2}I_3 = -\frac{\mu_0}{8\pi|\vec{x}|^3}\vec{x}\times\int d^3x'(\vec{x}'\times\vec{J}(\vec{x}'))$$

definindo o momento de dipolo magnético: $\boxed{\vec{m} \equiv \frac{1}{2}\int d^3x'(\vec{x}'\times\vec{J}(\vec{x}'))}$, vem $\boxed{A_d(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{x}}{|\vec{x}|^3}}$

que é o potencial vetor do dipolo magnético definindo a densidade de momento magnético ou magnetização:

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}(\vec{x}) = \frac{1}{2}\left[\vec{x}\times\vec{J}(\vec{x})\right]} \Rightarrow \vec{m} = \int d^3x'\,\vec{\mathcal{M}}(\vec{x}')$$

Se a corrente estiver confinada a um plano (espira com corrente I):



$$\vec{m} = \frac{I}{2}\oint \vec{x}'\times d\vec{l}'$$

mas o elemento de área $da = \frac{1}{2}|\vec{x}'\times d\vec{l}'| \Rightarrow |\vec{m}| = I \times \text{Área}$

O campo produzido pela fonte na aproximação do dipolo magnético é: $\vec{B}_d(\vec{x}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}_d(\vec{x}) = \vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{m}\times\vec{x}}{|\vec{x}|^3}\right)\frac{\mu_0}{4\pi}$

calculando: $\left(\vec{\nabla}\times\vec{m}\times\frac{\vec{x}}{r^3}\right)_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j\varepsilon_{klm}m_l\frac{x_m}{r^3} = (\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})m_l\partial_j\left(\frac{x_m}{r^3}\right) =$

$$= (\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})m_l\left(\frac{\delta_{jm}}{r^3}-\frac{3}{r^4}x_m\frac{x_j}{r}\right) = \delta_{il}\left(\frac{m_l\delta_{jj}}{r^3}-\frac{3x_jm_lx_j}{r^5}\right)-\delta_{im}\left(\frac{m_j\delta_{jm}}{r^3}-\frac{3x_mm_jx_j}{r^5}\right) =$$

$$= \frac{3m_i}{r^3}-\frac{3r^2m_i}{r^5}-\frac{m_j\delta_{ji}}{r^3}+\frac{3x_im_jx_j}{r^5} = \frac{3}{r^3}\left(\frac{x_i}{r}\right)m_j\left(\frac{x_j}{r}\right)-\frac{m_i}{r^3} = \left(\frac{3\hat{n}(\vec{m}\cdot\hat{n})-\vec{m}}{r^3}\right)_i$$

então $\vec{B}_d(\vec{x}) = \left(\frac{3\hat{n}(\hat{n}\cdot\vec{m})-\vec{m}}{|\vec{x}|^3}\right)\frac{\mu_0}{4\pi}$ que é o campo de dipolo magnético para fora da distribuição de corrente e longe do dipolo (origem)

Para $r\to 0$, calculemos a integral volumétrica de $\vec{B}$ dentro da esfera $r<R$

$$\int_{r<R}\vec{B}(\vec{x})d^3x = \int_{r<R}\vec{\nabla}\times\vec{A}\,d^3x = R^2\int d\Omega\,\hat{n}\times\vec{A} = -R^2\int d\Omega\,\vec{A}\times\hat{n} =$$

já fizemos

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}R^2\int d^3x'\vec{J}(\vec{x}')\times\int\frac{d\Omega\,\hat{n}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = -\frac{\mu_0}{4\pi}R^2\int d^3x'\vec{J}(\vec{x}')\times\left(\frac{4\pi}{3}\frac{r_<}{r_>^2}\frac{\vec{x}'}{r'}\right) =$$

$$= \frac{\mu_0}{3}\int d^3x'\left(\frac{R^2r_<}{r'r_>^2}\right)\vec{x}'\times\vec{J}(\vec{x}')$$

quando as correntes estão no interior da esfera: $r_< = r'$ e $r_> = R$: $\int_{r<R}\vec{B}(\vec{x})d^3x = \frac{2\mu_0}{3}\vec{m}$

quando as correntes são externas à esfera: $r_< = R$ e $r_> = r'$; $\int_{r<R}\vec{B}(\vec{x})d^3x = \frac{4\pi R^3}{3}\vec{B}(0)$

Portanto, $\boxed{\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3\hat{n}(\hat{n}\cdot\vec{m}) - \vec{m}}{|\vec{x}|^3} + \frac{8\pi}{3}\vec{m}\,\delta(\vec{x})\right]}$

Lembrando que $\vec{F} = \int \vec{J}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x})\, d^3x$

dada uma componente de $\vec{B}$ podemos expandi-la:

$$B_k(\vec{x}) = B_k(0) + \vec{x}\cdot\vec{\nabla} B_k(0) + \dots$$

daí $\vec{F} = -\vec{B}(0) \times \int d^3x\, \vec{J}(\vec{x}) + \int d^3x\, \vec{J}(\vec{x}) \times [(\vec{x}\cdot\vec{\nabla}')\vec{B}(\vec{x}')]|_{\vec{x}'=0} + \dots$

mas para correntes estacionárias $\int d^3x\, \vec{J}(\vec{x}) = \oint dx \int d^2x\, \vec{J}(\vec{x}) = I\oint dx = 0$

e ainda $(\vec{x}\cdot\vec{\nabla}')\vec{B}(\vec{x}') = \vec{\nabla}'(\vec{x}\cdot\vec{B}(\vec{x}')) - \vec{x}\times\underbrace{(\vec{\nabla}'\times\vec{B}(\vec{x}'))}_{=0 \text{ para fontes externas}}$

assim $\vec{F} = \int d^3x\, \vec{J}(\vec{x}) \times [\vec{\nabla}'(\vec{x}\cdot\vec{B}(\vec{x}'))]_{\vec{x}'=0}$

usando a identidade $\vec{\nabla}'\times\psi\vec{J} = \vec{\nabla}'\psi\times\vec{J} + \psi\underbrace{\vec{\nabla}'\times\vec{J}(\vec{x})}_{=0 \text{ pois } \vec{\nabla}' \text{ atua sobre } \vec{x}'}$

e invertendo o produto: $\vec{F} = -\vec{\nabla}'\times\int d^3x\, [(\vec{x}\cdot\vec{B}(\vec{x}))|_{\vec{x}'=0}\, \vec{J}(\vec{x})]$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}'\times\int d^3x\, [(\vec{x}\cdot\vec{B}(0))\,\vec{J}(\vec{x})]$$

ainda $\int d^3x\, (\vec{x}\cdot\vec{B}(\vec{x}'))\vec{J}(\vec{x}) = -\int d^3x\, [\vec{B}(\vec{x}')\times(\vec{x}\times\vec{J}(\vec{x})) - \vec{x}(\vec{B}(\vec{x}')\cdot\vec{J}(\vec{x}))]$

e $\int d^3x\, \vec{x}(\vec{B}(\vec{x}')\cdot\vec{J}(\vec{x})) = -\int d^3x\, (\vec{x}\cdot\vec{B}(\vec{x}'))\vec{J}(\vec{x})$

pois $-\int d^3x\, (\vec{x}\cdot\vec{B}(\vec{x}'))\, J_i(\vec{x}) = -\int d^3x\, (\vec{x}\cdot\vec{B}(\vec{x}'))\,\delta_{ij} J_j(\vec{x}) =$

$- \int d^3x\, (\vec{x}\cdot\vec{B}(\vec{x}))\, \partial_j x_i\, J_j(\vec{x}) = -\int d^3x\, (\vec{x}\cdot\vec{B}(\vec{x}'))\,\vec{\nabla}\cdot(x_i\vec{J}(\vec{x})) =$

integrando por partes (termo sem integral é zero*) $\rightarrow = \int d^3x\, [\vec{\nabla}(\vec{x}\cdot\vec{B}(\vec{x}'))]\cdot x_i\vec{J}(\vec{x}) =$

$= \int d^3x\, \partial_k x_j B_j x_i J_k = \int d^3x\, x_i \delta_{kj} B_j J_k =$

$= \int d^3x\, x_i\, B_k(\vec{x}')\, J_k(\vec{x}) = \int d^3x\, x_i(\vec{B}(\vec{x}')\cdot\vec{J}(\vec{x}))$

juntando tudo: $\vec{F} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}'\times\left\{\int d^3x\left[\vec{B}(\vec{x}')\times(\vec{x}\times\vec{J}(\vec{x}))\right]\right\}_{\vec{x}'=0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{F} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}'\times\left\{\vec{B}(\vec{x}')\times\int d^3x\,(\vec{x}\times\vec{J}(\vec{x}))\right\}_{\vec{x}'=0} = \vec{\nabla}'\times(\vec{B}(\vec{x}')\times\vec{m})_{\vec{x}'=0} =$

$= (\vec{m}\cdot\vec{\nabla}')\vec{B}(0) - \vec{m}(\cancelto{0}{\vec{\nabla}'\cdot\vec{B}(\vec{x}')})_{\vec{x}'=0} \overset{BAC-CAB}{=} \vec{\nabla}'(\vec{m}\cdot\vec{B}(\vec{x}'))_{\vec{x}'=0} + \vec{\nabla}'\times\vec{m}\times\vec{B}(0) =$

$= \vec{\nabla}'(\vec{m}\cdot\vec{B}(\vec{x}'))_{\vec{x}'=0} - \vec{m}\times(\cancelto{0}{\vec{\nabla}'\times\vec{B}(\vec{x}')})_{\vec{x}'=0}$

$$\therefore \boxed{\vec{F} = \vec{\nabla}'(\vec{m}\cdot\vec{B}(\vec{x}'))}$$

onde o gradiente é avaliado no centro da distribuição: $\vec{x}'=0$

Interpretando a força como o negativo do gradiente de uma energia potencial U, encontramos: $\boxed{U = -\vec{m}\cdot\vec{B}}$

* não há correntes em ?

O torque $\vec{N}$ numa distribuição de corrente pode ser encontrado usando manipulações similares:

$$\vec{N} = \int d^3x\ \vec{x} \times [\vec{J}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x})] \simeq \int d^3x\ \vec{x} \times [\vec{J}(\vec{x}) \times \vec{B}(0)] \Rightarrow$$

$\llcorner$ expansão de $\vec{B}$ até ordem zero somente

$$\vec{N} = \int d^3x\ [(\vec{x}\cdot\vec{B})\vec{J} - (\vec{x}\cdot\vec{J})\vec{B}]$$

vimos que $\int d^3x\ [(\vec{x}\cdot\vec{B}(0))\vec{J}(\vec{x})] = -\frac{1}{2}\int d^3x\ [\vec{B}(\vec{x}') \times (\vec{x} \times \vec{J}(\vec{x}))]_{\vec{x}'=0}$

então $\vec{N} = -\frac{1}{2}\vec{B}(0) \times \int d^3x\ \vec{x} \times \vec{J}(\vec{x}) - \vec{B}(0)\int d^3x\ (\vec{x}\cdot\vec{J}(\vec{x})) \stackrel{*}{=}$

$$= -\vec{B}(0) \times \vec{m} - \vec{B}(0)\int d^3x \left[\frac{1}{2}(\vec{\nabla}\cdot r^2\vec{J}(\vec{x})) - r^2(\vec{\nabla}\cdot\vec{J}(\vec{x}))^{0}\right] =$$

$$= \vec{m} \times \vec{B}(0) - \frac{1}{2}\vec{B}(0)\int d^3x\ \vec{\nabla}\cdot(r^2\vec{J}(\vec{x})) =$$

$$= \vec{m} \times \vec{B}(0) - \frac{1}{2}\vec{B}(0)\underbrace{\int d^2x\ r^2\hat{n}\cdot\vec{J}(\vec{x})}_{=0 \text{ pois as correntes são localizadas}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{N} \doteq \vec{m} \times \vec{B}(0)}$$

$*\ \vec{\nabla}\cdot(r^2\vec{J}(\vec{x})) = 2\vec{x}\cdot\vec{J}(\vec{x}) + r^2(\vec{\nabla}\cdot\vec{J}(\vec{x}))$