6) Magnetostática Macroscópica

Seja um objeto macroscópico com várias correntes microscópicas (elétrons em moléculas) que flutuam rapidamente. Além disso, os elétrons possuem momentos magnéticos intrínsecos que não podem ser calculados por uma densidade de corrente clássica. Devemos calcular as médias sobre pequenos volumes macroscópicos, mas grandes comparados às dimensões moleculares

$$\langle \vec{\nabla}\cdot\vec{B}_{micro} = 0\rangle \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

Magnetização macroscópica média : $\vec{M}(\vec{x}) = \sum_i N_i \langle \vec{m}_i \rangle$

onde N_i é o número médio por unidade de volume de moléculas do tipo i

$\langle \vec{m}_i \rangle$ é o momento magnético molecular médio num pequeno volume em torno do ponto $\vec{x}$

Seja $\vec{J}(\vec{x})$ uma densidade de corrente macroscópica proveniente do fluxo de cargas livres no meio, então:

$$\Delta\vec{A}(\vec{x}) = \Delta\vec{A}_l(\vec{x}) + \Delta\vec{A}_d(\vec{x}) = \left[\frac{\vec{J}(\vec{x}')\Delta V}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \frac{\vec{M}(\vec{x}')\times(\vec{x}-\vec{x}')\Delta V}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\right]\frac{\mu_0}{4\pi}$$

no limite $\Delta V \to 0$: $\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \frac{\vec{M}(\vec{x}')\times(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\right]d^3x'$

reescrevendo o termo de $\vec{M}(\vec{x}')$: $\int \frac{\vec{M}(\vec{x}')\times(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}d^3x' = -\int \vec{M}(\vec{x}')\times\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)d^3x' =$

$$= \int \frac{\vec{\nabla}'\times\vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x' - \int \vec{\nabla}'\times\left(\frac{\vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)d^3x' =$$

$$= \int \frac{\vec{\nabla}'\times\vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x' - \oint_S \hat{n}'\times\left(\frac{\vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)d^3x'$$

Se a superfície S incluir todos os materiais magnéticos a última integral irá se anular* e teremos:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{[\vec{J}(\vec{x}') + \vec{\nabla}'\times\vec{M}(\vec{x}')]}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x' \quad (5.78)$$

podemos introduzir uma densidade de corrente de magnetização

$$\vec{J}_M(\vec{x}) = \vec{\nabla}\times\vec{M}(\vec{x})$$

* $\vec{M}$ deve ser bem comportada e localizada

credeal

assim: $\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x' \, \frac{\vec{J}(\vec{x}') + \vec{J}_M(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$

como $\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x})$ e $\vec{\nabla}\times\vec{B}_{micro} = \mu_0 \vec{J}_{micro}$

fazendo $\vec{J}(\vec{x}) \rightarrow \vec{J}(\vec{x}) + \vec{J}_M(\vec{x})$

vem $\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{x}) = \mu_0\left(\vec{J}(\vec{x}) + \vec{J}_M(\vec{x})\right) = \mu_0 \vec{J}(\vec{x}) + \mu_0 \vec{\nabla}\times\vec{M}(\vec{x})$

e é claro que $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{x}) = 0$

de $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\vec{\nabla}\times\vec{M} \Rightarrow \vec{\nabla}\times(\vec{B}/\mu_0 - \vec{M}) = \vec{J}$

de onde definimos o campo magnético: $\boxed{\vec{H}(\vec{x}) \equiv \frac{\vec{B}(\vec{x})}{\mu_0} - \vec{M}(\vec{x})}$

e assim temos as equações macroscópicas

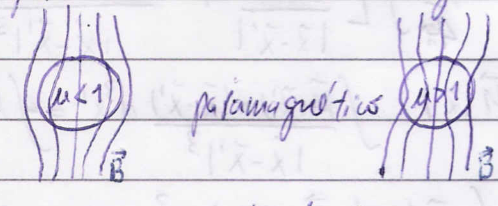
$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}} \quad \text{e} \quad \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0} \qquad (5.82)$$

Para substâncias isotrópicas (diamagnéticas e paramagnéticas) existe uma relação constitutiva entre $\vec{H}$ e $\vec{B}$:

$$\boxed{\vec{B} = \mu\vec{H}}$$

onde μ é a permeabilidade magnética do meio

- $\mu > 1$ para substâncias paramagnéticas
- $\mu < 1$ para substâncias diamagnéticas $\quad \mu/\mu_0 \sim 1 \pm 10^{-5}$ (tipicamente)

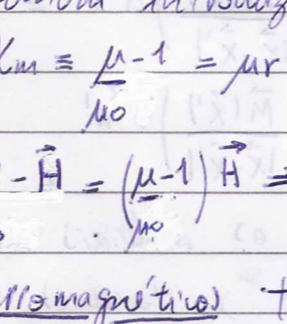


é também comum introduzir a suscetibilidade magnética χ_m:

$\chi_m \equiv \frac{\mu}{\mu_0} - 1 = \mu_r - 1$, onde μ_r é a permeabilidade magnética relativa

tal que $\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right)\vec{H} \Rightarrow \boxed{\vec{M} = \chi_m \vec{H}}$

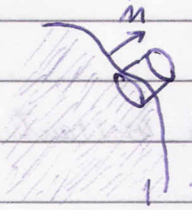
Materiais ferromagnéticos têm relações bem diferentes entre $\vec{B}$, $\vec{M}$ e $\vec{H}$: não são bi-unívocas e dependem da história da amostra



Ciclo de histerese

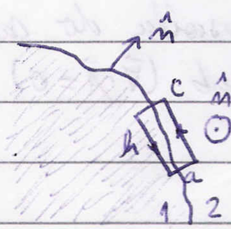
7) Condições de Contorno na Magnetostática

Partindo de $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}$ e $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ que são gerais e válidas para qualquer sistema, independentemente das relações entre $\vec{B}$ e $\vec{H}$, deduzimos as condições de contorno:



$$\int d^3x\, \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \int d^2x\, \vec{B}\cdot\hat{n} = \boxed{(\vec{B}_2 - \vec{B}_1)\cdot\hat{n} = 0} \quad (5.86)$$

$$B_{2n} = B_{1n}$$



$$\int d^2x\,(\vec{\nabla}\times\vec{H})\cdot\hat{n}' = \oint_c \vec{H}\cdot d\vec{l} = h\,(\vec{H}_2 - \vec{H}_1)\cdot\hat{n}'\times\hat{n} =$$

$$= \int d^2x\, \vec{J}\cdot\hat{n}' \simeq a h\, \vec{J}\cdot\hat{n}'$$

$a \ll h$

caso $\vec{J} = 0$: neste caso não há descontinuidade na componente tangencial de $\vec{H}$: $(\vec{H}_2 - \vec{H}_1)\times\hat{n} = 0$

Mas suponhamos a existência de uma densidade de corrente na superfície da interface: $\vec{J}_s(\vec{x}) = \vec{K}(\vec{x})\,\delta(\xi)$, onde ξ é a distância à superfície, neste caso:

$$h\,(\vec{H}_2 - \vec{H}_1)\cdot(\hat{n}'\times\hat{n}) = \int d^2x\, \vec{J}_s\cdot\hat{n}' = h\int dx\, \vec{K}(\vec{x})\cdot\hat{n}'\,\delta(\xi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h\,\hat{n}'\cdot[\hat{n}\times(\vec{H}_2 - \vec{H}_1)] = h\,\vec{K}\cdot\hat{n}' \Rightarrow \boxed{\hat{n}\times(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}} \quad (5.87)$$

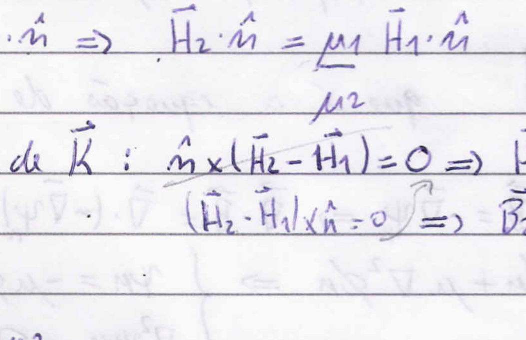
Para meios onde valem as relações lineares:

$$\vec{B}_2\cdot\hat{n} = \vec{B}_1\cdot\hat{n} \Rightarrow \vec{H}_2\cdot\hat{n} = \frac{\mu_1}{\mu_2}\vec{H}_1\cdot\hat{n} \quad (5.88)$$

na ausência de $\vec{K}$: $\hat{n}\times(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \Rightarrow \vec{H}_2\times\hat{n} = \vec{H}_1\times\hat{n} \Rightarrow$

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1)\times\hat{n} = 0 \Rightarrow \vec{B}_2\times\hat{n} = \frac{\mu_2}{\mu_1}\vec{B}_1\times\hat{n} \quad (5.89)$$

<u>Exemplo</u> $\mu_1 \gg \mu_2$



no limite $\mu_1/\mu_2 \to \infty$ $\vec{H}_2$ é normal à interface de meios (analogia com $\vec{E}$ em condutores)

8) Problemas de Contorno

A) Potencial vetor :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \implies \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}$$

Quando se tem a relação constitutiva $\vec{H} = \vec{H}(\vec{B})$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}(\vec{B}) = \vec{\nabla}\times\vec{H}(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{J}$$

Para meios com resposta linear $\vec{B} = \mu\vec{H} \implies$

$$\implies \vec{\nabla}\times\left(\frac{1}{\mu}\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) = \vec{J}$$, que para μ constante:

$$\implies \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} = \mu\vec{J}$$, com a escolha do calibre de Coulomb $(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0)$

$$\implies \boxed{\nabla^2\vec{A} = -\mu\vec{J}} \quad (5.92)$$

que é a mesma equação do vácuo $\left(\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J}\right)$ com a densidade de corrente modificada para $\frac{\mu}{\mu_0}\vec{J}$

B) Potencial escalar magnético $(\vec{J} = 0)$

Se $\vec{J} = 0$: $\vec{\nabla}\times\vec{H} = 0 \implies \vec{H} = -\vec{\nabla}\phi_M$

Quando se tem uma relação constitutiva $\vec{B} = \vec{B}(\vec{H})$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{H}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{B}(-\vec{\nabla}\phi_M) = 0$$

Para meios com resposta linear $\vec{B} = \mu\vec{H} \implies$

$$\implies \vec{\nabla}\cdot(\mu\vec{\nabla}\phi_M) = 0$$, que para μ constante $(\vec{\nabla}\mu = 0)$

$$\boxed{\nabla^2\phi_M = 0}$$ que é a equação de Laplace

Note que se $\vec{\nabla}\mu = 0$: $\vec{B} = -\vec{\nabla}\psi_M \implies \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \vec{\nabla}\cdot(-\vec{\nabla}\psi_M) = \vec{\nabla}\cdot(\mu\vec{\nabla}\phi_M) \implies$

$$\implies -\nabla^2\psi_M = \vec{\nabla}\mu^{\,0}\cdot\vec{\nabla}\phi_M + \mu\nabla^2\phi_M \implies \begin{cases} \psi_M = -\mu\phi_M \\ \nabla^2\psi_M = 0 \end{cases}$$

ou seja, ψ_M também satisfaz a equação de Laplace

C) Materiais ferromagnéticos duros ($\vec{M}$ dado e $\vec{J}=0$)

O material ferromagnético é duro quando sua magnetização $\vec{M}$ é independente dos campos aplicados : $\vec{M}(\vec{x})$ dado

a) Potencial escalar

Como $\vec{J}=0 \Rightarrow \phi_M$: $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla}\cdot(\vec{H}+\vec{M}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot(-\vec{\nabla}\phi_M + \vec{M}) = 0 \Rightarrow \nabla^2\phi_M = \vec{\nabla}\cdot\vec{M}$

definindo a densidade de carga de magnetização $\rho_M = -\vec{\nabla}\cdot\vec{M}$ temos a equação de Poisson da magnetostática:

$$\boxed{\nabla^2\phi_M = -\rho_M} \quad (5.95)$$

com solução : (sem superfícies de contorno)

$$\boxed{\phi_M = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'} = \quad (5.97)$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left\{\int \vec{\nabla}'\cdot\left(\frac{\vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)d^3x' - \int \vec{M}(\vec{x}')\cdot\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)d^3x'\right\} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left\{\underbrace{\oint_S \frac{\vec{M}(\vec{x}')\cdot\hat{n}'\,d^2x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|}}_{=0 \text{ para } S \text{ além da região de magnetização}} + \int \vec{M}(\vec{x}')\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)d^3x'\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi_M(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\cdot\int \frac{\vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'} \quad (5.98)$$

que pode ser aproximada para regiões distantes:

$$\phi_M(\vec{x}) \simeq -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\int \vec{M}(\vec{x}')d^3x' = \frac{\vec{m}\cdot\vec{x}}{4\pi r^3}$$

onde $\vec{m} = \int \vec{M}(\vec{x}')d^3x'$ é o momento magnético total e $\phi_M(\vec{x})$ torna-se o potencial de um dipolo (assintoticamente)

Se o corpo ferromagnético duro tem $\vec{M}(\vec{x})$ no interior de V e cai a zero na superfície S descontinuamente

$$\int_V \rho_M\, d^3x = -\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{M}\, d^3x = -\oint_S \hat{n}\cdot\vec{M}\, da \Rightarrow \sigma_M = \hat{n}\cdot\vec{M} \quad (5.99)$$

e a solução geral de ϕ_M deve ser substituída por:

$$\phi_M(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\left(-\int_V \frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \oint_S \frac{\hat{n}'\cdot\vec{M}(\vec{x}')\,da'}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) \quad (5.100)$$

b) Potencial vetor

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

daí $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\times(\vec{B}/\mu_0 - \vec{M}) = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A} - \mu_0\vec{M}) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})}_{=0 \text{ no calibre de Coulomb}} - \nabla^2\vec{A} = \mu_0\vec{\nabla}\times\vec{M} \Rightarrow \boxed{\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J}_M} \quad (5.101)$$

que é a equação de Poisson para $\vec{A}$

na ausência de $\vec{J}$, a solução para $\vec{A}$ é: $\boxed{\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{\nabla}'\times\vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,d^3x'}$ (5.102)

↳ (5.78)

Se $\vec{M}$ cai a zero descontinuamente na superfície S

Usando: $\vec{M}\times\nabla'\psi = \psi\vec{\nabla}'\times\vec{M} - \vec{\nabla}'\times\psi\vec{M}$ e partindo de

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{M}(\vec{x}')\times(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\,d^3x' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{M}(\vec{x}')\times\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)d^3x' =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{\nabla}'\times\vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,d^3x' - \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{\nabla}'\times\left(\frac{\vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)d^3x'$$

e usando agora $\int_V \vec{\nabla}\times\vec{V}\,d^3x = \oint_S \hat{n}\times\vec{V}\,da$, vem

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{\nabla}'\times\vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,d^3x' - \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \frac{\hat{n}'\times\vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,d^2x' \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{\nabla}'\times\vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,d^3x' + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint \frac{\vec{M}(\vec{x}')\times\hat{n}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,d^2x'} \quad (5.103)$$