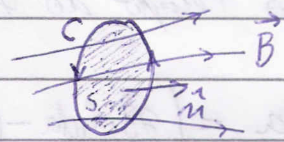
Equações de Maxwell

Introdução do tempo nas equações do eletromagnetismo. Nos problemas dependentes do tempo, os fenômenos elétricos e magnéticos deixam de ser independentes. Campos magnéticos variáveis no tempo produzem campos elétricos e vice-versa

1) A lei da indução de Faraday

Faraday em 1831 observou que a variação do fluxo magnético por uma espira produz uma voltagem induzida ou força eletromotriz $\mathcal{E}$



fluxo magnético : $F = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} \, da$ (6.1)

força eletromotriz : $\mathcal{E} = \oint_C \vec{E}' \cdot d\vec{l}$ (6.2)

Matematicamente, formula-se a lei de indução de Faraday:

$$\boxed{\mathcal{E} = -K \frac{dF}{dt}} \quad (6.3)$$

lei de Lenz (sinal de menos): o sentido da corrente induzida pela força eletromotriz é tal que se opõe à modificação do fluxo.

$[K] = (cm/s)^{-1}$

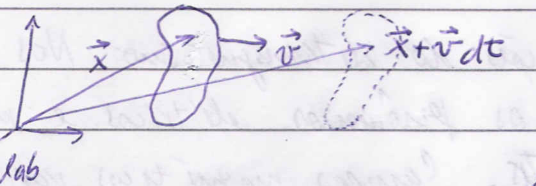
$K = K_3 = 1/c$ no sistema gaussiano , $K = 1$ no MKSA

$$[K] = \frac{[\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}]}{[\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot \hat{n} \, da]} = \frac{El}{(Bl^2)/t} = \frac{Et}{Bl} = \frac{Et}{l} \frac{I}{dF/dl} = \frac{Et}{l} \frac{q}{t} \frac{l}{Eq} = 1$$

Agora : $\mathcal{E} = -K \frac{dF}{dt} \Rightarrow \boxed{\oint_C \vec{E}' \cdot d\vec{l} = -K \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} \, da}$ (6.4)

o fluxo pode ser modificado pela modificação de $\vec{B}$ ou por modificações no circuito (forma, orientação ou posição)

Se o circuito estiver em movimento com velocidade $\vec{v}$ e $\vec{E}'$ é medido no referencial do circuito (ou referencial próprio).



Como $\vec{B}$ é função das coordenadas espaciais e do tempo $\vec{B}(x,y,z,t)$:

$$dB = \frac{\partial B}{\partial x}dx + \frac{\partial B}{\partial y}dy + \frac{\partial B}{\partial z}dz + \frac{\partial B}{\partial t}dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial B}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial B}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial B}{\partial t}\frac{dt}{dt} = (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

onde encontramos a derivação convectiva: $\frac{d}{dt} = \vec{v}\cdot\vec{\nabla} + \frac{\partial}{\partial t}$

usando agora: $\vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{B}) = \vec{v}\cdot(\cancel{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}}) - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$

calculamos a derivada total em relação ao tempo do fluxo magnético pelo circuito móvel:

$$\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,da = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot\hat{n}\,da + \int_S (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}\,da = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot\hat{n}\,da - \int_S \vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{B})da$$

$$= \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot\hat{n}\,da + \int_S \vec{\nabla}\times(\vec{B}\times\vec{v})\,da = \leftarrow \text{T. de Stokes}$$

$$\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,da = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot\hat{n}\,da + \oint_C (\vec{B}\times\vec{v})\cdot d\vec{l} \qquad (6.5)$$

daí: $\oint_C [\vec{E}' - K(\vec{v}\times\vec{B})]\cdot d\vec{l} = -K\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot\hat{n}\,da \qquad (6.6)$

esta equação é equivalente à lei de Faraday aplicada ao circuito no referencial do laboratório (sob transformação de Galileu)

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -K\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot\hat{n}\,da \qquad (6.7)$$

de onde concluímos que o campo elétrico $\vec{E}'$ no sistema em movimento está relacionado ao campo elétrico $\vec{E}$ no laboratório por:

$$\boxed{\vec{E}' = \vec{E} + K(\vec{v}\times\vec{B})} \qquad (6.8)$$

Uma partícula em repouso, no seu referencial (próprio), estará sujeita a uma força $q\vec{E}'$. Quando se observa do laboratório, contudo, estará sujeita a uma força $q(\vec{E}+K(\vec{v}\times\vec{B}))$, que deve ser igual a $q\vec{E}'$, pela hipótese da invariância de Galileu. Então, no laboratório observa-se uma força adicional: $\vec{F_v} = qK(\vec{v}\times\vec{B})$

Mas, a carga em movimento representa uma corrente: $\vec{J} = q\vec{v}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')$
Lembrando que $\vec{F} = \int \vec{J}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x})\, d^3x$ (5.12)

vem: $\vec{F}_v = \int \vec{J}(\vec{x}')\times\vec{B}(\vec{x}')\, d^3x' = q\int \vec{v}\times\vec{B}(\vec{x}')\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')\, d^3x' = q\,(\vec{v}\times\vec{B})$

de onde concluimos que $K=1 \Rightarrow \boxed{\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}}$ (6.10)

e a lei de Faraday fica: $\boxed{\oint_c \vec{E}'\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_s \vec{B}\cdot\hat{n}\,da}$ (6.9)

onde $\vec{E}'$ é o campo elétrico no referencial próprio e d/dt é a derivada total do fluxo magnético

Mantendo-se o circuito fixo no referencial escolhido ($\vec{E}$ e $\vec{B}$ no mesmo sistema):

$$\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_s (\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot\hat{n}\,da = -\int_s \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\hat{n}\,da \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0} \quad (6.11)$$

sendo esta a generalização dependente do tempo para a equação da eletrostática $\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$ e é a forma diferencial da lei de Faraday.

2) Energia num campo magnético

Seja um circuito com corrente I, se tivermos um fluxo magnético variável dF/dt aparecerá uma força eletromotriz $\mathcal{E} = -\frac{dF}{dt}$. Se quisermos manter a corrente I devemos

introduzir um agente externo com voltagem $V = -\mathcal{E} = \frac{dF}{dt}$

A potência deste agente é $P = VI = -\mathcal{E}I$ e o trabalho total que ele realiza : $\delta W = -\int \mathcal{E} I \, dt = I \int \frac{dF}{dt} dt = I \, \delta F$

onde δF é a variação total do fluxo magnético pelo circuito:

$$\delta W = I \int_S d^2x \, (\delta \vec{B} \cdot \hat{n})$$

como $\delta \vec{B} = \vec{\nabla} \times \delta \vec{A} \Rightarrow \delta W = I \int_S d^2x \, (\vec{\nabla} \times \delta \vec{A}) \cdot \hat{n} = I \oint_C d\vec{l} \cdot \delta \vec{A}$

utilizando a densidade de corrente $\vec{J}$: $I d\vec{l} \rightarrow \vec{J} \, d\sigma \, dl = \vec{J} \, d^3x$

onde $d\sigma$ é a seção reta infinitesimal do circuito, assim

$$\boxed{\delta W = \int d^3x \, [\vec{J}(\vec{x}) \cdot \delta \vec{A}(\vec{x})]} \quad (6.12)$$

da lei de Ampère : $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$, então

$\vec{\nabla} \cdot (\vec{P} \times \vec{Q}) = \vec{Q} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{P}) - \vec{P} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{Q})$

$$\delta W = \int_V d^3x \, [(\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \delta \vec{A}] = \int_V d^3x \, [\underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{H} \times \delta \vec{A})}_{\text{gauss}} + \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \delta \vec{A})] =$$

$$= \underbrace{\oint_S d^2x \, (\vec{H} \times \delta \vec{A}) \cdot \hat{n}}_{\substack{=0 \text{ para integração em} \\ \text{todo o espaço } (\vec{H} \to 0 \text{ no infinito})}} + \int_V d^3x \, (\vec{H} \cdot \delta \vec{B})$$

usando agora que $\vec{H} \cdot \delta \vec{B} = \frac{1}{2} \delta (\vec{H} \cdot \vec{B}) \Rightarrow \delta W = \frac{1}{2} \int \delta (\vec{H} \cdot \vec{B}) d^3x$

que integrada dá : $\boxed{W = \frac{1}{2} \int (\vec{H} \cdot \vec{B}) \, d^3x}$ (6.16)

onde $W = 0$ é o estado para $\vec{B} = 0$

por outro lado $\vec{J} \cdot \delta \vec{A} = \frac{1}{2} \delta (\vec{J} \cdot \vec{A})$, cuja integração dá : (6.17) $\boxed{W = \frac{1}{2} \int (\vec{J} \cdot \vec{A}) d^3x}$

3) Corrente de deslocamento

Até agora : $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$, $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$

contudo, essas equações são incoerentes com a introdução de campos dependentes do tempo:

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H}) = 0 \Rightarrow$$ o que resulta em $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=0$

mas sabemos que para situações dependentes do tempo a conservação da carga requer a equação da continuidade:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

Maxwell percebeu que introduzindo a lei de Coulomb:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = 0$$

devendo a densidade de corrente $\vec{J}$ ser substituída por sua generalização: $\vec{J} \rightarrow \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$.

onde $\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ é conhecida como corrente de deslocamento

e a lei de Ampère fica: $$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \quad (6.27)$$

e as quatro equações:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho \,, & \vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \,, & \vec{\nabla}\times\vec{E} + \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

são conhecidas como equações de Maxwell

3) Equações de Onda Eletromagnéticas no Vácuo

No vácuo: $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$ e $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$

na ausência de fontes, as equações de Maxwell ficam

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \quad \vec{\nabla}\times\frac{\vec{B}}{\mu_0} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

calculando o rotacional das equações rotacionais:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{\nabla}(\cancelto{0}{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}) - \nabla^2\vec{E} = -\vec{\nabla}\times\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \boxed{\nabla^2\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{\nabla}(\cancelto{0}{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}}) - \nabla^2\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} \Rightarrow \boxed{\nabla^2\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0}$$

que são as equações de onda homogêneas para os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ com velocidade de propagação $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \equiv 299.792.458\ m/s$

definindo-se o operador D'Alambertiano $\Box^2 \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, vêm:

$$\Box^2\vec{E} = 0 \quad e \quad \Box^2\vec{B} = 0$$

as eqs. ondas eletromagnéticas são satisfeitas por funções do tipo: $\psi(x - ct)$ em 1-dimensão:

Seja $u = x - ct$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial u} \Rightarrow \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = -c\frac{\partial\psi}{\partial u} \Rightarrow \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0}$$

e em 3-dimensões por funções do tipo $e^{i(\vec{K}\cdot\vec{x} - \omega t)}$, onde $\vec{K}$ é um vetor real de componentes K_x, K_y e K_z e $c = \omega/K$ é a velocidade da onda

/ /

Seg Ter Qua Qui Sex Sáb Dom

seja $u_K(\vec{x},t) = e^{i(\vec{K}\cdot\vec{x} - \omega t)}$

$(\nabla u_K)_j = \partial_j \exp i(K_\ell x_\ell - \omega t) = i K_j \exp i(K_\ell x_\ell - \omega t) = i K_j u_K \Rightarrow$

$\nabla u_K = i\vec{K} u_K \Rightarrow \nabla^2 u_K = (i\vec{K})^2 u_K \Rightarrow \nabla^2 u_K = -K^2 u_K$

$\frac{\partial u_K}{\partial t} = -i\omega u_K \Rightarrow \frac{\partial^2 u_K}{\partial t^2} = -\omega^2 u_K$

$$u_K = -\frac{\nabla^2 u_K}{K^2} = -\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 u_K}{\partial t^2} \Rightarrow \nabla^2 u_K - \frac{K^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 u_K}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla^2 u_K - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u_K}{\partial t^2} = 0}$$

Incluindo-se as fontes, mostra-se que

$$\nabla^2\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{\nabla}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) + \mu_0\frac{\partial\vec{J}}{\partial t} = 4\pi\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\rho + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}\right) = 4\pi\left(K_1\vec{\nabla}\rho + K_2\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}\right)$$

$$\nabla^2\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{\nabla}\times\vec{J} = -4\pi\frac{K_2}{K_3}\vec{\nabla}\times\vec{J}$$

4) Potencial Vetor e Escalar; Transformações de Calibre

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\nabla}\times\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \quad (6.30)$$

de onde: $\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$ (6.31)

credeal

e podemos calcular $\vec{E}$ e $\vec{B}$ dos potenciais. O comportamento dinâmico de $\vec{A}$ e ϕ é dado pelas equações não-homogêneas. Faremos por simplicidade $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ e $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}} \quad (6.32)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0\vec{J} \Rightarrow \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) =$$

$$= \boxed{\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = -\mu_0\vec{J}} \quad (6.33)$$

mas estas equações não têm formatos simétricos e estão acopladas. Podemos desacoplá-las explorando a arbitrariedade na definição dos potenciais:

Fazendo $\quad \vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \quad \Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}'$

mas $\quad \vec{E} \neq -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}'$, então devemos substituir

$$\boxed{\phi \to \phi' = \phi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}} \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi' - \frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} =$$

$$= -\vec{\nabla}\phi + \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\Lambda - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\Lambda = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

Então, dados os potenciais $\vec{A}$ e ϕ podemos fazer uma transformação de calibre para $\vec{A}'$ e ϕ' sem alterar os campos, tais que:

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \\ \phi' = \phi - \dfrac{\partial\Lambda}{\partial t} \end{cases}, \quad \text{onde } \Lambda = \Lambda(\vec{x}, t)$$

Se a função Λ for escolhida tal que tenhamos o <u>calibre de Lorenz</u>: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$ (6.36), as equações dos potenciais são desacopladas:

$$\boxed{\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}} \quad (6.37)$$

$$\boxed{\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J}} \quad (6.38)$$

formando um conjunto de equações de onda equivalentes às equações de Maxwell verificando agora a condição para satisfazer o calibre de Lorenz:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi'}{\partial t} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \nabla^2\Lambda + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2\Lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}} \quad (6.40)$$

A função que procuramos satisfaz à equação de onda com fonte $(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + 1/c^2\, \partial/\partial t\, \phi)/4\pi$

Definindo o operador D'Alambertiano: $\Box^2 \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$

todas as funções de onda clássicas satisfazem à equação:

$$\Box^2 \psi(\vec{x},t) = -4\pi f(\vec{x},t)$$

O calibre de Coulomb ou calibre transversal ou calibre de radiação é definido pela condição $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$. Neste calibre o potencial escalar satisfaz à equação de Poisson: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 1/c^2\, \partial\phi/\partial t = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \nabla^2\phi = -\rho/\varepsilon_0 \quad \text{(por isso, calibre de Coulomb!)}$$

cuja solução é $\boxed{\phi(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{x}',t)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'}$

que é o potencial coulombiano instantâneo devido a densidade de carga $\rho(\vec{x},t)$.

O potencial vetor obedece a equação de onda inomogênea

das acopladas $\rightarrow$ $\boxed{\Box^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\phi)}$

Dadas as fontes ρ e $\vec{J}$ podemos inicialmente encontrar o potencial escalar e, posteriormente, o potencial vetor. Observamos agora:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\phi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\vec{\nabla}}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{x}',t)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'\right] = \frac{1}{c^2}\frac{\vec{\nabla}}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\partial\rho(\vec{x}',t)}{\partial t}\frac{d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \quad \text{eq da continuidade}$$

$$= -\frac{1}{c^2}\frac{\vec{\nabla}}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{J}(\vec{x}',t)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x' = -\mu_0\left(\frac{\vec{\nabla}}{4\pi}\int\frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{J}(\vec{x}',t)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'\right)$$

como este termo envolve o gradiente de uma função, necessariamente seu rotacional é nulo, o que significa ser a componente longitudinal do campo vetorial $\vec{J}$:

$$\boxed{\vec{J}_\ell = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int\frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{J}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'}$$, tal que $\vec{\nabla}\times\vec{J}_\ell = 0$ e que

(6.49) / (6,27)

$$\Box^2\vec{A} = -\mu_0(\vec{J}-\vec{J}_\ell) = -\mu_0\cdot\vec{J}_t$$, onde $\vec{J}_t$ é a componente tangencial de $\vec{J}$, tal que $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_t = 0$

Dada uma função vetorial da posição, é sempre possível decompô-la em componentes longitudinais e transversais:

$$\vec{J} = \vec{J}_\ell + \vec{J}_t$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{J}_\ell = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{J} = \vec{\nabla}\times\vec{J}_t$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_t = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = \vec{\nabla}\cdot\vec{J}_\ell$$

lembrando que (da magnetostática):

$$\vec{\nabla}\cdot\int\frac{\vec{J}(\vec{x}')d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \int d^3x'\,\vec{J}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) = -\int d^3x'\,\vec{J}\cdot\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) =$$

$$= -\int d^3x'\,\vec{\nabla}'\cdot\left(\frac{\vec{J}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) + \int d^3x'\,\frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{J}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} =$$

$$= -\oint d^2x'\,\frac{\vec{J}\cdot\hat{n}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}^{\to 0} + \int\frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{J}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'$$

e que $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{J}) = \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{J} + \nabla^2\vec{J}$, vem:

$$\vec{J}_t = \vec{J}-\vec{J}_\ell = \vec{J} + \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int\frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{J}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x' = \vec{J}+\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\int\frac{\vec{J}\,d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) =$$

$$= \vec{J}+\frac{1}{4\pi}\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\int\frac{\vec{J}\,d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \nabla^2\int\frac{\vec{J}\,d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) =$$

$$= \vec{J}+\frac{1}{4\pi}\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\int\frac{\vec{J}\,d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \int\vec{J}\,\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)d^3x'\right) =$$

$$= \vec{J}+\frac{1}{4\pi}\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\int\frac{\vec{J}\,d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} - 4\pi\int\vec{J}(\vec{x}')\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')\,d^3x'\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{J}_t = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\int\frac{\vec{J}(\vec{x}',t)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'}$$

(6,28) 3ª

Mostrando que a equação de onda para $\vec{A}$ no calibre de Coulomb ou calibre transversal: $\boxed{\Box^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J}_t}$