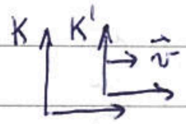
Cap. 11 | Teoria da Relatividade Especial

1) Situação antes de 1900, Postulados de Einstein

(1864) equações de Maxwell : eletromagnetismo e óptica
→ teoria ondulatória : meio para a propagação das ondas (éter)
→ éter : meio muito rarefeito que não interage com a matéria e preenche todo o espaço, onde as ondas eletromagnéticas se propagam
- Aristóteles (séc. IV a.C), Descartes (XVII), Fresnel (XIX)

eletromagnetismo x mecânica
↳ invariante sob transf. de Galileu




$(x, y, z, t)$

$(x', y', z', t')$

transf. de Galileu $\begin{cases} \vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t \\ t' = t \end{cases}$ (1)

ex. sist. mecânico : partículas interagindo via potencial central

no ref. K' : $$m_i \frac{d\vec{v}_i'}{dt'} = -\nabla_i' \sum_j V_{ij} (|\vec{x}_i' - \vec{x}_j'|) \quad (2)$$

de (1) : $\vec{v}_i' = \vec{v}_i - \vec{v}$, $\nabla_i' = \nabla_i$, $d\vec{v}_i'/dt = d\vec{v}_i/dt$, $|\vec{x}_i' - \vec{x}_j'| = |\vec{x}_i - \vec{x}_j| \Rightarrow$

no ref. K : $$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = -\nabla_i \sum_j V_{ij} (|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) \quad (3)$$

Suponha um campo $\psi(\vec{x}', t')$ que satisfaz à equação :

no ref. K' : $$\left( \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) \psi = 0 \quad (4)$$

de (1) : $dx_i' = \sum (\partial_{x_i} x_i' \, dx_i) + (\partial_{t'} \psi) \, dt'$

de (1) : $dx' = dx - v_x dt$, $dy' = dy - v_y dt$, $dz' = dz - v_z dt$, $dt' = dt$

então o diferencial se transforma de acordo com :

$$d\psi = \sum_i (\partial_{x_i'} \psi) dx_i' + \partial_{t'} \psi \, dt' = \sum_i (\partial_{x_i'} \psi) dx_i + [\partial_{t'} - (\vec{v} \cdot \nabla' \psi)] \psi \, dt$$

de onde concluímos que : $\partial x_i = \partial x_i'$, $\partial t = \partial t' - \vec{v} \cdot \nabla' \psi$

assim : $\partial_{t'}^2 = \frac{\partial}{\partial t'} \left( \frac{\partial}{\partial t'} \right) = (\partial_t + v \cdot \nabla \psi)^2 = \partial_t^2 + 2 (\vec{v} \cdot \nabla \psi) \partial_t + (\vec{v} \cdot \nabla \psi)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2}{c^2}\,\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\,\vec{v}\cdot\nabla\,\vec{v}\cdot\nabla\right)\psi = 0 \qquad (5)$$

que não conserva a forma sob transf. de Galileu.

<u>Possibilidades</u>: 1. as equações de Maxwell estão erradas

2. as transf. de Galileu valem e o eletromagnetismo tem um referencial inercial preferencial

3. existe um princípio de relatividade mais geral que não são as transf. de Galileu

discussão: 1. muito difícil: Hertz, Lorentz, etc

2. aceitável: Michelson-Morley resultado nulo para o movimento da Terra com relação ao éter

(1892) contração de FitzGerald-Lorentz: $L(v) = L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ (6)

Lorentz e Poincaré mostraram que as eqs. de Maxwell são invariantes sob <u>transf. de Lorentz</u> (e (6) é consequência delas)

outros experimentos (Fizeau 1851, 1853) também falharam

3. alternativa escolhida por Einstein

<u>Postulados da teoria da relatividade</u>:

1 - <u>Postulado da relatividade</u>: as leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais

2 - <u>Postulado da constância da velocidade da luz</u>: a velocidade da luz é finita e independente do movimento da fonte (ou do observador)

2' - <u>Postulado de um limite universal de velocidades</u>: em todo referencial inercial, há uma velocidade limite finita e universal $c$ para todas as entidades físicas.

## 2) Experimentos recentes

A) Arrasto do éter - resultado nulo de Michelson e Morley (1887):

$v_{arrasto} < 1/3\; v_{orb.\,Terra}$

revisão: Shankland et al., Rev. Mod. Phys. 27 (1955) 167 transição nuclear

(1958) Efeito Mössbauer:

seja: $-\vec{p}_\gamma \leftarrow \underset{M}{\bullet} \rightarrow E_\gamma$ : $E_0 = E_\gamma + \frac{p_\gamma^2}{2M} = E_\gamma + \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow E_\gamma = Mc^2\left(-1 \pm \sqrt{1+\frac{2E_0}{Mc^2}}\right) \underset{\downarrow}{\simeq} E_0 - \frac{E_0^2}{2Mc^2}$$

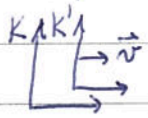
(exp. raiz quadrada até 3ª ordem + desprez. sol. negativa)

no efeito Mössbauer: $E_\gamma \approx E_0$ (recuo é de todo o sólido)

$$\gamma \Rrightarrow \square \Rrightarrow \gamma \quad \text{(absorção ressonante)}$$

efeito Doppler:

a fase de uma onda plana é invariante (contagem das cristas)




$c = \lambda f$

$c' = \lambda' f'$

$$\phi = (\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x}) = \omega\left(t - \frac{k}{\omega}\hat{k}\cdot\vec{x}\right) = \omega\left(t - \frac{n}{c}\hat{k}\cdot\vec{x}\right) \Rightarrow$$

$$\phi = \omega(t - \vec{n}\cdot\vec{x}/c) = \omega'(t' - \vec{n}'\cdot\vec{x}'/c') \qquad (7)$$

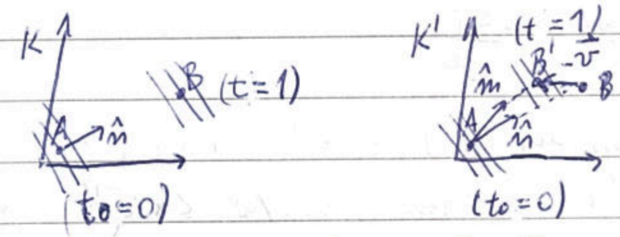
eqs. (1): $= \omega\left[t'\left(1 - \frac{\vec{n}\cdot\vec{v}}{c}\right) - \frac{\vec{n}\cdot\vec{x}'}{c}\right] = \omega'\left[t' - \frac{\vec{n}'\cdot\vec{x}'}{c'}\right]$

que deve valer para todo $t'$ e $\vec{x}'$, portanto:

$$\vec{n} = \vec{n}', \quad \omega' = \omega(1 - \vec{n}\cdot\vec{v}/c), \quad c' = c - \vec{n}\cdot\vec{v} \qquad (8)$$

estas são as fórmulas do efeito Doppler para as transf. de Galileu

agora




dist.(AB) = c

$$\vec{m} = c\hat{n} - \vec{v} \Rightarrow \hat{m} = \frac{c\hat{n} - \vec{v}}{|c\hat{n} - \vec{v}|} \qquad (9)$$

mas $|c\hat{n} - \vec{v}| = c|\hat{n} - \vec{v}/c| = c\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(n_i - v_i/c)^2} \simeq$

$$\simeq c\sqrt{(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) - \frac{2}{c}(n_x v_x + n_y v_y + n_z v_z) + \dots} \simeq c(1 - \hat{n}\cdot\vec{v}/c)$$

$$\simeq c(1 - \hat{m}\cdot\vec{v}_0/c),$$

onde $\vec{v}_0$ é a velocidade do laboratório com relação ao éter.

então: $\hat n(1-\hat n\cdot\vec v_0/c) \simeq \hat n - \vec v_0/c \Rightarrow \hat n \simeq \left(1-\frac{\hat n\cdot\vec v_0}{c}\right)\hat n + \frac{\vec v_0}{c}$ (10)

Seja uma onda plana com frequência $\omega$ no ref. do éter, $\omega_0$ no ref. do lab. e $\omega_1$ no ref. $K_1$ com veloc. $\vec v_1 = \vec u_1 + \vec v_0$ relativa ao ref. do éter.

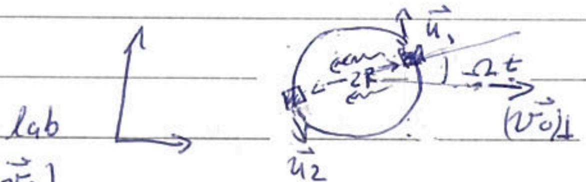
de (8): $\omega_1 = \omega(1-\hat n\cdot\vec v_1/c)$, $\omega_0 = \omega(1-\hat n\cdot\vec v_0/c)$

$$\Rightarrow \omega_1 = \frac{\omega_0}{(1-\hat n\cdot\vec v_0/c)}(1-\hat n\cdot\vec v_1/c) = \omega_0(1-\hat n\cdot\vec v_1/c)(1-\hat n\cdot\vec v_0/c)^{-1} \simeq$$

$$\simeq \omega_0(1-\hat n\cdot\vec v_1/c)(1+\hat n\cdot\vec v_0/c) \simeq \omega_0(1+\hat n\cdot(\vec v_0-\vec v_1)/c) = \omega_0(1-\hat n\cdot\vec u_1/c) =$$

$$= \omega_0\left(1-\frac{\vec u_1}{c}\cdot\left[\left(1-\overbrace{\cancel{\frac{\hat n\cdot\vec v_0}{c}}}^{\approx 0}\right)\hat n + \frac{\vec v_0}{c}\right]\right) \simeq \omega_0\left[1-\frac{\vec u_1}{c}\cdot\left(\hat n + \frac{\vec v_0}{c}\right)\right] \quad (11)$$

Sejam 2 sistemas de Mössbauer




Kündig (1962)

de (11): $\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_0} = \left(\frac{\vec u_2-\vec u_1}{c}\right)\cdot\left(\hat n + \frac{\vec v_0}{c}\right)$

aqui $(\vec u_2-\vec u_1)\cdot\hat n = 0 \Rightarrow \frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_0} = \frac{(\vec u_2-\vec u_1)\cdot\vec v_0}{c^2} = 2\Omega R\,\frac{\hat u\cdot\vec v_0}{c^2}$,

pois como $\vec u_1$ e $\vec u_2$ estão em sentidos opostos:

$$|\vec u_2-\vec u_1| \sim 2u = 2\cdot\frac{2\pi R}{T} = 2\Omega R$$

e tomamos a projeção de $\vec v_0$ na direção das velocidades que é um eixo perpendicular ao do sistema em rotação:

$$\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_0} = \frac{2\Omega R}{c^2}\,\mathrm{sen}\,\Omega t\,|(\vec v_0)_\perp| \quad (12)$$

(1963) Birmingham, linha Mössbauer de 14,4 keV de raios $\gamma$ do $^{57}Fe$ após decaimento $\beta^+$ do $^{57}Co$, $R \simeq 4$ cm, $\Omega \simeq 6000\ s^{-1}$, $v_0 = 200$ m/s $\Rightarrow \Delta\omega/\omega \sim 10^{-12}$ mas nada foi observado ($|(\vec v_0)_\perp| = 1,6 \pm 2,8$ m/s).

(1970) $v_{0\perp} < 5$ cm/s (1958) 2 masers de amônia: $\Delta\omega/\omega_0 = 4|\vec u_{mol}\cdot\vec v_0|/c^2$ sob rotação de 180°, $v_{0\perp} < 30$ m/s

B.) Velocidade da luz de uma fonte em movimento

- Eletrodinâmica de Ritz: alterou as eqs. de Maxwell não homogêneas tal que a veloc. da luz é c somente relativa às fontes → aberração de estrelas, exp. de Fizeau, exp. Michelson-Morley original

(1964) CERN: veloc. de fótons de 6 GeV do decaimento do $\pi^0$:

$p \rightarrow Be \xrightarrow{\pi^0} \overset{\gamma}{\leadsto}$ prótons de 19,2 GeV com $\beta = 0{,}99975$

a veloc. dos fótons emitidos destas fontes extremamente rápidos foi c;

se $c' = c + kv$, onde $v$ é a veloc. da fonte: $k = (0 \pm 1{,}3) \times 10^{-4}$

C.) Dependência da veloc. da luz no vácuo na frequência

$$\rightarrow \quad c(\omega) = c\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^{1/2} \qquad (13)$$

possivelmente, devida a uma massa do fóton ($E = \hbar\omega_0 = mc^2$)

cavidade ressonante Terra-ionosfera ($\omega > 10^8 s^{-1}$): $\omega_0 < 10c/R_T \Rightarrow \Delta c/c \simeq 10^{-10}$

→ dispersão do vácuo: hipótese fora da t. da relatividade

pulsares (13 décadas de frequências), aparato exp.: $\omega_1 < \omega < \omega_2$

$$\left|\frac{c(\omega_1) - c(\omega_2)}{c}\right| \leq \frac{c\Delta t}{D}$$

, $\Delta t$ = duração do pulso

$D$ = dist. até o pulsar

para o pulsar do Caranguejo ($\Delta t \simeq 3 \cdot 10^{-13} s$, $D = 6 \cdot 10^3$ ly):

$$c\Delta t/D \simeq 1{,}7 \cdot 10^{-14}$$

desde $\sim 4 \cdot 10^8$ Hz → óptico → $E_\gamma = 1$ MeV: $\Delta c/c < 10^{-14}$

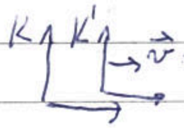
(1973) Stanford Linear Accelerator: fótons com 7 GeV × fótons visíveis: $\Delta c/c < 10^{-5}$

(1983) Comitê Internacional de Pesos e Medidas:

$$c = 299.792.458 \text{ m/s} \quad (\text{exato})$$

# 3) Transformações de Lorentz e Cinemática Relativística

## A) Transformações de coordenadas de Lorentz




coordenadas de tempo e espaço: $(t, x, y, z)$ e $(t', x', y', z')$, respectiv.

$O = O'$ em $t = t' = 0$; um pulso de luz é disparado

2º postulado de Einstein ⇒ frente esférica de luz com veloc. c em K e em K'!

ref. K: $$c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0 \qquad (14)$$

ref. K': $$c^2t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0 \qquad (14')$$

espaço-tempo homogêneo e isotrópico, conexão linear entre os refs.:

$$c t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = \lambda^2 [c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)], \qquad (15)$$

onde $\lambda = \lambda(\vec{v})$, A transf. inversa $(\vec{v} \to -\vec{v}) \Rightarrow \lambda(v) = 1$

agora, no caso $\vec{v} = v\hat{z}$:

$$\begin{cases} z = ct = \gamma(z' + vt') = \gamma(c+v)t' \\ z' = ct' = \gamma(z - vt) = \gamma(c-v)t \end{cases}$$

(transf. linear)

eliminando $t$ e $t'$:

$$t' = \frac{ct}{\gamma(c+v)} \Rightarrow ct' = \frac{c^2 t}{\gamma(c+v)} = \gamma(c-v)t \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

voltando aos tempos: $ct' = \gamma(c-v)t = \gamma(ct - vt) = \gamma(ct - \beta \underbrace{ct}_{z})$ ; $\beta = v/c$

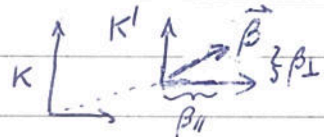
$$ct' = \gamma(ct - \beta z)$$

def.: $x_0 = ct$, $x_1 = z$, $x_2 = x$, $x_3 = y$, temos as transformações de Lorentz:

$$(16) \quad \begin{cases} x_0' = \gamma(x_0 - \beta x_1) \\ x_1' = \gamma(x_1 - \beta x_0) \\ x_2' = x_2 \\ x_3' = x_3 \end{cases} \quad \text{, onde } \vec{\beta} = \vec{v}/c, \ \beta = |\vec{\beta}| \quad \gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} \qquad (17)$$

e as transf. inversas:

$$\begin{cases} x_0 = \gamma(x_0' + \beta x_1') \\ x_1 = \gamma(x_1' + \beta x_0') \\ x_2 = x_2' \\ x_3 = x_3' \end{cases} \qquad (18)$$

no caso 



$$\vec{x} = \vec{x}_\parallel + \vec{x}_\perp = (\vec{\beta}\cdot\vec{x})\frac{\vec{\beta}}{\beta^2} + \left[\vec{x} - (\vec{\beta}\cdot\vec{x})\frac{\vec{\beta}}{\beta^2}\right]$$

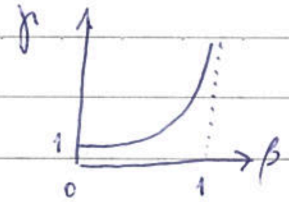
e as transf. de Lorentz ficam:

$$\begin{cases} x_0' = \gamma(x_0 - \beta x_\parallel) = \gamma(x_0 - \vec{\beta}\cdot\vec{x}) \\ x_1' = x_\parallel' = \gamma(x_\parallel - \beta x_0) \Rightarrow \vec{x}_\parallel' = \gamma(\vec{x}_\parallel - \vec{\beta} x_0) \\ x_2' = x_2, \ x_3' = x_3 \Rightarrow \vec{x}_\perp' = \vec{x}_\perp \end{cases}$$

daí $\vec{x}' = \vec{x}_\parallel' + \vec{x}_\perp' = \gamma(\vec{x}_\parallel - \vec{\beta} x_0) + \vec{x}_\perp =$

$$= \gamma\left[(\vec{\beta}\cdot\vec{x})\frac{\vec{\beta}}{\beta^2} - \vec{\beta} x_0\right] + \left[\vec{x} - (\vec{\beta}\cdot\vec{x})\frac{\vec{\beta}}{\beta^2}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \vec{x}' = \vec{x} + \dfrac{(\gamma - 1)}{\beta^2}(\vec{\beta}\cdot\vec{x})\vec{\beta} - \gamma\vec{\beta} x_0 \\ x_0' = \gamma(x_0 - \vec{\beta}\cdot\vec{x}) \end{cases} \qquad (19)$$




$0 \leq \beta \leq 1 \quad , \quad 1 \leq \gamma \leq \infty$

$\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$

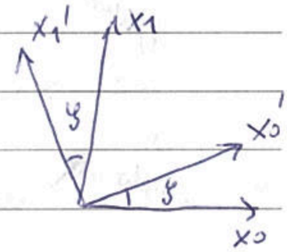
parametrização :
$$\begin{cases} \beta = \tanh \xi = \dfrac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{e^{\xi} + e^{-\xi}} = \dfrac{\operatorname{senh} \xi}{\cosh \xi} \\ \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\tanh^2 \xi}} = \dfrac{\cosh \xi}{\sqrt{\cosh^2 \xi - \operatorname{senh}^2 \xi = 1}} = \cosh \xi \\ \gamma \beta = \operatorname{senh} \xi \end{cases} \tag{20}$$

onde $\xi$ é a rapidez (ou parâmetro de boost)

assim : $x_0' = \gamma x_0 - \gamma \beta x_1 \Rightarrow$
$x_1' = \gamma x_1 - \gamma \beta x_0$

$$\begin{cases} x_0' = \cosh \xi \, x_0 - \operatorname{senh} \xi \, x_1 \\ x_1' = -\operatorname{senh} \xi \, x_0 + \cosh \xi \, x_1 \\ x_2' = x_2 \quad , \quad x_3' = x_3 \end{cases} \tag{21}$$

Sugerem
$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \xi & -\operatorname{senh} \xi & 0 & 0 \\ -\operatorname{senh} \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} ;$$




rotações no espaço hiperbólico :
$$x_\mu' = \Sigma_{\nu=0}^{3} (\Lambda_{\nu\mu}) x_\nu ,$$
onde $\Lambda$ é a matriz da transf. de Lorentz

B) Quadrivetores : vetores quadridimensionais que representam um evento $(A_0, A_1, A_2, A_3) = (A_0, \vec{A})$ e que se transformam por Lorentz: (temporal ↵ ↳ espaciais)

$$\begin{cases} A_0' = \gamma (A_0 - \vec{\beta} \cdot \vec{A}) \\ A_\parallel' = \gamma (A_\parallel - \beta A_0) \\ \vec{A}_\perp' = \vec{A}_\perp \end{cases} \tag{22}$$

de $c^2 t'^2 - |\vec{x}'|^2 = c^2 t^2 - |\vec{x}|^2$, vem : $A_0'^2 - |\vec{A}'|^2 = A_0^2 - |\vec{A}|^2$ (23)

com $(A_0', \vec{A}')$ no ref. $K'$ e $(A_0, \vec{A})$ no ref. $K$

para dois quadrivetores A e B o "produto escalar" é invariante:

$$A'\cdot B' = A_0'B_0' - \vec{A}'\cdot\vec{B}' = A_0B_0 - \vec{A}\cdot\vec{B} = A\cdot B \quad , \text{ pois} \qquad (24)$$

$$A_0'B_0' - \vec{A}'\cdot\vec{B}' = A_0'B_0' - (\vec{A}_{\parallel}' + \vec{A}_{\perp}')\cdot(\vec{B}_{\parallel}' + \vec{B}_{\perp}') = A_0'B_0' - A_{\parallel}'B_{\parallel}' - A_{\perp}'B_{\perp}' =$$

$$= \gamma(A_0 - \vec{\beta}\cdot\vec{A})\gamma(B_0 - \vec{\beta}\cdot\vec{B}) - \gamma(A_{\parallel} - \beta A_0)\gamma(B_{\parallel} - \beta B_0) - A_{\perp}B_{\perp} =$$

$$= A_0B_0\cancelto{1}{(\gamma^2 - \gamma^2\beta^2)} - \gamma^2 A_0\cancelto{0}{(\vec{\beta}\cdot\vec{B} - \beta B_{\parallel})} - \gamma^2 B_0\cancelto{0}{(\vec{\beta}\cdot\vec{A} - \beta A_{\parallel})} +$$

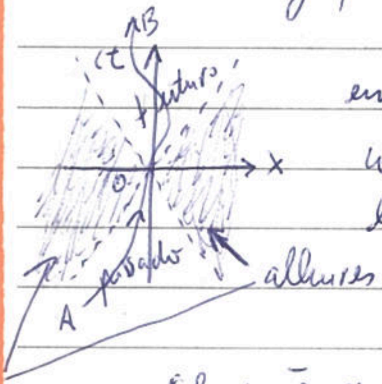
$$+ \gamma^2[(\vec{\beta}\cdot\vec{A})(\vec{\beta}\cdot\vec{B}) - A_{\parallel}B_{\parallel}] - A_{\perp}B_{\perp} =$$

$$= A_0B_0 + \gamma^2(1 - 1/\beta^2)(\vec{\beta}\cdot\vec{A})(\vec{\beta}\cdot\vec{B}) - A_{\perp}B_{\perp} =$$

$$= A_0B_0 - \frac{(\vec{\beta}\cdot\vec{A})(\vec{\beta}\cdot\vec{B})}{\beta^2} - A_{\perp}B_{\perp} = A_0B_0 - A_{\parallel}B_{\parallel} - A_{\perp}B_{\perp} =$$

$$= A_0B_0 - \vec{A}\cdot\vec{B}$$

## C) Cone de luz, tempo próprio e dilatação temporal




em $t=0$, partícula está na origem

cone de luz: superfície em que $x^2+y^2+z^2 = c^2t^2$

linha de mundo: $\widehat{AOB}$ , $\widehat{OB}$ para $t>0$ (futuro)

$\widehat{AO}$ para $t<0$ (passado)

separação ou intervalo invariante entre dois eventos $P_1(t_1,\vec{x}_1)$ e $P_2(t_2,\vec{x}_2)$:

$$s_{12}^2 = c^2(t_1-t_2)^2 - |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2 \qquad (25)$$

Há 3 possibilidades: 1) $s_{12}^2 > 0$ , intervalo tipo tempo

2) $s_{12}^2 < 0$ , intervalo tipo espaço

3) $s_{12}^2 = 0$ , intervalo tipo luz

1) intervalo tipo tempo: $s_{12}^2 = c^2(t_1-t_2)^2 - |\vec{x}_1-\vec{x}_2|^2 > 0$

existe um ref. K', tal que $\vec{x}_1' = \vec{x}_2' \Rightarrow s_{12}^2 = c^2(t_1'-t_2')^2 > 0$

os eventos ocorrem no mesmo local (em K') mas separados no tempo

2) intervalo tipo espaço: $s_{12}^2 = c^2(t_1-t_2)^2 - |\vec{x}_1-\vec{x}_2|^2 < 0$

existe um ref. K'', tal que $t_1'' = t_2'' \Rightarrow s_{12}^2 = -|\vec{x}_1'' - \vec{x}_2''|^2 < 0$

os eventos são simultâneos (em K'') mas separados no espaço

3) intervalo tipo luz: $s_{12}^2 = 0$

os eventos são conectados por um pulso de luz

tempo próprio: seja uma partícula com velocidade $\vec{u}(t)$ no ref. K:
$d\vec{x} = \vec{u}\,dt$, de (25) vem:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - |d\vec{x}|^2 = c^2 dt^2 (1-\beta^2) \quad , \text{ onde } \beta = u/c.$$

no ref. K' (próprio da partícula):

$$\vec{u}'(t') = 0 \quad , \quad d\vec{x}' = 0 \quad , \quad dt' \equiv d\tau$$

e o intervalo invariante é: $ds = c\,d\tau \Rightarrow c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 (1-\beta^2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad d\tau = dt\sqrt{1-\beta^2(t)} = \frac{dt}{\gamma(t)} \qquad (26)$$

dilatação temporal

$\tau$ = tempo próprio da partícula

como $$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow t_2 - t_1 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\beta^2(\tau)}} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma(\tau)\, d\tau \qquad (27)$$

Fermilab: $\pi^{\pm}$ com 200 GeV percorrem 300 m com < 3% de decaimentos
como tempo de vida é $\tau_0 = 2{,}56 \cdot 10^{-8}\,s \Rightarrow c\tau_0 = 7{,}7\,m$
$e^{-300/7{,}7} \simeq 10^{-17}$ sobreviveriam sem a dilatação temporal
mas $E_\pi = 200\,GeV \Rightarrow \gamma = 1400 \Rightarrow \gamma c \tau_0 = 11\,Km$

4 aviões com relógios atômicos de Cs (2 voltas ao mundo cada) comparados com relógio atômico estacionário (US Naval Observatory):

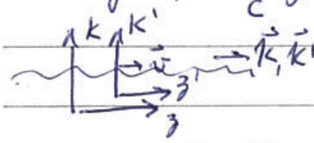
diferenças $\begin{cases} -59 \pm 10,\ -40 \pm 23 \text{ ns} & \text{para leste} \\ \underbrace{273 \pm 7}_{\text{obs.}},\ \underbrace{275 \pm 21}_{\text{calc.}} \text{ ns} & \text{para oeste} \end{cases}$

## D) Efeito Doppler relativístico

A fase de uma onda é invariante (contagem de cristas, independente do referencial):

$$\phi = \omega t - \vec{k}\cdot\vec{x} = \omega' t' - \vec{k}'\cdot\vec{x}' \qquad (28)$$
$$c\phi = c\omega t - c\vec{k}\cdot\vec{x} = c\omega' t' - c\vec{k}'\cdot\vec{x}'$$

seja $\vec{\beta} = \frac{v}{c}\hat{z}$ e os vetores de onda $\vec{k} = k\hat{z}$, $\vec{k}' = k'\hat{z}'$




$c = \frac{\omega}{k}$

$$c\phi = \omega\, ct - ck\,z = \quad \leftarrow \text{transf. inversa de Lorentz}$$
$$= \omega\gamma(ct' + \beta z') - ck\gamma(z' + \beta ct') =$$
$$= \underbrace{\gamma(\omega - \beta c k)}_{\omega'} ct' - \underbrace{\gamma(ck - \beta\omega)}_{ck'} z' = \omega' ct' - ck' z'$$

isto sugere que $\begin{cases} \omega' = \gamma(\omega - \beta c k) \\ c k' = \gamma(c k - \beta \omega) \end{cases}$ ou $\begin{cases} \omega' = \gamma(\omega - \beta c k_z) \\ c k_z' = \gamma(c k_z - \beta \omega) \end{cases}$

com os eixos perpendiculares $\begin{cases} c k_x' = c k_x \\ c k_y' = c k_y \end{cases}$

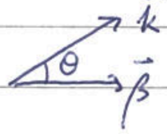
definindo: $\omega \equiv c k_0$ , $\omega' = c k_0'$ temos o quadrivetor $(c k_0, c\vec{k})$ frequência-número de onda angulares de módulo nulo e invariante : $\begin{cases} c^2 k_0^2 - c^2 k^2 = \cancel{c^2} \omega^2 / \cancel{c^2} - c^2 k^2 = \omega^2 - \omega^2 = 0 \\ c^2 k_0'^2 - c^2 k'^2 = \cancel{c^2} \omega'^2 / \cancel{c^2} - c^2 k'^2 = \omega'^2 - \omega'^2 = 0 \end{cases}$

def. : $K \equiv (c k_0, c\vec{k})$ , $X \equiv (ct, \vec{x})$ o produto $K \cdot X = \Phi$ representa a fase invariante, cujo módulo quadrado é:

$$\Phi^2 = (K \cdot X)^2 = |(c k_0 ct , c\vec{k} \cdot \vec{x})|^2 = |(\omega ct, c\vec{k} \cdot \vec{x})|^2 =$$
$$= \omega^2 c^2 t^2 - c^2 (\vec{k} \cdot \vec{x})^2 = (\omega ct + c\vec{k} \cdot \vec{x})(\omega ct - c\vec{k} \cdot \vec{x}) =$$
$$= c^2 (\omega t + \vec{k} \cdot \vec{x})(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) = c^2 \phi^+ \phi^- ,$$

onde $\phi^+$ e $\phi^-$ são as fases de 2 ondas progressivas: com $v_f < 0$ e $v_f > 0$, respect.

no caso



, temos : $k_z = k_{\parallel} = k \cos\theta$

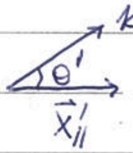
$k_x , k_y = \vec{k}_{\perp}$

$$\Rightarrow \omega' = \gamma(\omega - \beta c k \cos\theta) \Rightarrow \cancel{c} k_0' = \gamma(\cancel{c} k_0 - \cancel{c} \vec{\beta} \cdot \vec{k}) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} k_0' = \gamma(k_0 - \vec{\beta} \cdot \vec{k}) \\ k_{\parallel}' = \gamma(k_{\parallel} - \beta k_0) \\ \vec{k}_{\perp}' = \vec{k}_{\perp} \end{cases} \qquad (29)$$

de $\omega' = \gamma(\omega - \beta c (\omega / c) \cos\theta) \Rightarrow \omega' = \gamma \omega (1 - \beta \cos\theta)$

como no ref. $K'$ :



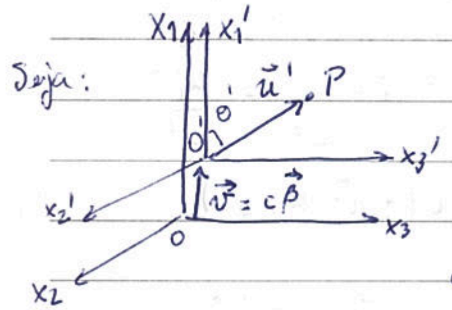
$$\mathrm{tg}\,\theta' = \frac{k_y'}{k_z'} = \frac{k_y}{\gamma(k_z - \beta k_0)} = \frac{k \,\mathrm{sen}\,\theta}{\gamma(\cancel{k}\cos\theta - \beta\, \omega/c)} \Rightarrow$$

$$\mathrm{tg}\,\theta' = \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\gamma(\cos\theta - \beta)} , \qquad \omega' = \gamma \omega (1 - \beta \cos\theta) \qquad (30)$$

(efeito Doppler transversal)

## 4) Adição de velocidades, quadrivelocidade

Seja:




$$\begin{cases} dx_0 = \gamma_v\,(dx_0' + \beta\, dx_1') \\ dx_1 = \gamma_v\,(dx_1' + \beta\, dx_0') \\ dx_2 = dx_2', \quad dx_3 = dx_3' \end{cases},$$

onde $\gamma_v = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, para diferenciar de $\gamma_u = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ e $\gamma_{u'} = (1 - u'^2/c^2)^{-1/2}$

$$u_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_1}{dx_0/c} = \frac{\gamma_v(dx_1' + \beta dx_0')}{\gamma_v(dx_0' + \beta dx_1')/c} = \frac{u_1' + v}{1 + v u_1'/c^2}, \quad u_2 = \frac{dx_2}{dt} = \frac{u_2'}{\gamma_v(1 + v u_1'/c^2)}, \quad u_3 = \frac{u_3'}{\gamma_v(1 + \frac{v u_1'}{c^2})}$$

$$u_\parallel = \frac{u_\parallel' + v}{1 + \vec{v}\cdot\vec{u}'/c^2}, \quad \vec{u}_\perp = \frac{\vec{u}_\perp'}{\gamma_v(1 + \vec{v}\cdot\vec{u}'/c^2)} \qquad (31)$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{u_\perp}{u_\parallel} = \frac{u_\perp'}{\gamma_v \cancel{(1+\vec{v}\cdot\vec{u}'/c^2)}} \cdot \frac{\cancel{(1+\vec{v}\cdot\vec{u}'/c^2)}}{u_\parallel' + v} = \frac{u' \operatorname{sen}\theta'}{\gamma_v(u'\cos\theta' + v)} \qquad (32')$$

$$u = \sqrt{u_\parallel^2 + u_\perp^2} = \sqrt{\frac{(u_\parallel' + v)^2}{(1+\vec{v}\cdot\vec{u}'/c^2)^2} + \frac{(u_\perp')^2}{\gamma_v^2(1+\vec{v}\cdot\vec{u}'/c^2)^2}} = \frac{\sqrt{u_\parallel'^2 + 2u_\parallel' v + v^2 + u_\perp'^2/\gamma_v^2}}{(1+\vec{v}\cdot\vec{u}'/c^2)} =$$

$$= \frac{\sqrt{(u'\cos\theta')^2 + 2u'v\cos\theta + v^2 + (u'\operatorname{sen}\theta')^2(1 - v^2/c^2)}}{1 + u'v\cos\theta'/c^2} \Rightarrow$$

$$u = \frac{\sqrt{u'^2 + v^2 + 2u'v\cos\theta - (u'v\operatorname{sen}\theta'/c)^2}}{1 + u'v\cos\theta'/c^2} \qquad (32'')$$

e analogamente para $u'$, trocando $\vec{v} \to -\vec{v}$

para $v \ll c$, (31) e (32) reduzem-se às transf. Galileu: $\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v}$

no caso $\vec{u}, \vec{u}' \parallel \vec{v}$: $\quad u = \dfrac{u' + v}{1 + v u'/c^2} \qquad (33)$

se $u' = c \Rightarrow u = c \Rightarrow$ não existem velocidades maiores que a da luz.

de (31) vemos que $\vec{u}$ não se transforma como um quadrivetor

Note que: $\gamma_u = (1 - u^2/c^2)^{-1/2} = [1 - (u_\parallel^2 + u_\perp^2)/c^2]^{-1/2} =$

$$= \left[1 - \frac{(u_\parallel' + v)^2}{(1+\vec{v}\cdot\vec{u}'/c^2)^2 \cdot c^2} - \frac{u_\perp'^2}{\gamma_v^2(1+\vec{v}\cdot\vec{u}'/c^2)^2 \cdot c^2}\right]^{-1/2} =$$

$$= \left[\gamma_v^2(1+\vec{v}\cdot\vec{u}'/c^2)^2 - \gamma_v^2\frac{(u_\parallel' + v)^2}{c^2} - \frac{u_\perp'^2}{c^2}\right]^{-1/2} \cdot \gamma_v \cdot (1 + \vec{v}\cdot\vec{u}'/c^2)$$

e desenvolvendo os termos entre colchetes:

$$\gamma_v^2 + \cancel{2\gamma_v^2 u'_{\parallel} v/c^2} + \gamma_v^2 (v u'_{\parallel}/c^2)^2 - \gamma_v^2 u'^2_{\parallel}/c^2 - \cancel{2\gamma_v^2 u'_{\parallel} v/c^2} - \gamma_v^2 v^2/c^2 - u'^2_{\perp}/c^2 =$$

$$= \cancel{\gamma_v^2 (1 - v^2/c^2)}^{\,1} + (\gamma_v^2 u'^2_{\parallel}/c^2)\underbrace{(v^2/c^2 - 1)}_{-1/\gamma_v^2} - u'^2_{\perp}/c^2 = 1 - \frac{u'^2_{\parallel}}{c^2} - \frac{u'^2_{\perp}}{c^2} =$$

$$= 1 - u'^2/c^2 = \gamma_{u'} \quad \Longrightarrow \qquad \gamma_u = \gamma_{u'}\gamma_v (1 + \vec{v}\cdot\vec{u}'/c^2) \qquad (34)$$

substituindo em (31):

$$\gamma_u u_{\parallel} = \gamma_v (\gamma_{u'} u'_{\parallel} + v\gamma_{u'}) \ , \quad \gamma_u \vec{u}_{\perp} = \gamma_{u'}\vec{u}'_{\perp} \qquad (35)$$

que se transforma sob transf. de Lorentz, definindo o quadrivetor $(\gamma_u c, \gamma_u \vec{u})$ velocidade $(U_0, \vec{U})$, que é a derivada do quadrivetor espaço-tempo com relação ao tempo próprio: $U \equiv \dfrac{dX}{d\tau}$

$$\Rightarrow U_0 \equiv \frac{dx_0}{d\tau} = \frac{dx_0}{dt}\frac{dt}{d\tau} = c\frac{\cancel{dt}}{\cancel{dt}}\gamma_u \frac{\cancel{d\tau}}{\cancel{d\tau}} = \gamma_u c$$

$$\vec{U} \equiv \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \frac{d\vec{x}}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \vec{u}\gamma_u \frac{\cancel{d\tau}}{\cancel{d\tau}} = \gamma_u \vec{u} \qquad (36)$$

## 5) Momento e energia relativísticos de uma partícula

Para baixas velocidades $(v \ll c)$: $\vec{p} = m\vec{u}$

$$E = E(0) + \tfrac{1}{2}mu^2 \ , \qquad (37)$$

onde $m$ é a massa, $\vec{u}$ a velocidade e $E(0)$ a energia de repouso da partícula (pode ser desconsiderada se $v \ll c$).

Generalização possível (do 1º postulado): $\vec{p} = \mathcal{M}(u)\,\vec{u}$

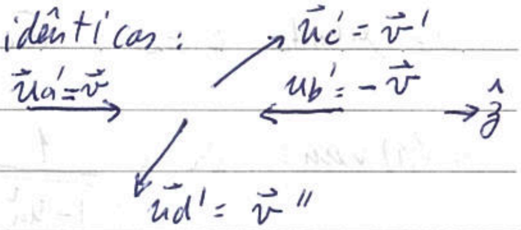
$$E = \mathcal{E}(u) \ , \qquad (38)$$

com valores limites: $\mathcal{M}(0) = m$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u^2}(0) = \frac{m}{2} \qquad (39)$$

e com $\mathcal{M}(u)$ e $\mathcal{E}(u)$ funções monotônicas e bem comportadas de seus argumentos.

Seja a colisão elástica de 2 partículas idênticas:
no ref. $K'$ (centro de massa):




as leis de conserv. ($\vec{p}$ e $E$) são:

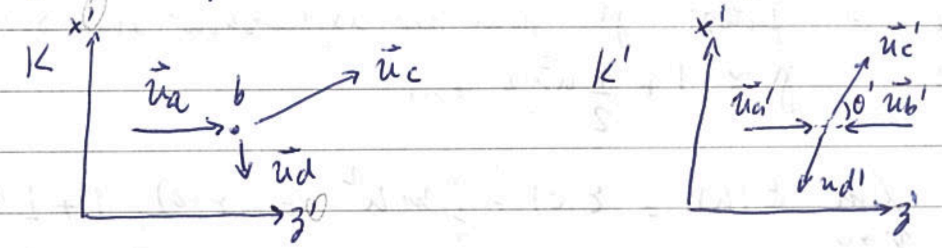
$$\vec{p}_a' + \vec{p}_b' = \vec{p}_c' + \vec{p}_d' \Rightarrow \mathcal{M}(v)\vec{v} - \mathcal{M}(v)\vec{v} = \mathcal{M}(v')\vec{v}' + \mathcal{M}(v'')\vec{v}''$$

$$E_a' + E_b' = E_c' + E_d' \Rightarrow \mathcal{E}(v) + \mathcal{E}(v) = \mathcal{E}(v') + \mathcal{E}(v'') \quad (40)$$

onde para partículas idênticas: $\mathcal{E}(v') = \mathcal{E}(v'') \Rightarrow v' = v'' = v$
para funções monotônicas. A primeira equação fica: $(2\mathcal{E}(v) = 2\mathcal{E}(v'))$

$$0 = \mathcal{M}(v')\vec{v}' + \mathcal{M}(v')\vec{v}'' \Rightarrow \vec{v}' = -\vec{v}''$$

Agora, seja $K$ com veloc. $-\vec{v} = -v\hat{z}$ com relação a $K'$:




de (31) vem: $$\vec{u}_a = \frac{2\vec{v}}{1+v^2/c^2} = \frac{2c\vec{\beta}}{1+\beta^2}, \text{ onde } \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} \quad (41)$$

e as componentes:

$$(\vec{u}_c)_x = \frac{c\beta \operatorname{sen}\theta'}{\gamma(1+\beta^2\cos\theta')}, \quad (\vec{u}_c)_z = \frac{c\beta(1+\cos\theta')}{1+\beta^2\cos\theta'} \quad (42)$$

$$(\vec{u}_d)_x = \frac{c\beta \operatorname{sen}\theta'}{\gamma(1-\beta^2\cos\theta')}, \quad (\vec{u}_d)_z = \frac{c\beta(1-\cos\theta')}{1-\beta^2\cos\theta'},$$

onde $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$

e no ref. $K$ temos:

$$(\text{conserv. } \vec{p}) \quad \mathcal{M}(u_a)\vec{u}_a + \mathcal{M}(u_b)\vec{u}_b = \mathcal{M}(u_c)\vec{u}_c + \mathcal{M}(u_d)\vec{u}_d \quad (43)$$

$$(\text{conserv. } E) \quad \mathcal{E}(u_a) + \mathcal{E}(u_b) = \mathcal{E}(u_c) + \mathcal{E}(u_d)$$

em que somente $u_b = 0$

Seja uma colisão de raspão $(\theta' \to 0)$, então $\vec{u}_c \simeq \vec{u}_a$ e $\vec{u}_d \to 0$

da conserv. $p_x$: $$0 = \mathcal{M}(u_c)\frac{c\beta\operatorname{sen}\theta'}{\gamma(1+\beta^2\cos\theta')} - \mathcal{M}(u_d)\frac{c\beta\operatorname{sen}\theta'}{\gamma(1-\beta^2\cos\theta')} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{M}(u_c) = \left(\frac{1+\beta^2\cos\theta'}{1-\beta^2\cos\theta'}\right)\mathcal{M}(u_d)$$

válida para todo $\theta'$ e em particular para $\theta' = 0^+$

No limite $\theta' = 0$ : $\vec{u}_c = \vec{u}_a$ e $\vec{u}_d = 0 \Rightarrow \mathcal{M}(u_a) = \left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right) \mathcal{M}(0)$ (44)

de (41) vem: $$\gamma_a = \frac{1}{\sqrt{1 - u_a^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(2c\beta)^2}{(1+\beta^2)^2 c^2}}} = \frac{1+\beta^2}{\sqrt{(1+\beta^2)^2 - 4\beta^2}} = \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \quad (45)$$

então : $\mathcal{M}(u_a) = \gamma_a \mathcal{M}(0) = \gamma_a \cdot m \Rightarrow$
$$\vec{p} = \gamma m \vec{u} = \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (46)$$

Para pequenos $\theta'$, de (43) temos
$$\mathcal{E}(u_a) + \mathcal{E}(0) = \mathcal{E}(u_c) + \mathcal{E}(u_d) \quad (47)$$
lembrando que o fator $\gamma$ pode ser expandido em série binomial : $\gamma \simeq 1 + \frac{1}{2} u^2/c^2 + \dots$

e que : $$\lim_{v \to 0} \mathcal{E}(u) = \mathcal{E}(0) + \frac{1}{2} m u^2 = \mathcal{E}(0)\left[1 + \frac{1}{2} \frac{mu^2}{\mathcal{E}(0)}\right]$$
$$= \mathcal{E}(0)\, \gamma(u) \;, \text{ se } \mathcal{E}(0) = mc^2 \quad (50)$$
a energia cinética é $T(u) = \mathcal{E}(u) - \mathcal{E}(0) = mc^2(\gamma(u) - 1)$
$$= mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - 1\right] \quad (49)$$
mas é também : $$T(u) = \int F dx = \int \frac{d}{dt}(\gamma m u)\, dx =$$
$$= \int m\, d(\gamma u) \frac{dx}{dt} = m \int_0^u u\, d(\gamma u)$$
$$\frac{d(\gamma u)}{du} = \frac{d}{du}\left[(1 - u^2/c^2)^{-1/2} u\right] = \frac{1}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} = \gamma^3$$
então : $$T(u) = \mathcal{E}(u) - \mathcal{E}(0) = \int_{\mathcal{E}(0)}^{\mathcal{E}(u)} d\mathcal{E} = m \int_0^u \gamma^3 u\, du = \frac{m}{2} \int_0^u 2u\,du\, \gamma^3$$
$$= \frac{m}{2} \int_0^{u^2} \gamma^3 du^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{du^2} = \frac{m}{2}\gamma^3 = \frac{m}{2(1-u^2/c^2)^{3/2}}$$

$z = 1-u^2/c^2$

integrando: $\int_0^u \frac{u\,du}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} = \frac{c^2}{2}\int_1^{1-u^2/c^2} \frac{-dz}{z^{3/2}} = \frac{c^2}{\sqrt{z}}\Big|_1^{1-u^2/c^2} = c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - 1\right]$

portanto: $\mathcal{E}(u) - \mathcal{E}(0) = \frac{mc^2}{(1-u^2/c^2)^{1/2}} - mc^2$ (49)

que juntamente com $\mathcal{E}(0) = mc^2$, vem: (50)

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \quad (51)$$

quadrivetor momento-energia: $P \equiv mU = (m\gamma c, m\gamma\vec{u})$
$= (E/c, \vec{p})$

Suas componentes são conservadas numa colisão:

cons. energia: $\Sigma_a (p_0)_a^i - \Sigma_b (p_0)_b^f = \Delta_0$ (52)

cons. $\vec{p}$: $\Sigma_a (\vec{p}_a)^i - \Sigma_b (\vec{p}_b)^f = \vec{\Delta}_0 = \vec{0}$

$c\Delta_0 = \Sigma_a [m_a c^2 - \mathcal{E}_a(0)]^i - \Sigma_b [m_b c^2 - \mathcal{E}_b(0)]^f$

o módulo quadrado invariante é: $P^2 = m^2\gamma^2(c^2 - u^2)$
$= m^2\gamma^2 c^2(1-u^2/c^2) = (mc)^2 \Rightarrow$ (54)

$$\Rightarrow E^2/c^2 - p^2 = m^2c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \quad (55)$$

e ainda: $\vec{p} = m\gamma\vec{u} = \frac{E}{c^2}\vec{u} \Rightarrow \vec{u} = \frac{c^2\vec{p}}{E}$ (53)

Seja uma partícula em K com momento $\vec{p} = \vec{p}_\perp + p_\parallel \hat{z}$
existe um ref. K' em que $p_\parallel' = 0$, então

$\vec{p}' = \vec{p}_\perp' = \vec{p}_\perp$, $E'/c = \sqrt{p_\perp^2 + m^2c^2} = \Omega$ (56)

e seja $\varsigma$ a rapidez da transf. de Lorentz ($K \leftrightarrow K'$)

inv. dl(27) em K: $\vec{p}_\perp$, $p_\parallel = \Omega \sinh\varsigma$; $E/c = \Omega\cosh\varsigma$ (57)

$\Omega/c$ é chamado de <u>massa transversal</u> ($\propto p_\perp$)

Se em K' $\vec{p}_\perp' = 0 \Rightarrow \vec{p} = 0$ (repouso) e:

$p = p_\parallel = mc\sinh\varsigma$, $E = mc^2\cosh\varsigma$ (58)

## 6) Propriedades matemáticas do espaço-tempo

Nas mecânicas clássica e quântica, rotações tridimensionais podem ser discutidas como o grupo de transformações de coordenadas que mantêm a norma do vetor $\vec{x}$ invariante. Na TRE, as transformações de Lorentz das coordenadas quadridimensionais $(x_0, \vec{x})$ seguem a invariância de:

$$s^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \tag{59}$$

⇒ grupo das transformações que mantêm $s^2$ invariante: grupo de Lorentz homogêneo.

O grupo de transf. que mantêm invariante

$$s^2(x,y) = (x_0 - y_0)^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2 - (x_3 - y_3)^2$$

é o grupo de Lorentz inomogêneo ou grupo de Poincaré.

As equações matemáticas expressando as leis da natureza devem ser covariantes, isto é, invariantes na forma, sob transf. do grupo de Lorentz.

Elementos de análise tensorial num espaço vetorial não-euclidiano: espaço-tempo (contínuo): def. no espaço quadridimensional com coordenadas $x^0, x^1, x^2, x^3$. As coordenadas transformadas $x'^0, x'^1, x'^2, x'^3$ são obtidas por uma regra bem definida:

$$x'^\alpha = x'^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3) \tag{60}$$
$$(\alpha = 0, 1, 2, 3)$$

Tensores de classe $k$ associados ao ponto no espaço-tempo $x$ são definidos por suas propriedades sob as transf.: $x \to x'$

Um escalar (tensor de $k=0$) é uma simples quantidade invariante: $s^2$ é um escalar de Lorentz

Vetores (tensores de K=1) : com 4 componentes
$\begin{cases} \text{contravariantes}: & A^\alpha = (A^0, A^1, A^2, A^3) \\ \text{covariantes}: & B_\alpha = (B_0, B_1, B_2, B_3) \end{cases}$

os vetores contravariantes se transformam com:

$$A'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta \qquad (61)$$

(soma implícita nos índices repetidos)

$$= \sum_{\beta=0}^{3} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta$$

e os vetores covariantes se transformam com:

$$B'_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} B_\beta \qquad (62)$$

(convenção da soma)

e as derivadas parciais feitas na transf. inversa de (60).

Tensores de classe 2 (K=2) consistem de 16 quantidades (componentes)

- contravariante ($F^{\alpha\beta}$) se transforma com:

$$F'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\delta} F^{\gamma\delta} \qquad (63)$$

- covariante ($G_{\alpha\beta}$) se transforma com:

$$G'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\beta} G_{\gamma\delta} \qquad (64)$$

- misto ($H^\alpha{}_\beta$) se transforma com:

$$H'^\alpha{}_\beta = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\beta} H^\gamma{}_\delta \qquad (65)$$

O produto escalar (interno) de 2 vetores é definido:

$$B \cdot A \equiv B_\alpha A^\alpha \qquad (66)$$

contração de índices

que é invariante:

$$B' \cdot A' = B'_\alpha A'^\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\cancel{\partial x'^\alpha}} \frac{\cancel{\partial x'^\alpha}}{\partial x^\gamma} B_\beta A^\gamma =$$

$$= \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\gamma} B_\beta A^\gamma = \delta^\beta_\gamma B_\beta A^\gamma = B_\beta A^\beta = B \cdot A$$

Na forma diferencial, o intervalo infinitesimal que define a norma do espaço é: $ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^4$ (67)

A norma ou métrica é um caso especial do elemento diferencial de comprimento: $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$, (68)

onde $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ é o tensor de métrica.

Para o espaço-tempo plano da TRE, $g$ é diagonal e:

$$g_{00} = 1 \quad , \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 \qquad (69)$$

O tensor de métrica contravariante é cofator normalizado de $g_{\alpha\beta}$, para o espaço-tempo plano:

$$g^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \qquad (70)$$

note que a contração:

$$g_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta} = \delta_\alpha^{\ \beta} \qquad (71)$$

Agora (66) e (68) sugerem: $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = dx_\alpha dx^\alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad x_\alpha = g_{\alpha\beta} x^\beta \qquad (72)$$

e a inversa

$$x^\alpha = g^{\alpha\beta} x_\beta \qquad (73)$$

estendendo para $k \geq 2$:

$$F^{\cdot\cdot\alpha\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot} = g^{\alpha\beta} F^{\cdot\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\beta\cdot\cdot}$$

$$G^{\cdot\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\alpha} = g_{\alpha\beta} G^{\cdot\cdot\cdot\beta} \qquad (74)$$

e de (69) vemos:

$$A^\alpha = (A^0, \vec{A}) \quad , \quad A_\alpha = (A^0, -\vec{A}) \qquad (75)$$

e o produto escalar é:

$$B \cdot A \equiv B_\alpha A^\alpha = B_0 A^0 - \vec{B} \cdot \vec{A}$$

consideremos os operadores:

$$\frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x^\beta} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} \frac{\partial}{\partial x'^\alpha}$$

de (62) e (61): $B'_\alpha = \dfrac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} B_\beta \quad , \quad A'^\alpha = \dfrac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta$ vem:

$$\partial^\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\vec{\nabla}\right)$$

$$\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \vec{\nabla}\right) \qquad (76)$$

A quadridivergência do quadrivetor A é o invariante

$$\partial^\alpha A_\alpha = \partial_\alpha A^\alpha = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} \qquad (77)$$

~ eq. da continuidade ou condição do calibre de Lorentz.

O laplaciano é a contração:

$$\Box \equiv \partial_\alpha \partial^\alpha = \frac{\partial^2}{\partial x^{0\,2}} - \nabla^2 \qquad (78)$$

que é o operador para a eq. de onda no vácuo: $\Box\psi = 0$

7) Representação matricial das transformações de Lorentz; geradores infinitesimais

- grupo de Lorentz de transformações:

Componentes do quadrivetor contravariante na forma de um vetor coluna:

$$x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \qquad (79)$$

Um produto escalar matricial de 2 quadrivetores é definido por:

$$(a, b) \equiv \tilde{a}\, b \qquad (80)$$

O tensor de métrica $g_{\alpha\beta}$ é representado pela matriz 4x4:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (81)$$

com $g^2 = I$, a matriz identidade 4x4.

O quadrivetor de coordenadas covariante é:

$$g x = \begin{pmatrix} x^0 \\ -x^1 \\ -x^2 \\ -x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad (82)$$

Nesta métrica, o produto escalar de 2 quadrivetores é definido por:

$$a \cdot b = (a, g b) = (g a, b) = \tilde{a} g b \qquad (83)$$

Procuramos um grupo de transformações lineares nas coordenadas

$$x' = A x \qquad (84)$$

que mantêm invariante a norma:

$$x' \cdot x' = (x', g x') = \tilde{x}' g x' = \tilde{x} g x = (x, g x) = x \cdot x \qquad (85)$$

Subst. (84) vem:

$$x' \cdot x' = (A x', g A x) = \tilde{x}' \tilde{A} g A x = \tilde{x} g x \Rightarrow \tilde{A} g A = g \qquad (86)$$

Agora,

$$\det(\tilde{A} g A) = \det g \, (\det A)^2 = \det g \quad \text{por (86)}$$

como $\det g = -1 \neq 0 \Rightarrow \det A = \pm 1$.

Há 2 classes de transformações:

1- transformações de Lorentz próprias: $\det A = +1$

2- transformações de Lorentz impróprias: $\det A = \pm 1$

As transf. próprias contêm a identidade $I$, portanto, formam um grupo.

As transf. impróprias podem ter os 2 sinais, por exemplo:

inversão espacial: $A = g \Rightarrow \det A = -1$

inversão espacial e temporal: $A = -I \Rightarrow \det A = +1$

Como $A$ e $g$ são matrizes $4 \times 4$, a eq. (86) representa $4^2 = 16$ equações, mas há 10 equações linearmente independentes $\Rightarrow$ 6 parâmetros livres.

O grupo de Lorentz é um grupo de 6 parâmetros:

a) 3 parâmetros para especificar a orientação relativa dos eixos de coordenadas (ângulos de Euler)

b) 3 parâmetros para especificar a velocidade relativa de 2 sistemas inerciais (componentes de $\vec{\beta}$)

Para cada 6 parâmetros $A$ dando uma transf. de Lorentz própria existe uma imprópria representada por $-A$.

Consideramos somente as transformações próprias de agora em diante.

Vamos fazer um ansatz : $A = e^{L}$, (87)

onde $L$ é uma matriz $4\times 4$.

$$e^{L} = \Sigma_k \frac{L^k}{k!} = I + L + \frac{1}{2!} L^2 + \dots$$

Seja uma transformação de similaridade (que não altera o determinante), tal que : $L = SDS^{-1}$, onde $D$ é diagonal

$\Rightarrow \det L = \det(SDS^{-1}) = \det S \cdot \det D \cdot \det S^{-1} = \det D$,

ou seja, é possível diagonalizar $L$.

Agora, $D$ possui seus autovalores na diagonal : $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$

então

$$e^{D} = \Sigma_k \frac{D^k}{k!} = I + D + \frac{1}{2!} D^2 + \dots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \lambda_2^2 & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} + \dots$$

$$= \begin{bmatrix} 1+\lambda_1+\frac{1}{2}\lambda_1^2+\dots & & 0 \\ & 1+\lambda_2+\frac{1}{2}\lambda_2^2+\dots & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & e^{\lambda_2} & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det e^{D} = e^{\lambda_1} \cdot e^{\lambda_2} \cdot \dots = e^{\lambda_1+\lambda_2+\dots} = e^{\operatorname{Tr} D}$$

Então : $\det A = \det e^{L} = e^{\operatorname{Tr} L} = \pm 1$

que para $L$ real $\det A = -1$ está excluido e se $\operatorname{Tr} L = 0 \Rightarrow \det A = +1$, que é requerida para transf. de Lorentz próprias

$\therefore L$ é real e $\operatorname{Tr} L = 0$

Agora, de (86) : $g(\tilde{A} g A) A^{-1} = g g A^{-1} \Rightarrow g \tilde{A} g = A^{-1}$ (88)

e da definição (87), vem:

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{A} = e^{\tilde{L}}, \quad A^{-1} = e^{-L} \\ g\tilde{A}g = e^{g\tilde{L}g} = e^{g^2\tilde{L}} = e^{I\tilde{L}} = e^{\tilde{L}} \end{array}\right\} \quad g\tilde{L}g = -L \quad (89')$$

daí :

$$g(g\tilde{L}g) = -gL = g^2\tilde{L}g = I\tilde{L}g = \tilde{L}g = \widetilde{gL} \Rightarrow \widetilde{gL} = -gL \quad (89'')$$

então a matriz $gL$ deve ser sem traço e antissimétrica.

e $L$ deve ter a forma geral: $$L = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ L_{01} & 0 & L_{12} & L_{13} \\ L_{02} & -L_{12} & 0 & L_{23} \\ L_{03} & -L_{13} & -L_{23} & 0 \end{pmatrix}}_{\text{transf. Lorentz de um ref. } K \text{ em outro } K'} \qquad (90)$$

rotações antissimétricas em $\mathbb{R}^3$ num ref. inercial fixo

Sejam as 6 matrizes fundamentais geradoras do grupo:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & & & \\ 0 & & O & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & & \\ 1 & & O & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & & \\ 0 & & O & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \qquad (91)$$

As matrizes $S_i$ produzem rotações no espaço e as matrizes $K_i$ produzem boosts.
Os quadrados das matrizes geradoras são:

$$S_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & & & O \\ & 0 & & \\ & & -1 & \\ O & & & -1 \end{pmatrix}, \quad S_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & & & O \\ & -1 & & \\ & & 0 & \\ O & & & -1 \end{pmatrix}, \quad S_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & & & O \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ O & & & 0 \end{pmatrix} \qquad (92)$$

$$K_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & & & O \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ O & & & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & & & O \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ O & & & 0 \end{pmatrix}, \quad K_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & & & O \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ O & & & 1 \end{pmatrix}$$

de onde deduzimos que $\underbrace{S_i^3 = -S_i}_{\text{nº complexo puro}}$, $\underbrace{K_i^3 = K_i}_{\text{nº real puro}}$

que sugere

Então, o produto escalar de um vetor dos geradores com um vetor espacial $\hat{\varepsilon}$:

$$(\hat{\varepsilon}\cdot\vec{S})^3 = -\hat{\varepsilon}\cdot\vec{S}, \qquad (\hat{\varepsilon}\cdot\vec{K})^3 = \hat{\varepsilon}\cdot\vec{K}$$

As matrizes (91) são uma representação dos geradores infinitesimais do grupo de Lorentz. Eles satisfazem as relações de comutação:

$$[S_i, S_j] = \varepsilon_{ijk} S_k \quad \sim \text{momento angular}$$
$$[S_i, K_j] = \varepsilon_{ijk} K_k \quad \rightarrow K \text{ se transf. como 1 vetor sob rotações} \qquad (93)$$
$$\text{não comutam} \rightarrow [K_i, K_j] = -\varepsilon_{ijk} S_k$$

que especificam a estrutura algébrica do grupo de Lorentz em $SL(2,C)$ ou $O(3,1)$.

Seja agora a decomposição de $L$:

$$L = -\vec{\omega}\cdot\vec{S} - \vec{\varsigma}\cdot\vec{K} \quad \text{e} \quad A = e^{-\vec{\omega}\cdot\vec{S} - \vec{\varsigma}\cdot\vec{K}} \qquad (93)$$

as componentes de $\vec{\omega}$ e $\vec{\varsigma}$ são os 6 parâmetros da transformação

Seja o caso $\vec{\omega} = 0$ e $\vec{\varsigma} = \varsigma\hat{\varepsilon}_1 = \varsigma\hat{x} \Rightarrow L = -\varsigma K_1 = -\varsigma K_x$

como $A = e^L = I - \varsigma K_1 + \frac{1}{2!}(\varsigma K_1)^2 - \frac{1}{3!}(\varsigma K_1)^3 + \dots$

$-K_1^2 I + K_1^2 I \rightarrow$ $$= (I - K_1^2) - K_1\left(\varsigma + \frac{1}{3}\varsigma^3 + \dots\right) + K_1^2\left(I + \frac{1}{2!}\varsigma^2 + \dots\right)$$

$$= (I - K_1^2) - K_1 \operatorname{senh}\varsigma + K_1^2 \cosh\varsigma \qquad (94)$$

ou na forma matricial: $$A = \begin{pmatrix} \cosh\varsigma & -\operatorname{senh}\varsigma & 0 & 0 \\ -\operatorname{senh}\varsigma & \cosh\varsigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (95) = (21)$$

No caso $\vec{\varsigma} = 0$ e $\vec{\omega} = \omega\hat{\varepsilon}_3$, vem analogamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & \operatorname{sen}\omega & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen}\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (96)$$

$\Rightarrow$ rotações no sentido horário

Para um boost numa direção arbitrária sem rotações:

$$A = e^{-\vec{\varsigma}\cdot\vec{K}}$$

de $\beta = \tanh\varsigma \Rightarrow \varsigma = \tanh^{-1}\beta$ ou $\vec{\varsigma} = \hat{\beta}\tanh^{-1}\beta$

de onde:

$$A_{boost}(\vec{\beta}) = e^{-\hat{\beta}\cdot\vec{K}\tanh^{-1}\beta} \qquad (97)$$

deixamos como exercício mostrar que:

$$A_{boost}(\vec{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma\beta_2 & -\gamma\beta_3 \\ -\gamma\beta_1 & 1+(\gamma-1)\beta_1^2/\beta^2 & (\gamma-1)\beta_1\beta_2/\beta^2 & (\gamma-1)\beta_1\beta_3/\beta^2 \\ -\gamma\beta_2 & (\gamma-1)\beta_1\beta_2/\beta^2 & 1+(\gamma-1)\beta_2^2/\beta^2 & (\gamma-1)\beta_2\beta_3/\beta^2 \\ -\gamma\beta_3 & (\gamma-1)\beta_1\beta_3/\beta^2 & (\gamma-1)\beta_2\beta_3/\beta^2 & 1+(\gamma-1)\beta_3^2/\beta^2 \end{pmatrix} \qquad (98)$$

que é somente a forma explícita de

$$x^{0\prime} = \gamma(x^0 - \vec{\beta}\cdot\vec{x})$$

$$\vec{x}' = \vec{x} + \frac{(\gamma-1)(\vec{\beta}\cdot\vec{x})\vec{\beta}}{\beta^2} - \gamma\vec{\beta}x^0$$

9) Invariância da carga elétrica; covariância da eletrodinâmica

Covariância das eqs. de Maxwell $\Rightarrow$ transf. em $\rho, \vec{J}, \vec{E}$ e $\vec{B}$

(no SI)

força de Lorentz: $$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right) \qquad (124)$$

onde vimos que $\vec{p}$ se transforma com $p^\alpha = (p_0, \vec{p}) = m(U_0, \vec{U})$
e onde $p_0 = \mathcal{E}/c$ e $U^\alpha$ é a quadrivelocidade $U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \gamma(c, \vec{v})$
com $\tau = t/\gamma$.

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\gamma}\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{q}{c}(c\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{q}{c}(\gamma c\vec{E} + \gamma\vec{v}\times\vec{B}) = \frac{q}{c}\left(U_0\vec{E} + \vec{U}\times\vec{B}\right) \qquad (125)$$

para a parte espacial e a parte temporal fica:

$$\frac{dp_0}{dt} = \frac{1}{\gamma}\frac{dp_0}{d\tau} = \frac{1}{\gamma}\frac{d}{d\tau}(\mathcal{E}/c),$$

onde $\mathcal{E}$ é a energia eletrostática, cuja taxa de variação (6.110) é:

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = \int_V \vec{J}\cdot\vec{E}\, d^3x = \int_V \rho\vec{v}\cdot\vec{E}\, d^3x = q\vec{v}\cdot\vec{E}$$

para um fluxo de corrente uniforme através do volume $V$

$$\Rightarrow \frac{dp_0}{d\tau} = \frac{1}{\gamma c} q\vec{v}\cdot\vec{E} = \frac{q}{c}\vec{U}\cdot\vec{E} \qquad (126)$$

Agora, se $\frac{dp^\alpha}{d\tau}$ forma um quadrivetor, o lado direito de (125) e de (126) também.
A carga é invariante sob transformações de Lorentz (escalar de Lorentz) e $U$ é um quadrivetor, de (126) $\vec{U}\cdot\vec{E}$ é a componente temporal de $dp^0/dt$:

$$\vec{E}\cdot\vec{U} = F^{0\beta}U_\beta$$

Por simplicidade, consideremos as equações de Maxwell no vácuo.

da equação da continuidade : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$ (127)

e de (76) e (77): $\partial_\alpha A^\alpha = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ , onde $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \vec{\nabla}\right)$

Vem que: $J^\alpha = (c\rho, \vec{J})$ (128)

e a eq. da continuidade : $\partial_\alpha J^\alpha = 0$ (129)

como a carga é invariante de Lorentz : $q = \int \rho d^3x = \int \rho' d^3x'$ ,
mas o elemento diferencial quadridimensional é : $d^4x = dx_0 dx^3$
é invariante : $d^4x' = \frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} d^4x = \underbrace{\det A}_{1} d^4x = d^4x$

portanto, $\rho d^3x' = \rho d^3x \Rightarrow c\rho$ se transforma como $x^0$.

No SI , as eqs. para os potenciais no calibre de Lorentz são :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2\vec{A} = \mu_0\vec{J}$$
(130')

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \nabla^2\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{c}{c} = \frac{J^0}{\varepsilon_0 c}\frac{\mu_0}{\mu_0} = \mu_0 c J^0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2(\phi/c)}{\partial t^2} - \nabla^2(\phi/c) = \mu_0 J^0$$
(132')

então, $\phi/c$ e $\vec{A}$ formam um quadrivetor : $A^\alpha = (\phi/c, \vec{A})$
tal que a quadridivergência e a condição de Lorentz ficam:

$$\begin{cases} \Box A^\alpha = \partial_\beta\partial^\beta A^\alpha = \mu_0 J^\alpha \\ \partial_\alpha A^\alpha = 0 \end{cases}$$
(133')

Expressando os campos em termos dos potenciais :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad , \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$
(134')

onde $\phi = cA^0$ , então:

$$E_x = -\frac{\partial(cA^0)}{\partial x} - \frac{\partial(cA_x)}{\partial(ct)} = -c(\partial^0 A^1 - \partial^1 A^0)$$
(135')

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2)$$

etc

onde usamos que $\partial^\alpha = (\partial/\partial x_0, -\vec{\nabla})$.

Então as 6 componentes ($\vec{E}$ e $\vec{B}$) se transformam como um tensor de segunda ordem, antissimétrico de traço nulo, o <u>tensor intensidade do campo</u>: $F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$ (136)

ou explicitamente:

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \qquad (137')$$

e o tensor com os 2 índices covariantes é:

$$F_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma} F^{\gamma\delta} g_{\delta\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \qquad (138)$$

obtido por $\vec{E} \to -\vec{E}$

e o <u>tensor dual intensidade do campo</u> é

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z/c & -E_y/c \\ B_y & -E_z/c & 0 & E_x/c \\ B_z & E_y/c & -E_x/c & 0 \end{pmatrix} \qquad (140')$$

obtido por $\vec{E} \to c\vec{B}$ e $\vec{B} = -\vec{E}/c$ e onde o tensor de 4ª ordem totalmente antissimétrico:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1 & \text{, para } \alpha=0, \beta=1, \gamma=2, \delta=3 \text{ (perm. pares)} \\ -1 & \text{, para permutação ímpar} \\ 0 & \text{, índices repetidos} \end{cases} \qquad (139)$$

transf. de dualidade (monopolos)

As equações de Maxwell ficam:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\Longrightarrow \quad \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \mu_0 J^\beta \qquad (141')$$

$$\partial_\alpha F^{\alpha 0} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} F^{\alpha 0} = \frac{\partial}{\partial x^0} \overset{0}{F^{00}} + \frac{\partial}{\partial x^i}(E^i/c) = \vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{E}}{c} = \mu_0 J^0 = \mu_0 c\rho$$

$$\partial_\alpha F^{\alpha i} = \partial_0 F^{0i} + \partial_k F^{ki} = \frac{\partial}{\partial x^0}(-E^i/c) + \frac{\partial}{\partial x^i}\overset{0}{F^{ii}} + \frac{\partial}{\partial x^{k\neq i}} F^{ki} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E^i}{\partial t} + (\vec{\nabla}\times\vec{B})_i =$$

$$= \mu_0 J^i$$

e as equações homogêneas: $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$, $\vec{\nabla}\times\vec{E}+\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0$ ficam:

$$\partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\beta}=0 \qquad (142)$$

com o tensor dual

$$\partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha 0}=\partial_k B^k=(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})_{k=1,2,3}=0$$

$$\partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha i}=\partial_0\mathcal{F}^{0i}+(\partial_k\mathcal{F}^{ki})_{k=1,2,3}=-\frac{\partial B^i}{\partial(ct)}+0-\frac{(\vec{\nabla}\times\vec{E})_i}{c}=-\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_i=0$$

ou em termos de $F^{\alpha\beta}$: $\partial^\alpha F^{\beta\gamma}+\partial^\beta F^{\gamma\alpha}+\partial^\gamma F^{\alpha\beta}=0$ (4 eqs) (143)

A equação da força de Lorentz fica:

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau}=m\frac{dU^\alpha}{d\tau}=\frac{q}{c}F^{\alpha\beta}U_\beta \qquad (144)$$

que são as equações (125) e (126)

Para as equações macroscópicas introduzimos $G^{\alpha\beta}=f(\vec{D},\vec{H})$ em analogia com $F^{\alpha\beta}=f(\vec{E},\vec{B})$, ou seja, $\vec{E}\to\vec{D}$, $\vec{B}\to\vec{H}$ e $c\to v=\dfrac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$, daí:

$$\partial_\alpha G^{\alpha\beta}=\mu J^\beta\ ,\quad \partial_\alpha\mathcal{F}^{\alpha\beta}=0 \qquad (145)$$

## 10) A transformação dos campos eletromagnéticos

$\vec{E}$ e $\vec{B}$ fazem parte de um tensor de ordem 2, então se transformam por:

$$F'^{\alpha\beta}=\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\delta}F^{\gamma\delta} \qquad (146)$$

como A é uma transformação linear: $A^\alpha_\gamma=\dfrac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma}$

de onde: $F'^{\alpha\beta}=A^\alpha_\gamma F^{\gamma\delta}A^\beta_\delta=A^\alpha_\gamma F^{\gamma\delta}\tilde{A}^\beta_\delta \Rightarrow F'=AF\tilde{A}$ (147)

lembrando que $A=\begin{pmatrix}\cosh\vartheta & -\sinh\vartheta & 0 & 0\\ -\sinh\vartheta & \cosh\vartheta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma & -\gamma\beta & 0 & 0\\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

para um boost puro na direção $x_1$

e que $F'^{01} = A^0_0 F^{01} A^1_1 + A^0_1 F^{10} A^1_0$ → abrindo a soma, tomando $\neq 0$

$$-E_1'/c = \gamma(-E_1/c)\gamma + (-\gamma\beta)(E_1/c)(-\gamma\beta)$$

$$E_1' = \gamma^2(1-\beta^2)E_1 \Rightarrow E_1' = E_1$$

analogamente: $E_1' = E_1$ , $B_1' = B_1$

$$E_2' = \gamma(E_2 - \beta B_3) \;,\; B_2' = \gamma(B_2 + \beta E_3) \quad (148)$$

$$E_3' = \gamma(E_3 + \beta B_2) \;,\; B_3' = \gamma(B_3 - \beta E_2)$$

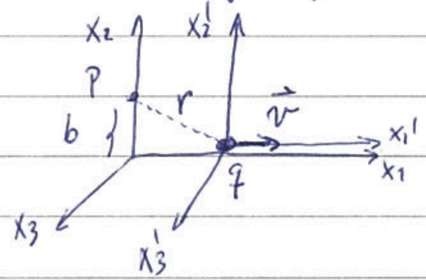
a componente paralela ao boost não muda, as componentes perpendiculares se misturam

Para um boost genérico na direção $\vec{\beta}$:

$$\vec{E}' = \gamma(\vec{E} + \vec{\beta}\times\vec{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{E}) \quad (149)$$

$$\vec{B}' = \gamma(\vec{B} - \vec{\beta}\times\vec{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{E})$$

Exemplo: carga $q$ com velocidade $\vec{v} = v\hat{x}_1$




em $t = t' = 0$ , $K = K'$

no ref. $K'$ o ponto P está em:

$x_1' = -vt'$ , $x_2' = b$ , $x_3' = 0$

$$\Rightarrow r' = \sqrt{b^2 + (vt')^2}$$

a transformação de $t'$ é: $t' = \gamma(t - v x_1/c^2) = \gamma t$, pois $x_1 = 0$ (ponto P)

calculando os campos:

$$\begin{cases} E_1' = -\frac{K q v t'}{r'^3} \;,\; E_2' = \frac{K q b}{r'^3} \;,\; E_3' = 0 \\ B_1' = 0 \;,\; B_2' = 0 \;,\; B_3' = 0 \end{cases} \quad (150)$$

que em termos das coordenadas em K:

$$E_1' = -\frac{K q \gamma v t}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \;,\; E_2' = \frac{K q b}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \quad (151)$$

usando as transf. inversas de (148):

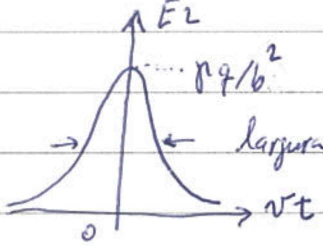
$$E_1 = E_1' = \frac{-q\gamma v t}{(b^2+\gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \quad , \quad E_2 = \gamma E_2' = \frac{\gamma q b}{(b^2+\gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \quad , \quad B_3 = \gamma\beta E_2' = \beta E_2 \qquad (152)$$

aparece $\vec{B}$

com as outras componentes nulas.

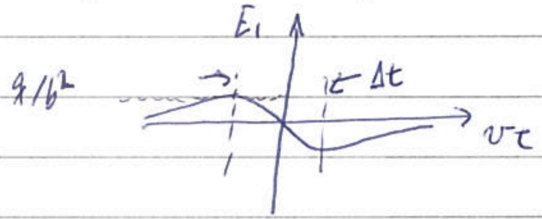
quando $\beta \to 1$ , $B_3 \to E_2$ e $\vec{B} \simeq \frac{q}{c} \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$ ⇒ Ampère, Biot e Savart

em função de $t$ , $E_2$ apresenta uma ressonância em $t=0$:



largura a meia altura: $\Delta t \simeq b/\gamma v$ (153)

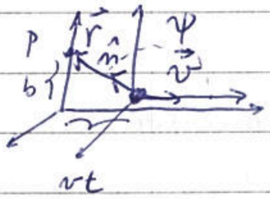
já o campo elétrico longitudinal varia com



⇒ integral no tempo nula

quando $\beta \to 1$ , os campos $E_2 \simeq B_3$ que são perpendiculares e com $E_1$ tendem a uma frente de onda plana.

usando que $\vec{E}$ aponta na direção radial
e observando que $E_1/E_2 = -vt/b$



$\Rightarrow vt = -b\,E_1/E_2$

agora $b^2+\gamma^2 v^2 t^2 = r^2(\operatorname{sen}^2\psi + \gamma^2\cos^2\psi) = r^2\gamma^2(\cos^2\psi + (1-\beta^2)\operatorname{sen}^2\psi) = r^2\gamma^2(1-\beta^2\operatorname{sen}^2\psi)$

$\vec{E} = E\hat{r} = E\cos\psi\,\hat{x}_1 + E\operatorname{sen}\psi\,\hat{x}_2 = E\left(\frac{-vt}{r}\right)\hat{x}_1 + E\left(\frac{b}{r}\right)\hat{x}_2 = E_1\hat{x}_1 + E_2\hat{x}_2$

então

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3\gamma^2(1-\beta^2\operatorname{sen}^2\psi)^{3/2}}$$

→ distr. radial não-isotrópica (154)
isotropia para $\beta=0$