Cap. 12 | Dinâmica de Partículas Relativísticas e Campos Eletromagnéticos

1) Lagrangeana e Hamiltoniana de uma partícula carregada relativística em campos eletromagnéticos externos

As eqs de movimento

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\left[\vec{E} + \frac{\vec{u}}{c}\times\vec{B}\right] \quad , \quad \frac{dE}{dt} = e\vec{u}\cdot\vec{E} \qquad (1)$$

podem ser escritas na forma covariante

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = m\frac{dU^\alpha}{d\tau} = \frac{q}{c}F^{\alpha\beta}U_\beta , \qquad (2)$$

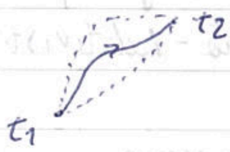
onde m é a massa, τ o tempo próprio e $U^\alpha = (\gamma c, \gamma\vec{u}) = p^\alpha/m$ é a quadrivelocidade da partícula

Formulação lagrangeana: o sistema é descrito pelas coordenadas generalizadas $q(t)$ e velocidades generalizadas $\dot{q}(t)$ através da função lagrangeana $L(q(t), \dot{q}(t), t)$.

O princípio da mínima ação: a ação

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t)\, dt \qquad (3)$$

é um extremo, isto é, $\delta A = 0$ e obtém-se as equações de Euler-Lagrange:



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \qquad (4)$$

que são equivalentes às leis de Newton.

a) tratamento elementar da lagrangeana relativística

A integral da ação deve ser um escalar de Lorentz e queremos que $\delta A = 0$ em todos os referenciais inerciais; substituimos $t \to \gamma \tau$:

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma L \, d\tau \,, \qquad (5)$$

já que $dt = \gamma \, d\tau$.

Se $\delta A = 0$ é invariante A é um escalar invariante, como $d\tau$ é invariante γL deve ser invariante e como γ é um número, então L é um escalar invariante de Lorentz.

Uma partícula livre (com energia e momento constantes) tem quadrivelocidade constante, a função invariante da velocidade mais simples é:

$$U_\alpha U^\alpha = c^2$$

e podemos escolher uma lagrangeana $L \propto \gamma^{-1}$ ou

$$L_{liv} = -mc^2 \gamma^{-1} = -mc^2 \sqrt{1 - u^2/c^2} \,, \qquad (6)$$

tal que $\dfrac{\partial L}{\partial q} = 0$, $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dfrac{\partial L}{\partial u} = + mc^2 \dfrac{1}{2} \dfrac{2u}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = c^2 m \gamma u$

e por (4) vem: $\dfrac{d}{dt}(\gamma m \vec{u}) = 0$,

ou seja, a lei de Newton para a partícula livre.

Seja uma partícula carregada num potencial escalar Φ, a energia potencial é $V = e\Phi$. Como a lagrangeana não-relativística é $L = T - V$, (6) deve reduzir-se a:

$$L_{int} = -V \xrightarrow{v \ll c} L_{int}^{NR} = -e\Phi \qquad (7')$$

queremos encontrar o escalar invariante de Lorentz para γL_{int} que reduz-se a $-e\Phi$ em $v \ll c$.

Como Φ é a parte temporal de $A^\alpha = (\Phi, \vec{A})$, podemos construir os escalares $x_\alpha A^\alpha$ e $u_\alpha A^\alpha$, mas $\gamma L_{int} = f(U^\alpha)$ então a forma mais simples de L é:

$$L_{int} = -\frac{e}{\gamma c} u_\alpha A^\alpha = -\frac{e}{\gamma c} (\gamma c, \gamma \vec{u}) \begin{pmatrix} \Phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} = -e\Phi + \frac{e}{c} \vec{u} \cdot \vec{A} \qquad (8)$$

de (6) e (8):

$$L = L_{kin} + L_{int} = -mc^2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\vec{u}\cdot\vec{A} - e\Phi \qquad (9)$$

O momento canônico $\vec{P}$ conjugado da coordenada $\vec{x}$ é obtido por

$$P_i \equiv \frac{\partial L}{\partial u_i} = \gamma m u_i + \frac{e}{c}A_i \qquad (10)$$

$$\Rightarrow \vec{P} = \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}, \qquad (11)$$

onde $\vec{p} = \gamma m\vec{u}$ é o momento relativístico da partícula.

A hamiltoniana é uma função $H = H(\vec{x}, \vec{P})$ e é uma constante do movimento se L não depender explicitamente do tempo, é definida:

$$H = \vec{P}\cdot\vec{u} - L \qquad (12)$$

de (11): $\vec{p} = m\gamma\vec{u} = c\vec{P} - e\vec{A} \Rightarrow \vec{u} = \frac{c\vec{P}-e\vec{A}}{m\gamma} = \frac{c\vec{P}-e\vec{A}}{E/c^2} \Rightarrow$

$$\vec{u} = \frac{c\vec{P}-e\vec{A}}{\sqrt{p^2+m^2c^2}} = \frac{c\vec{P}-e\vec{A}}{\sqrt{(\vec{P}-\frac{e}{c}\vec{A})^2+m^2c^2}} \qquad (13)$$

de onde: $H = \vec{P}\cdot\vec{u} - L = \vec{P}\cdot\frac{(c\vec{P}-e\vec{A})}{m\gamma} + \frac{mc^2}{\gamma} - \frac{e}{c}\vec{u}\cdot\vec{A} + e\Phi =$

$$H = \frac{cP^2 - e\vec{P}\cdot\vec{A} + m^2c^2}{m\gamma} - \frac{e}{c}\frac{(c\vec{P}-e\vec{A})\cdot\vec{A}}{m\gamma} + e\Phi =$$

$$H = \frac{(c\vec{P}-e\vec{A})^2 + m^2c^4}{\underset{\mathcal{E}\,=\,mc^2\gamma\,=\,\sqrt{c^2p^2+m^2c^4}}{mc^2\gamma}} + e\Phi = \sqrt{(c\vec{P}-e\vec{A})^2+m^2c^4} + e\Phi \qquad (14)$$

note que $H = \sqrt{(c\vec{P}-e\vec{A})^2+m^2c^4} + e\Phi \equiv W \Rightarrow$

$$(W - e\Phi)^2 - (c\vec{P}-e\vec{A})^2 = (mc^2)^2 \qquad (15)$$

é invariante e está na forma do produto escalar $p_\alpha p^\alpha = (mc)^2$ (16)

portanto: $\qquad p^\alpha \equiv (E/c, \vec{p}) = \left(\frac{1}{c}(W-e\Phi), \vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)$ (17)

b) tratamento explicitamente covariante da lagrangeana relativística

Descrição covariante: subst. $\vec{x}$ e $\vec{u}$ por x^α e u^α, a eq. (6)

pode ser reescrita como: $L_{liv} = -\frac{mc}{\gamma}\sqrt{u_\alpha u^\alpha}$ (18)

e a integral da ação fica:

$$A = -mc\int_{\tau_1}^{\tau_2}\sqrt{u_\alpha u^\alpha}\,d\tau \qquad (19)$$

com a equação de vínculo $u_\alpha u^\alpha = c^2$ (20a)

$$\Rightarrow \frac{d}{d\tau}(u_\alpha u^\alpha) = 0 \Rightarrow \frac{du_\alpha}{d\tau}u^\alpha + u_\alpha\frac{du^\alpha}{d\tau} =$$

(20b)

$$= \frac{du_\alpha}{d\tau}g^{\alpha\beta}g_{\beta\alpha}u^\alpha + u_\alpha\frac{du^\alpha}{d\tau} = u_\beta\frac{du^\beta}{d\tau} + u_\alpha\frac{du^\alpha}{d\tau} = 2u_\alpha\frac{du^\alpha}{d\tau} = 0$$

o integrando de (19) é: $\sqrt{u_\alpha u^\alpha}\,d\tau = \sqrt{\frac{dx_\alpha}{d\tau}\frac{dx^\alpha}{d\tau}}\,d\tau = \sqrt{g^{\alpha\beta}dx_\alpha dx_\beta}$

e a ação fica: $A = -mc\int_{s_1}^{s_2}\sqrt{g^{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds}}\,ds$, (21)

com $x^\alpha(s)$, onde s é um parâmetro $s = s(\tau)$ função arbitrária, monótona e crescente

então $\tilde{L}(s)$ é a lagrangeana escrita em função de um parâmetro livre e: $A = \int\tilde{L}\,ds \Rightarrow$

eq. de Euler-Lagrange: $\frac{d}{ds}\left(\frac{d\tilde{L}}{\partial(dx_\alpha/ds)}\right) - \partial^\alpha\tilde{L} = 0$ (24)

do cálculo variacional: $\partial^\alpha\tilde{L} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow mc\frac{d}{ds}\left[\partial\sqrt{g^{\delta\beta}\frac{dx_\delta}{ds}\frac{dx_\beta}{ds}}\Big/\partial\left(\frac{dx_\alpha}{ds}\right)\right] = \frac{mc}{2}\frac{d}{ds}\left[\frac{\frac{dx^\alpha}{ds}+\frac{dx^\alpha}{ds}}{\sqrt{dx^\beta/ds\cdot dx^\beta/ds}}\right] =$$

$$= mc\frac{d}{ds}\left[\frac{dx^\alpha/ds}{\sqrt{dx^\beta/ds\;dx^\beta/ds}}\right] = 0 \quad (*)$$

impondo o vínculo $u_\alpha u^\alpha = c^2$, vem:

$$A = -mc\int_{\tau_1}^{\tau_2}\sqrt{u_\alpha u^\alpha}\,d\tau = -mc\int_{s_1}^{s_2}\sqrt{\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx^\alpha}{ds}}\,ds$$

de onde concluímos que $ds = d\tau$ e que

$$\sqrt{\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx^\alpha}{ds}}\,ds = \sqrt{u_\alpha u^\alpha}\,d\tau = c\,d\tau \Rightarrow \frac{d}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{dx_\alpha/ds\cdot dx^\alpha/ds}}\frac{d}{ds}$$

que com a eq. (*) vem: $m\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} = 0$

a eq. de mov. da partícula livre

Para uma partícula carregada num campo externo, introduzimos o termo de interação:

$$A = -\int_{s_1}^{s_2} \left[mc\sqrt{g^{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds}} + \frac{e}{c}\frac{dx_\alpha}{ds}A^\alpha(x)\right] ds \qquad (23)$$

com a "quadrilagrangeana": $\tilde{L} = -\left[mc\sqrt{g^{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds}} + \frac{e}{c}\frac{dx_\alpha}{ds}A^\alpha(x)\right]$ (25)

a eq. de Euler-Lagrange fica:

$$mc\frac{d}{ds}\left[\frac{dx^\alpha/ds}{\sqrt{dx_\alpha/ds \cdot dx^\alpha/ds}} + \frac{e}{mc^2}A^\alpha\right] - \frac{e}{c}\frac{dx_\beta}{ds}\partial^\alpha A^\beta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \frac{e}{c}\frac{d}{d\tau}A^\alpha(x) - \frac{e}{c}\frac{dx_\beta}{d\tau}\partial^\alpha A^\beta(x) = 0$$

como $\frac{dA^\alpha}{d\tau} = \frac{dx_\beta}{d\tau}\frac{dA^\alpha}{dx_\beta} = \frac{dx_\beta}{d\tau}\partial^\beta A^\alpha$, na eq. de mov:

$$\Rightarrow m\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \frac{e}{c}\left(\partial^\beta A^\alpha - \partial^\alpha A^\beta\right)\frac{dx_\beta}{d\tau} = 0 \Rightarrow$$

$$m\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} = \frac{e}{c}\left(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha\right)\frac{dx_\beta}{d\tau} \qquad (26)$$

que é a equação do movimento (2): $m\frac{dU^\alpha}{d\tau} = \frac{e}{c}F^{\alpha\beta}U_\beta$

formulação hamiltoniana, seja o 4-momento conjugado:

$$P^\alpha = -\frac{\partial\tilde{L}}{\partial(dx_\alpha/ds)} = mU^\alpha + \frac{e}{c}A^\alpha \qquad (27)$$

$$\Rightarrow U^\alpha = \frac{1}{m}\left(P^\alpha - \frac{e}{c}A^\alpha\right)$$

definindo a hamiltoniana: $\tilde{H} = \frac{1}{2}(P_\alpha U^\alpha + \tilde{L})$, (28)

com $\tilde{L} = -mc\sqrt{U_\alpha U^\alpha} - (e/c)U_\alpha A^\alpha =$

$$= -mc\sqrt{\frac{1}{m^2}\left(P_\alpha - \frac{e}{c}A_\alpha\right)\left(P^\alpha - \frac{e}{c}A^\alpha\right)} - \frac{e}{mc}\left(P_\alpha - \frac{e}{c}A_\alpha\right)A^\alpha$$

então:

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}\left[P_\alpha \underbrace{\left(P^\alpha - \frac{e}{c}A^\alpha\right)}_{m} - \left(\frac{e}{c}\right)\underbrace{\left(P_\alpha - \frac{e}{c}A_\alpha\right)}_{m}A^\alpha - mc\sqrt{u_\alpha u^\alpha}\right] \Rightarrow$$

$$\tilde{H} = \frac{1}{2m}\left(P_\alpha - \frac{e}{c}A_\alpha\right)\left(P^\alpha - \frac{e}{c}A^\alpha\right) - mc^2 \qquad (29)$$

e as equações de Hamilton levam a

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx^\alpha}{d\tau} &= \frac{\partial\tilde{H}}{\partial P_\alpha} = \frac{1}{m}\left(P^\alpha - \frac{e}{c}A^\alpha\right) \\ \frac{dP^\alpha}{d\tau} &= -\frac{\partial\tilde{H}}{\partial x_\alpha} = \frac{e}{mc}\left(P_\beta - \frac{e}{c}A_\beta\right)\partial^\alpha A^\beta \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

onde a 2^a eq. é a força de Lorentz relativística

3) Movimento num campo magnético uniforme e estático

Para $\vec{B}$ uniforme e estático, as eqs de movimento são:

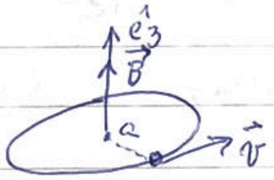
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\gamma \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{c}\,\vec{v}\times\vec{B} \quad , \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} = 0 \quad , \qquad (37)$$

onde $\mathcal{E} = \text{const.} \Rightarrow v = \text{const.} \Rightarrow \gamma = \text{const.}$, então

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}\times\left(\frac{q\vec{B}}{\gamma mc}\right) \equiv \vec{v}\times\vec{\omega}_B \quad , \qquad (38)$$

onde $$\vec{\omega}_B = \frac{q\vec{B}}{\gamma mc} = \frac{qc\vec{B}}{\gamma mc^2} = \frac{qc\vec{B}}{\mathcal{E}} \qquad (39)$$

e ω_B é a frequência de precessão ou giração



Seja $\vec{B} = B\hat{e}_3$ e $\vec{v} = v_{\parallel}\hat{e}_3 + \vec{v}_{\perp}$

de (38) vem:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = (v_{\parallel}\hat{e}_3 + \vec{v}_{\perp})\times\frac{qcB\hat{e}_3}{\mathcal{E}} = \vec{v}_{\perp}\times\vec{\omega}_B = \frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt}$$

e $v_{\parallel}$ é uma constante do movimento. Para as outras componentes: $\frac{dv_1}{dt} = \omega_B v_2 \quad , \quad \frac{dv_2}{dt} = -\omega_B v_1$

que combinadas: $\frac{d^2}{dt^2}v_1 = \frac{d}{dt}(\omega_B v_2) = -\omega_B^2 v_1$

com solução geral: $v_1 = v_0 e^{-i\omega_B t}$, com v_0 uma constante

$$\Rightarrow \frac{dv_1}{dt} = -i\omega_B v_0 e^{-i\omega_B t} = \omega_B v_2 \Rightarrow v_2 = -i v_1$$

então $\vec{v} = v_{\parallel}\hat{e}_3 + v_1\hat{e}_1 + v_2\hat{e}_2 = v_{\parallel}\hat{e}_3 + v_0(\hat{e}_1 - i\hat{e}_2)e^{-i\omega_B t}$

como a veloc. de rotação é uniforme: $v_0 = 2\pi a/T = \omega_B a$

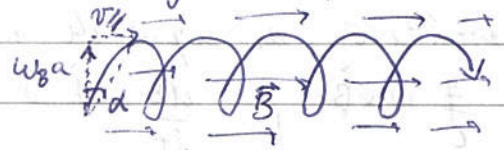
daí $$\vec{v}(t) = v_{\parallel}\hat{e}_3 + \omega_B a(\hat{e}_1 - i\hat{e}_2)e^{-i\omega_B t} \qquad (40)$$

e a é o raio de giração. (Convenção: tomar a parte real)

integrando:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + v_{\parallel}t\hat{e}_3 + ia(\hat{e}_1 - i\hat{e}_2)e^{-i\omega_B t} \qquad (41)$$

que é a equação de uma trajetória helicoidal de raio a e ângulo de passo $\alpha = tg^{-1}(v_{//}/\omega_B a)$



de $v_\perp = \omega_B a = \dfrac{qBa}{\gamma mc} \Rightarrow c(\gamma m v_\perp) = c p_\perp = qBa$

de $1eV = 1{,}6\cdot10^{-19}C \Rightarrow 1eV/c = 5{,}34\cdot10^{-28}\ kg\,m/s$, pois $p = \varepsilon/c$ (fóton)

$1\ kg\,m/s = 1{,}87\cdot10^{27}\ eV/c = \dfrac{3\cdot10^8}{1{,}6\cdot10^{-19}}\ eV/c \cdot \dfrac{e}{e} \Rightarrow$

$$\Rightarrow p_\perp = \frac{q}{c}Ba\Big|_{Gauss} = q\frac{B}{10^4}\frac{a}{10^2}\Big|_{SI} = \frac{qBa}{10^6}\,\frac{3\cdot10^8\,eV/c}{e} = 300\left(\frac{q}{e}\right)Ba\ eV/c$$

se $q = e \quad \Rightarrow p_\perp(MeV/c) = 3\cdot10^{-4}\,B(G)\cdot a(cm) \qquad (42)$

4) Movimento em campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ combinados, uniformes e estáticos

$\vec{E}$ e $\vec{B}$ não paralelos ($\vec{E}\perp\vec{B}$ ou $\vec{E}\cdot\vec{B}=0$):

de $\dfrac{d\varepsilon}{dt} = q\vec{E}\cdot\vec{v}$ vemos que a energia não é constante e encontrar uma solução para $\vec{v}$ é difícil

Contudo, podemos encontrar um ref. K', tal que

$$\frac{d\vec{p}\,'}{dt} = q\left(\vec{E}' + \frac{\vec{v}'\times\vec{B}'}{c}\right)$$

e em que $\vec{E}' = 0$

caso i) $|\vec{E}| < |\vec{B}|$

para $\vec{E}\perp\vec{B}$ as eqs (11.148) ou (11.149) reduzem-se a:

$$E_{//}' = E_{//}, \quad \vec{E}_\perp' = \gamma(\vec{E}_\perp + \vec{\beta}\times\vec{B}) \qquad (*)$$
$$B_{//}' = B_{//}, \quad \vec{B}_\perp' = \gamma(\vec{B}_\perp - \vec{\beta}\times\vec{E})$$

tomando $\vec{\beta} = \beta\dfrac{(\vec{E}\times\vec{B})}{E\cdot B}$ simultaneamente $\vec{\beta}\perp\vec{E}$ e $\vec{\beta}\perp\vec{B}$:

$\vec{\beta}\perp\vec{E} \Rightarrow \quad E_{//} = 0$ e $\vec{E} = \vec{E}_\perp$

$\vec{\beta}\perp\vec{B} \Rightarrow \quad B_{//} = 0$ e $\vec{B} = \vec{B}_\perp$

as transf. (*) de $\vec{E}$: $E'_{\parallel} = E_{\parallel} = 0$ (44')

$$\vec{E}_{\perp}' = \gamma\left(\vec{E} + \beta \frac{(\vec{E}\times\vec{B})\times\vec{B}}{E\cdot B}\right) = \gamma\left(\vec{E} - \beta\frac{(\vec{B}\times\vec{E})\times\vec{B}}{EB}\right) =$$

$$= \gamma\left(\vec{E} - \beta\frac{B^{\cancel{2}}\vec{E}}{E\cancel{B}}\right) = \gamma\left(\vec{E} - \beta\frac{B\vec{E}}{E}\right)$$

tomando agora $\beta = E/B < 1$ (que é possível) e

$$\vec{E}_{\perp}' = \gamma\left(\vec{E} - \frac{E}{\cancel{B}}\frac{\cancel{B}\vec{E}}{\cancel{E}}\right) = 0 \quad \text{como queríamos} \qquad (44'')$$

então: $\vec{\beta} = \beta\frac{(\vec{E}\times\vec{B})}{EB} = \frac{E}{B}\frac{(\vec{E}\times\vec{B})}{EB} \Rightarrow \vec{\beta} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2}$ (43)

as transf. (*) de $\vec{B}$: $B'_{\parallel} = B_{\parallel} = 0$ (44''')

$$\vec{B}_{\perp}' = \vec{B}' = \gamma(\vec{B} - \vec{\beta}\times\vec{E}) = \gamma\left(\vec{B} - \frac{(\vec{E}\times\vec{B})\times\vec{E}}{B^2}\right) =$$

$$= \gamma\left(\vec{B} - \frac{E^2\vec{B}}{B^2}\right) = \gamma\vec{B}\left(1 - \frac{E^2}{B^2}\right) \quad , \text{ mas}$$

$$\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} = (1 - E^2/B^2)^{-1/2} \Rightarrow \vec{B}' = \gamma\vec{B}\gamma^{-2} = \vec{B}/\gamma \qquad (44'''')$$

neste referencial, portanto, temos somente $\vec{B}$ e o movimento é helicoidal

caso ii) $|\vec{E}| > |\vec{B}|$ (analogamente)

Podemos encontrar um ref. K'' que move-se com

$$\vec{\beta}' = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{E^2} \qquad (45)$$

em que temos somente $\vec{E}$:

$$\vec{E}_{\parallel}'' = 0 \ , \quad \vec{E}_{\perp}'' = \vec{E}/\gamma' \qquad (46)$$

$$\vec{B}_{\parallel}'' = 0 \ , \quad \vec{B}_{\perp}'' = \gamma'(\vec{B} - \vec{\beta}'\times\vec{E}) = 0$$

e o movimento é hiperbólico com velocidade crescente

5) Arraste de partículas em campos magnéticos estáticos não-uniformes

$\vec{B}$ varia suavemente: $\delta \vec{B}$ em $\delta x \gg a$ (raio de giração)

1ª aproximação: mov. helicoidal em torno de $\vec{B}$.

Seja $\hat{n}$ tal que: $\vec{\nabla} B = g\,\hat{n}$ no ponto $\hat{n}\cdot\vec{B} = 0$, então dentro da aproximação de 1ª ordem:

$$\vec{\omega}_B(\vec{x}) = \frac{e}{\gamma m c}\vec{B}(\vec{x}) \simeq \vec{\omega}_0\left[1 + \frac{1}{B_0}\left(\frac{\partial B}{\partial \xi}\right)_0 \hat{n}\cdot\vec{x}\right], \qquad (47)$$

com ξ a coordenada na direção $\hat{n}$.

A velocidade será $\vec{v} = \vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp$ com mov. localmente helicoidal.

Seja $\vec{v}_\perp = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$, onde $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$ e $\vec{v}_1$ uma correção, de (47) vem:

$$\frac{d\vec{v}_\perp}{dt} = \vec{v}_\perp \times \vec{\omega}_B(\vec{x}) \qquad (48)$$

$$\frac{d\vec{v}_\perp}{dt} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{v}_1}{dt} \simeq \vec{v}_0 \times \omega_0 + \vec{v}_0(\hat{n}\cdot\vec{x}_0)\frac{1}{B_0}\left(\frac{\partial B}{\partial \xi}\right)_0 + \dots + \vec{v}_1 \times \vec{\omega}_0 + \dots$$

que em 1ª ordem:

$$\frac{d\vec{v}_1}{dt} \simeq \left[\vec{v}_1 + \vec{v}_0(\hat{n}\cdot\vec{x}_0)\frac{1}{B_0}\left(\frac{\partial B}{\partial \xi}\right)_0\right] \times \vec{\omega}_0 \qquad (49)$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{de (40)}: \vec{v}(t) = v_\parallel \hat{e}_3 + \omega_B a(\hat{e}_1 - i\hat{e}_2)e^{-i\omega_B t} \Rightarrow \vec{v}_0 = -\vec{\omega}_0 \times (\vec{x}_0 - \vec{X}) \\ &\text{de (41)}: \vec{x}(t) = \vec{X}_0 + v_\parallel t\,\hat{e}_3 + ia(\hat{e}_1 - i\hat{e}_2)e^{-i\omega_B t} \Rightarrow (\vec{x}_0 - \vec{X}) = \frac{1}{\omega_0^2}(\vec{\omega}_0 \times \vec{v}_0) \end{aligned}\right\} (50)$$

onde $\vec{X}$ é o centro do raio de giração do mov. circular não-perturbado ($\vec{X} = 0$, neste caso): $\vec{v}_0 = -\vec{\omega}_0 \times \vec{x}_0$ que em (49):

$$\frac{d\vec{v}_1}{dt} \simeq \left[\vec{v}_1 - \frac{1}{B_0}\left(\frac{\partial B}{\partial \xi}\right)_0 \vec{\omega}_0 \times \vec{x}_0\,(\hat{n}\cdot\vec{x}_0)\right] \times \vec{\omega}_0 \qquad (51)$$

excluindo-se os termos oscilatórios, $\vec{v}_1$ tem valor médio não-nulo:

$$\vec{v}_G = \langle \vec{v}_1 \rangle = \frac{1}{B_0}\left(\frac{\partial B}{\partial \xi}\right)_0 \vec{\omega}_0 \times \langle (\vec{x}_0)_\perp (\hat{n}\cdot\vec{x}_0)\rangle \qquad (52)$$

agora, as componentes de $\vec{x}_{0\perp}$ oscilam com amplitude a e somente a componente paralela a $\hat{n}$ contribui para a média, assim: $\langle (\vec{x}_0)_\perp (\hat{n}\cdot\vec{x}_0)\rangle = \frac{a^2\hat{n}}{2}$ (53)

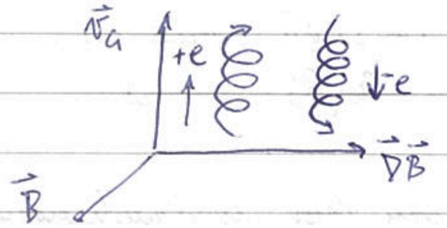
→ média temporal do sen ou cos

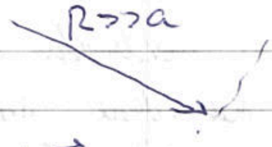
$$\Rightarrow \quad \vec{v}_a = \frac{a^2}{2}\frac{1}{B_0}\left(\frac{\partial B}{\partial \xi}\right)_0 (\vec{\omega}_0\times\hat{n}) \qquad (54)$$

ou

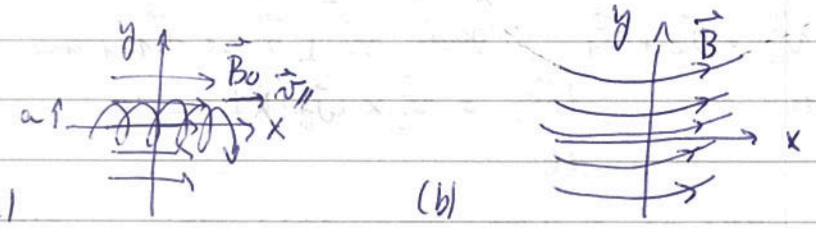
$$\frac{\vec{v}_a}{\omega_B a} = \frac{a}{2B^2}\left(\vec{B}\times\vec{\nabla}_\perp\vec{B}\right) \qquad (55)$$

Se $|\vec{\nabla}B/\vec{B}| \ll 1 \Rightarrow v_a \ll \omega_B a$ (veloc. arrastre $\ll$ veloc. orbital)





Seja agora



o centro diretor da espiral acompanha a curvatura de $\vec{B}$, ou seja, tem uma aceleração centrífuga $v_\parallel^2/R$, que é equivalente a uma força centrífuga efetiva:

$$e\vec{E}_{ef} = \gamma m \frac{v_\parallel^2 \vec{R}}{R} \qquad (56)$$

além de $\vec{B}_0$. De (43) vem a velocidade de arrastre:

$$\vec{v}_c \simeq c\,\frac{\gamma m}{e}\, v_\parallel^2\, \frac{\vec{R}\times\vec{B}_0}{R^2 B_0^2} \qquad (57)$$

ou

$$\vec{v}_c = \frac{v_\parallel^2}{\omega_B R}\left(\frac{\vec{R}\times\vec{B}_0}{R B_0}\right) \qquad (58)$$

Resolvendo-se diretamente a eq. da força de Lorentz, em coordenadas cilíndricas ($\vec{B} = B_\phi\hat{\phi} = B_0\hat{\phi}$), vem:

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2 &= -\omega_B \dot{z} \\ \rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi} &= 0 \\ \ddot{z} &= \omega_B \dot{\rho} \end{aligned} \qquad (59)$$

/ /

para $R >> a$, dentro da ordem mais baixa: $\dot{\phi} \simeq \frac{v_{\parallel}}{R}$, $\rho \simeq R$

a primeira equação em (59):

$$\cancel{\ddot{\rho}}^{\to 0} - R\cdot\left(\frac{v_{\parallel}}{R}\right)^2 \simeq -\omega_B \dot{z} \Rightarrow \dot{z} \simeq \frac{v_{\parallel}^2}{\omega_B \cdot R} \quad (60)$$

que é o módulo de $\vec{v}_c$ em (58).

Numa região livre de correntes, podemos combinar (55) e (58):

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{\nabla_{\perp} B}{B} = -\frac{\vec{R}}{R^2}$$ → demonstr. no cap. 1

$v_{\perp} = \omega_B a$

de (55): $$\vec{v}_G = \frac{\omega_B a^2}{2}\left[\frac{\vec{B}}{B}\times\left(\frac{-\vec{R}}{R^2}\right)\right] = \frac{\omega_B a^2}{2R}\frac{\omega_B}{\omega_B}\left(\frac{\vec{R}\times\vec{B}}{RB}\right) = \frac{v_{\perp}^2}{2\omega_B R}\left(\frac{\vec{R}\times\vec{B}}{RB}\right)$$

então $\vec{v}_G \parallel \vec{v}_c$ e os vetores podem ser somados diretamente:

Velocidade total de arrasto: $$\vec{v}_A = \frac{1}{\omega_B R}\left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2}\right)\left(\frac{\vec{R}\times\vec{B}}{RB}\right) \quad (61)$$

8) Lagrangeana para o campo eletromagnético

Lagrangeana para o campo eletromagnético em interação com cargas e correntes. Campos (em geral) têm infinitos graus de liberdade.

$$i \to x^\alpha, K \quad \to \text{cada ponto } x^\alpha \text{ corresponde a}$$

coord. generaliz.: $q_i \to \phi_K(x)$ um conjunto de variáveis x_i

veloc. generaliz.: $\dot{q}_i \to \partial^\alpha \phi_K(x)$ (83)

$$L = \Sigma_i L_i(q_i, \dot{q}_i) \to \int \mathcal{L}(\phi_K, \partial^\alpha \phi_K)\, d^3x$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \to \partial^\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\beta \phi_K)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_K}$$

onde $\mathcal{L}$ é a densidade de lagrangeana.

A integral de ação é:

$$A = \iint \mathcal{L}\, d^3x\, dt = \int \mathcal{L}\, d^4x \qquad (84)$$

e como A e d^4x são invariantes $\Rightarrow$ $\mathcal{L}$ é invariante.

Exigindo que a ação seja um extremo com respeito à variação dos campos:

$$\frac{\delta A}{\partial \phi_K(x)} = 0$$

vem a eq. de Euler-Lagrange:

$$\partial^\beta\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\beta \phi_K)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_K} = 0$$

A partir das quantidades $F^{\alpha\beta}$, A^α e J^α construímos o escalar:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{c} J_\alpha A^\alpha \;, \qquad (85)$$

onde os coeficientes e sinais concordam com (10):

$$L_{int} = -e\Phi + (e/c)\, \vec{u}\cdot\vec{A}$$

vimos em (11.136):

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} (\partial^\gamma A^\delta - \partial^\delta A^\gamma)(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) - \frac{1}{c} J_\alpha A^\alpha \qquad (86)$$

/ /

iguais (simetria de $g_{\alpha\beta}$

antissim de $F^{\alpha\beta}$)

calculando:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\beta A^\alpha)} = -\frac{1}{16\pi} g_{\lambda\mu} g_{\nu\sigma} \Big\{ \delta_\beta^{\ \mu} \delta_\alpha^{\ \sigma} F^{\lambda\nu} - \delta_\beta^{\ \sigma} \delta_\alpha^{\ \mu} F^{\lambda\nu} + \delta_\beta^{\ \lambda} \delta_\alpha^{\ \nu} F^{\mu\sigma} - \delta_\beta^{\ \nu} \delta_\alpha^{\ \lambda} F^{\mu\sigma} \Big\} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} F_{\beta\alpha} = \frac{1}{4\pi} F_{\alpha\beta} \qquad (87)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\alpha} = -\frac{1}{c} J_\alpha \qquad (88)$$

e as equações de movimento são:

$$\frac{1}{4\pi} \partial^\beta F_{\beta\alpha} = \frac{1}{c} J^\alpha \qquad (89)$$

ou $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta$ (11.141), a forma covariante das eqs. de Maxwell inomogêneas.

já as equações homogêneas são automaticamente satisfeitas: mesmo ✓

$$\partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\beta} \overset{(11.140)}{=} \frac{1}{2} \partial_\alpha \varepsilon^{\alpha\beta\lambda\mu} F_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} \partial_\alpha \varepsilon^{\alpha\beta\lambda\mu} (\partial_\lambda A_\mu - \partial_\mu A_\lambda) =$$

$$= \partial_\alpha \varepsilon^{\alpha\beta\lambda\mu} \partial_\lambda A_\mu = \underbrace{\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\mu}}_{\text{antissimétrico}} \underbrace{\partial_\alpha \partial_\lambda}_{\text{simétrico}} A_\mu = 0$$

e a eq. da continuidade vem da divergência de (89):

$$\frac{1}{4\pi} \underbrace{\partial^\alpha \partial^\beta}_{\text{sim}} \underbrace{F_{\beta\alpha}}_{\text{antissim}} = \frac{1}{c} \partial^\alpha J_\alpha \Rightarrow \partial^\alpha J_\alpha = 0 \qquad (90)$$

9) Lagrangeana de Proca, efeitos da massa do fóton

Adiciona-se um termo de massa em (85):

$$\mathcal{L}_{Proca} = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{\mu^2}{8\pi} A_\alpha A^\alpha - \frac{1}{c} J_\alpha A^\alpha , \qquad (91)$$

onde μ é o inverso do compr. de onda Compton do fóton:

$$\mu = \frac{m_\gamma c}{\hbar}$$

A eq. de movimento fica:

$$\partial^\beta F_{\beta\alpha} + \mu^2 A_\alpha = \frac{4\pi}{c} J_\alpha \qquad (92)$$

lembrando: $\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\partial\vec{A}/\partial t$, $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$ $\Big\}$ $F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$,

onde: $\partial^{\alpha,\beta} = (\partial/\partial x_0, -\vec{\nabla})$ e $A^{\alpha,\beta} = (\phi, \vec{A})$

a condição de Lorentz é: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c}\partial\phi/\partial t \Rightarrow \partial_\alpha A^\alpha = 0$

então, calculando o primeiro termo de (92):

$$\partial^\beta F_{\beta\alpha} = \partial^\beta g_{\beta\gamma} g_{\alpha\delta} F^{\gamma\delta} = \partial^\beta g_{\beta\gamma} g_{\alpha\delta} (\partial^\gamma A^\delta - \partial^\delta A^\gamma) =$$

$$= \partial^\beta g_{\beta\gamma} (\partial^\gamma A_\alpha - \partial_\alpha A^\gamma) = \partial^\beta (\partial_\beta A_\alpha - \partial_\alpha A_\beta) =$$

$$= \partial^\beta \partial_\beta A_\alpha - \partial_\alpha \overbrace{\partial^\beta A_\beta}^{=0 \text{ (calib. Lorentz)}} = \Box A_\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Box A_\alpha + \mu^2 A_\alpha = \frac{4\pi}{c} J_\alpha \qquad (93)$$

no limite estático: $\partial\vec{A}/\partial t = 0$ e

$$\nabla^2 A_\alpha - \mu^2 A_\alpha = -\frac{4\pi}{c} J_\alpha$$

Para uma carga puntiforme q na origem só não é nula a componente temporal do potencial $A_0 = \phi$, que assume a forma esferossimétrica de Yukawa:

$$\phi(x) = \frac{q}{r} e^{-\mu r} \qquad (94)$$

Agora, se o fóton tiver massa:

$$E^2 = (\hbar\omega)^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \overset{\text{de Broglie}}{=} \frac{h^2}{\lambda^2}c^2 + m^2c^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{h^2}{\hbar^2}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 c^2 + \left(\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^2 = k^2c^2 + \mu^2c^2 \equiv \omega_0^2 + \mu^2c^2 \qquad (95), (96)$$

10) Tensores canônicos e simétricos das tensões; leis de conservação

a) Generalização da hamiltoniana: tensor canônico das tensões

Definindo-se as variáveis canônicas do momento

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (99)$$

e a hamiltoniana:

$$H = \Sigma_i p_i \dot{q}_i - L \qquad (100)$$

se $\partial L/\partial t = 0 \Rightarrow dH/dt = 0 \Rightarrow H$ é uma constante do movimento

Agora, a energia é a componente temporal do quadrivetor energia-momento; queremos que a hamiltoniana se transforme de maneira idêntica. Como:

$$H = \int \mathcal{H} \, d^3x = \int \mathcal{H} \frac{d^3x}{dx_0} \, dx_0$$

e como $d^4x = d^3x \, dx_0 \Rightarrow \mathcal{H}$ se transforma como a componente $(0,0)$ de um tensor de segunda ordem.

Ademais, como $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_k(x), \partial^\alpha \phi_k(x))$ para os campos, introduzimos, em analogia com (100):

$$\mathcal{H} = \Sigma_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \phi_k}{\partial t}\right)} \frac{\partial \phi_k}{\partial t} - \mathcal{L} \qquad (101)$$

estendendo as derivadas temporais para $\partial_\alpha \phi_k$ e $\partial^\beta \phi_k$ vem a generalização da densidade de hamiltoniana com o <u>tensor canônico de tensões</u>:

$$T^{\alpha\beta} = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_k)} \partial^\beta \phi_k - g^{\alpha\beta} \mathcal{L} \qquad (102)$$

Na ausência de fontes ($J^\alpha = 0$), a lagrangeana do campo eletromagnético livre é:

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \qquad (103)$$

/ /

substituindo $\sum_k \phi_k$ por A^λ (com somatório implícito):

$$T^{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial(\partial_\alpha A^\lambda)} \partial^\beta A^\lambda - g^{\alpha\beta}\mathcal{L}_{em} \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{16\pi}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) =$$

$$= -\frac{1}{16\pi}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} A^\sigma - \partial_\nu g_{\mu\chi} A^\chi)(g^{\mu\beta}\partial_\beta A^\nu - g^{\nu\rho}\partial_\rho A^\mu) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial(\partial_\alpha A^\lambda)} = -\frac{1}{16\pi}\left(g_{\nu\sigma}\delta^\mu_\alpha \delta^\sigma_\lambda F^{\mu\nu} - g_{\mu\chi}\delta^\nu_\alpha\delta^\chi_\lambda F^{\mu\nu} + \right.$$

$$\left. + F_{\mu\nu} g^{\mu\beta}\delta^\beta_\alpha \delta^\nu_\lambda - F_{\mu\nu} g^{\nu\rho}\delta^\rho_\alpha\delta^\mu_\lambda\right) =$$

$$= -\frac{1}{16\pi}\left(g_{\nu\lambda}F^{\alpha\nu} - \underset{(-F^{\alpha\mu})}{g_{\mu\lambda}F^{\mu\alpha}} + \underset{(g^{\alpha\mu})}{g^{\mu\alpha}}F_{\mu\lambda} - \underset{(+g^{\alpha\nu}F_{\nu\lambda})}{g^{\nu\alpha}F_{\lambda\nu}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{16\pi}\left(F^\alpha_{\ \lambda} + F^\alpha_{\ \lambda} + g^{\alpha\mu}F_{\mu\lambda} + g^{\alpha\nu}F_{\nu\lambda}\right) =$$

$$= -\frac{1}{16\pi}\left(g^{\alpha\mu}F_{\mu\lambda} + g^{\alpha\mu}F_{\mu\lambda} + g^{\alpha\mu}F_{\mu\lambda} + g^{\alpha\mu}F_{\mu\lambda}\right) = -\frac{1}{4\pi} g^{\alpha\mu}F_{\mu\lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi} g^{\alpha\mu}F_{\mu\lambda}\partial^\beta A^\lambda - g^{\alpha\beta}\mathcal{L}_{em} \qquad (104)$$

como

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & Ex & Ey & Ez \\ -Ex & 0 & -Bz & By \\ -Ey & Bz & 0 & -Bx \\ -Ez & -By & Bx & 0 \end{pmatrix} \text{ e } F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -Ex & -Ey & -Ez \\ Ex & 0 & -Bz & By \\ Ey & Bz & 0 & -Bx \\ Ez & -By & Bx & 0 \end{pmatrix}, \text{ vem:}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{16\pi}\big(0 - Ex^2 - Ey^2 - Ez^2 +$$
$$-Ex^2 + 0 + Bz^2 + By^2 +$$
$$-Ey^2 + Bz^2 + 0 + Bx^2 +$$
$$-Ez^2 + By^2 + Bx^2 + 0\big) = \frac{1}{8\pi}(E^2 - B^2)$$

vejamos em particular T^{00}:

$$T^{00} = -\frac{1}{4\pi}(F_{0\lambda}\partial^0 A^\lambda) - \frac{1}{8\pi}(E^2 - B^2) = -\frac{1}{4\pi}\left(Ex\frac{\partial Ax}{c\partial t} + Ey\frac{\partial Ay}{c\partial t} + Ez\frac{\partial Az}{c\partial t}\right) - \frac{1}{8\pi}(E^2 - B^2) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}\cdot\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) - \frac{1}{8\pi}(E^2 - B^2),$$

mas $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E} + \vec{\nabla}\phi \Rightarrow$ ok, esperado

adicional

$$T^{00} = \frac{E^2}{4\pi} + \frac{\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\phi}{4\pi} - \frac{1}{8\pi}(E^2 - B^2) = \frac{(E^2+B^2)}{8\pi} + \frac{\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\phi}{4\pi} \quad (105')$$

numa região livre de fontes: $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\phi) = \vec{E}\cdot\vec{\nabla}\phi$

e numa região localizada: $\int_V \vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\phi) = \oint_S (\vec{E}\phi)\cdot\hat{n}\,da = 0$

então: $$\int_V T^{00}\,d^3x = \frac{1}{8\pi}\int (E^2+B^2)\,d^3x \equiv \mathcal{E}_{campo} \quad (106')$$

e as outras componentes do tensor de tensões?

analogamente: $$T^{0i} = \frac{1}{4\pi}(\vec{E}\times\vec{B})_i + \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\cdot(A_i\vec{E}) \quad (105'')$$

$$T^{i0} = \frac{1}{4\pi}(\vec{E}\times\vec{B})_i + \frac{1}{4\pi}\left[(\vec{\nabla}\times(\phi\vec{B}))_i - \frac{\partial}{\partial x_0}(\phi E_i)\right] \quad (105'')$$

que, no entanto, não é um tensor simétrico. A divergência em (105'') indica que também para T^{0i}:

$$\int_V T^{0i}\,d^3x = \frac{1}{4\pi}\int (\vec{E}\times\vec{B})_i\,d^3x \equiv c P^i_{campo} \quad (106'')$$

As eqs. (106) sugerem uma generalização covariante do teorema de Poynting: $\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = 0$

Vamos mostrar que: $\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ (107)

Partindo de (102), vem que:

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = \Sigma_k\, \partial_\alpha\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_k)}\partial^\beta\phi_k\right] - \partial^\beta\mathcal{L} =$$

$$= \Sigma_k\left[\partial_\alpha\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_k)}\right)\partial^\beta\phi_k + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_k)}\right)\partial^\beta(\partial_\alpha\phi_k)\right] - \partial^\beta\mathcal{L} =$$

Euler-Lagrange

$$= \underbrace{\Sigma_k\left[\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_k}\right)\partial^\beta\phi_k + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_k)}\right)\partial^\beta(\partial_\alpha\phi_k)\right]}_{\partial^\beta\mathcal{L}\text{, pois } \mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_k,\,\partial_\alpha\phi_k)} - \partial^\beta\mathcal{L} =$$

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = \partial^\beta\mathcal{L} - \partial^\beta\mathcal{L} = 0$$

/ /

então (107) integrada é:

$$0 = \int_V \partial_\alpha T^{\alpha\beta} d^3x = \partial_0 \int_V T^{0\beta} d^3x + \int_V \partial_i T^{i\beta} d^3x \to 0 \text{ (campos localizados)}$$

divergência

de onde as 4 equações: $0 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_V T^{0\beta} d^3x$, $\beta = 0,1,2,3$

com (106) são: $\frac{d}{dt}\mathcal{E}_{campo} = 0$, $\frac{d\vec{P}_{campo}}{dt} = 0$ (108)

as densidades de energia e momento são:

$$u = \frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2) \quad , \quad \vec{g} = \frac{1}{4\pi c}(\vec{E}\times\vec{B})$$

b) O tensor simétrico das tensões

O tensor canônico de tensões encontrado até agora, $T^{\alpha\beta}$, é conveniente, mas tem a desvantagem de não ser simétrico (vide (105)). A questão da simetria aparece quando analisamos o momento angular do campo: $\vec{L}_{campo} = \frac{1}{4\pi c}\int \vec{x}\times(\vec{E}\times\vec{B})\, d^3x$

A generalização covariante da densidade de momento angular é um tensor de ordem 3:

$$M^{\alpha\beta\gamma} = T^{\alpha\beta}x^\gamma - T^{\alpha\gamma}x^\beta \tag{109}$$

e sua lei de conservação exige que a quadridivergência se anule:

$$\partial_\alpha M^{\alpha\beta\gamma} = 0 \, , \tag{110}$$

mas

$$\partial_\alpha M^{\alpha\beta\gamma} = \partial_\alpha(T^{\alpha\beta}x^\gamma - T^{\alpha\gamma}x^\beta) =$$

$$= (\partial_\alpha T^{\alpha\beta})x^\gamma + T^{\alpha\beta}\partial_\alpha x^\gamma - (\partial_\alpha T^{\alpha\gamma})x^\beta - T^{\alpha\gamma}\partial_\alpha x^\beta =$$

$$(107) \to = 0\cdot x^\gamma + T^{\alpha\beta}\delta^\gamma_\alpha - 0\cdot x^\beta - T^{\alpha\gamma}\delta^\beta_\alpha =$$

$$= T^{\gamma\beta} - T^{\beta\gamma}$$

$\neq 0$, para o tensor canônico de tensões

Ademais, $T^{\alpha\beta}$ depende dos potenciais (e não é invariante sob transf. de calibre) e seu traço não é nulo.

Substituindo-se em (104): $\partial^\beta A^\lambda = -F^{\lambda\beta} + \partial^\lambda A^\beta$ e reagrupando-se os termos:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left(g^{\alpha\mu} F_{\mu\lambda} F^{\lambda\beta} + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) - \frac{1}{4\pi} g^{\alpha\mu} F_{\mu\lambda} \partial^\lambda A^\beta \tag{111}$$

o segundo termo é

$$T_D^{\alpha\beta} \equiv -\frac{1}{4\pi} g^{\alpha\mu} F_{\mu\lambda} \partial^\lambda A^\beta = -\frac{1}{4\pi} g^{\alpha\mu} \left(g_{\mu\gamma} F^{\gamma\delta} g_{\delta\lambda} \right) \partial^\lambda A^\beta =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \delta^\alpha_\gamma F^{\gamma\delta} \partial_\delta A^\beta = -\frac{1}{4\pi} F^{\alpha\delta} \partial_\delta A^\beta = -\frac{1}{4\pi} F^{\alpha\lambda} \partial_\lambda A^\beta =$$

$$= \frac{1}{4\pi} F^{\lambda\alpha} \partial_\lambda A^\beta = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\lambda\alpha} \partial_\lambda A^\beta + A^\beta \partial_\lambda F^{\lambda\alpha} \right) =$$

↳ eqs. Maxwell com $J^\alpha = 0$

$$= \frac{1}{4\pi} \partial_\lambda \left(F^{\lambda\alpha} A^\beta \right) \tag{112}$$

que é uma quadridivergência, então: $\int_V T_D^{\alpha\beta} d^3x = 0$, para campos localizados, ademais: $\partial_\alpha T_D^{\alpha\beta} = \frac{\partial_\alpha \partial_\lambda (F^{\lambda\alpha} A^\beta)}{4\pi} = 0$, pois $F^{\lambda\alpha}$ é antissimétrico.

Então, removemos o segundo termo e definimos o tensor simétrico das tensões:

$$\Theta^{\alpha\beta} \equiv T^{\alpha\beta} - T_D^{\alpha\beta}$$

ou

$$\Theta^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left(g^{\alpha\mu} F_{\mu\lambda} F^{\lambda\beta} + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F_{\mu\lambda} F^{\mu\lambda} \right) \tag{113}$$

Vimos que: $F_{\mu\lambda} F^{\mu\lambda} = 2(B^2 - E^2)$

agora, se

$$g^{\alpha\mu} F_{\mu\lambda} F^{\lambda\beta} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Vem:

$$\Theta^{00} = \frac{1}{4\pi}\left(g^{0\mu} F_{\mu\lambda} F^{\lambda 0} + \frac{1}{4} g^{00} F_{\mu\lambda} F^{\mu\lambda} \right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(E^2 + \frac{1}{2}(B^2 - E^2) \right) = \frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2) \tag{114'}$$

$$\Theta^{0i} = \frac{1}{4\pi}\left(g^{0\mu} F_{\mu\lambda} F^{\lambda i} + \frac{1}{4} \cancelto{0}{g^{0i}} F_{\mu\lambda} F^{\mu\lambda} \right), \quad i = 1,2,3 \tag{114''}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(g^{00} F_{0\lambda} F^{\lambda i} + \cancelto{0}{g^{0j}} F_{j\lambda} F^{\lambda i} \right) = \frac{1}{4\pi}(\vec{E} \times \vec{B})_i, \quad j = 1,2,3$$

$$\Theta^{ij} = -\frac{1}{4\pi}\left[E_iE_j + B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}(E^2+B^2)\right] \qquad (114''')$$

$$(i,j = 1,2,3)$$

o tensor $\Theta^{\alpha\beta}$ pode ser escrito em bloco:

$$\Theta^{\alpha\beta} = \left(\begin{array}{c|c} u & c\vec{g} \\ \hline c\vec{g} & -T_{ij}^{(M)} \end{array}\right), \qquad (115)$$

onde $T_{ij}^{(M)}$ é o tensor de tensões de Maxwell:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left[E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{E} + \vec{B}\cdot\vec{B})\delta_{\alpha\beta}\right] \qquad (6.120)$$

as formas covariante e mistos do tensor $\Theta^{\alpha\beta}$ são:

$$\Theta_{\alpha\beta} = \left(\begin{array}{c|c} u & -c\vec{g} \\ \hline -c\vec{g} & -T_{ij}^{(M)} \end{array}\right), \quad \Theta^{\alpha}{}_{\beta} = \left(\begin{array}{c|c} u & -c\vec{g} \\ \hline c\vec{g} & T_{ij}^{(M)} \end{array}\right), \quad \Theta_{\alpha}{}^{\beta} = \left(\begin{array}{c|c} u & c\vec{g} \\ \hline -c\vec{g} & T_{ij}^{(M)} \end{array}\right)$$

A lei diferencial de conservação é:

$$\partial_\alpha \Theta^{\alpha\beta} = 0 \qquad (116)$$

que inclui o teorema de Poynting:

para $\beta = 0$: $\quad 0 = \partial_\alpha \Theta^{\alpha 0} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S}\right)$, onde $\vec{S} = c^2\vec{g}$ é o vetor de Poynting.

e a conservação do momento linear: $\quad \partial u/\partial t + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = -\vec{J}\cdot\vec{E} \quad (6.108)$

para $\beta = i = 1,2,3$: $\quad 0 = \partial_\alpha \Theta^{\alpha i} = \frac{\partial g_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}T_{ij}^{(M)}$

na ausência de fontes. $\quad d/dt\,(\vec{P}_{mec} + \vec{P}_{camp})_\alpha = \sum_\beta \int_V \partial/\partial x_\beta\, T_{\alpha\beta}\, d^3x \quad (6.121)$

A conservação do momento angular, definida pelo tensor

$$M^{\alpha\beta\gamma} = \Theta^{\alpha\beta}x^\gamma - \Theta^{\alpha\gamma}x^\beta$$

fica assegurada por (116) e pela simetria de $\Theta^{\alpha\beta}$.

c) Leis de conservação na presença de fontes

Considere:

$$\partial_\alpha\Theta^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left(\partial_\alpha g^{\alpha\mu}F_{\mu\lambda}F^{\lambda\beta} + \frac{1}{4}\partial_\alpha g^{\alpha\beta}F_{\mu\lambda}F^{\mu\lambda}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\partial^\mu(F_{\mu\lambda}F^{\lambda\beta}) + \frac{1}{4}\partial^\beta(F_{\mu\lambda}F^{\mu\lambda})\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[(\partial^\mu F_{\mu\lambda})F^{\lambda\beta} + F_{\mu\lambda}(\partial^\mu F^{\lambda\beta}) + \frac{1}{4}(\partial^\beta F_{\mu\lambda})F^{\mu\lambda} + \frac{1}{4}F_{\mu\lambda}(\partial^\beta F^{\mu\lambda})\right]$$

mas $(\partial^\beta F_{\mu\lambda}) F^{\mu\lambda} = \partial^\beta (g_{\mu\gamma} F^{\gamma\delta} g_{\delta\lambda}) F^{\mu\lambda} = \partial^\beta (F^{\gamma\delta}) g_{\mu\gamma} g_{\delta\lambda} F^{\mu\lambda} =$
$= \partial^\beta (F^{\gamma\delta}) g_{\mu\gamma} F^{\mu}_{\delta} = \partial^\beta (F^{\gamma\delta}) F_{\gamma\delta} = F_{\mu\lambda} (\partial^\beta F^{\mu\lambda})$

$$\Rightarrow \partial_\alpha \Theta^{\alpha\beta} = 1/4\pi \left[(\partial^\mu F_{\mu\lambda}) F^{\lambda\beta} + F_{\mu\lambda} (\partial^\mu F^{\lambda\beta}) + \tfrac{1}{2} F_{\mu\lambda} (\partial^\beta F^{\mu\lambda}) \right]$$

de (89) vemos que: $\partial^\mu F_{\mu\lambda}/4\pi = J_\lambda / c \Rightarrow$

$$\Rightarrow \partial_\alpha \Theta^{\alpha\beta} + F^{\beta\lambda} J_\lambda / c = 1/8\pi \, F_{\mu\lambda} \left[\partial^\mu F^{\lambda\beta} + \partial^\mu F^{\lambda\beta} + \partial^\beta F^{\mu\lambda} \right]$$

de (11.143) vimos: $\partial^\mu F^{\lambda\beta} + \partial^\beta F^{\mu\lambda} + \partial^\lambda F^{\beta\mu} = 0$

e com $-\partial^\lambda F^{\beta\mu} = + \partial^\lambda F^{\mu\beta} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \partial_\alpha \Theta^{\alpha\beta} + F^{\beta\lambda} J_\lambda / c = \frac{1}{8\pi} F_{\mu\lambda} (\partial^\mu F^{\lambda\beta} + \partial^\lambda F^{\mu\beta}) = 0 \, ,$$

pois o lado direito é a contração de um objeto simétrico e outro antissimétrico nos índices μ e λ. Assim, a divergência é:

$$\partial_\alpha \Theta^{\alpha\beta} = - F^{\beta\lambda} J_\lambda / c \, , \qquad (118)$$

com componente temporal:

$$\frac{1}{c} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} \right) = -\frac{1}{c} \vec{J} \cdot \vec{E} \qquad (119)$$

$= (6.108)$

e componente espacial:

$$\frac{\partial g_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial T_{ij}^{(M)}}{\partial x_i} = - \left[\rho E_i + \frac{1}{c} (\vec{J} \times \vec{B})_i \right] , \qquad (120)$$

$= (6.121)$

onde usamos $J^\alpha = (c\rho, \vec{J})$

O quadrivetor no 2º membro de (108) é a <u>densidade de força de Lorentz</u>:

$$f^\beta \equiv \frac{1}{c} F^{\beta\lambda} J_\lambda = \left(\frac{1}{c} \vec{J} \cdot \vec{E} \, , \, \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{B} \right) \qquad (121)$$

que integrada dá a equação de movimento das partículas:

$$\int f^\beta \, d^3x = \frac{d}{dt} P^\beta_{partículas}$$

e assim:

$$\int d^3x \left(\partial_\alpha \Theta^{\alpha\beta} + f^\beta \right) = \frac{d}{dt} \left(P^\beta_{campo} + P^\beta_{partículas} \right) = 0$$

que é a conservação do quadrimomento para o sistema (campo + partículas)