

## Cap. 12 | Dinâmica de Partículas Relativísticas e Campos Electromagnéticos

1) Lagrangeana e Hamiltoniana de uma partícula carregada relativística em campo electromagnético externo

A) eqs de movimento

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e \left[ \vec{E} + \frac{\vec{u} \times \vec{B}}{c} \right], \quad \frac{de}{dt} = e \vec{u} \cdot \vec{E} \quad (1)$$

podem ser escritas na forma covariante

$$\frac{dp^\alpha}{dt} = m \frac{du^\alpha}{dt} = \frac{q}{c} F^{\alpha\mu} u_\mu, \quad (2)$$

onde  $m$  é a massa,  $t$  o tempo próprio e  $u^\alpha = (pc, p\vec{u}) = p^\alpha/m$  é a quadrivelocidade da partícula

Formulação lagrangeana: o sistema é descrito pelas coordenadas generalizadas  $q(t)$  e velocidades generalizadas  $\dot{q}(t)$  através da função lagrangeana  $L(q(t), \dot{q}(t), t)$ .

O princípio da mínima ação: a ação

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt \quad (3)$$

é um extremo, isto é,  $\delta A = 0$  e

obtem-se as equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (4)$$

que são equivalentes às leis de Newton.

a) tratamento elementar da lagrangeana relativística

A integral da ação deve ser um escalar de Lorentz e queremos

/ /

que  $\delta A = 0$  em todos os referenciais invariáveis; substituindo  $T \rightarrow pL$ :

$$A = \int_{z_1}^{z_2} pL dz, \quad (5)$$

já que  $dt = pL dz$ .

Se  $\delta A = 0$  é invariante  $A$  é um escalar invariante, como  $dz$  é invariante  $pL$  deve ser invariante e como  $p^t$  é um número, então  $L$  é um escalar invariante de Lorentz.

Uma partícula livre (com energia e momento constantes) tem quadrado velocidade constante, a função invariante da velocidade mais simples é:

$$U_d U^d = c^2$$

e podemos escrever uma lagrangeana  $L \propto p^{-1}$  ou

$$\frac{L}{mc^2} - mc^2 p^{-1} = -mc^2 \sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad (6)$$

$$\text{tal que } \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial u} = +mc^2 \frac{1}{c} \frac{\dot{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = c^2 m p u$$

$$\text{e por (4) tem: } \frac{d}{dt} (p_m u) = 0,$$

ou seja, a lei de Newton para a partícula livre,

Seja uma partícula carregada num potencial escalar  $\Phi$ , a energia potencial é  $V = e\Phi$ . Como a lagrangeana não-relativística é  $L = T - V$ , (6) deve reduzir-se a:

$$L_{int} = -V \xrightarrow{v \ll c} L_{int}^{NR} = -e\Phi \quad (7')$$

queremos encontrar o escalar invariante de Lorentz para  $p_{int}$  que reduza a  $-e\Phi$  em NRCC.

Como  $\Phi$  é a parte temporal de  $A^\alpha = (\Phi, \vec{A})$ , podemos construir os escalares  $x_d A^d$  e  $u_d A^d$ , mas  $p_{int} = f(u^\alpha)$  então a forma mais simples de  $L$  é:

$$L_{int} = -\frac{e}{c} U_d A^d = -\frac{e}{c} (p_c, \vec{p}_n) \left( \begin{matrix} \Phi \\ \vec{A} \end{matrix} \right) = -e\bar{\Phi} + \frac{e \vec{u} \cdot \vec{A}}{c} \quad (8)$$

de (6) e (8) :

$$L = L_{\text{grav}} + L_{\text{int}} = -mc^2 \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \vec{u} \cdot \vec{A} - e\Phi \quad (9)$$

O momento canônico  $\vec{P}$  conjugado da coordenada  $\vec{x}$  é obtido por

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial u_i} = p_{mu_i} + \frac{e}{c} A_i \quad (10)$$

$$\Rightarrow \vec{P} = \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}, \quad (11)$$

onde  $\vec{p} = p_{mu} \vec{u}$  é o momento relativístico da partícula.

A hamiltoniana é uma função  $H = H(\vec{x}, \vec{P})$  e é uma constante do movimento se  $L$  não depender explicitamente do tempo, i.e. definida

$$H = \vec{P} \cdot \vec{u} - L \quad (12)$$

$$\text{de (11)} : \vec{p} = mp\vec{u} = c\vec{P} - e\vec{A} \Rightarrow \vec{u} = \frac{c\vec{P} - e\vec{A}}{mp} = \frac{c\vec{P} - e\vec{A}}{E/c^2} =$$

$$\vec{u} = \frac{c\vec{P} - e\vec{A}}{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}} = \frac{c\vec{P} - e\vec{A}}{\sqrt{(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 + m^2 c^2}} \quad (13)$$

$$\text{de onde} : H = \vec{P} \cdot \vec{u} - L = \vec{P} \cdot (\frac{c\vec{P} - e\vec{A}}{mp}) + \frac{mc^2 - e}{mp} \vec{u} \cdot \vec{A} + e\Phi =$$

$$H = \frac{cp^2 - e\vec{P} \cdot \vec{A} + m^2 c^2}{mp} - e \frac{(c\vec{P} - e\vec{A}) \cdot \vec{A}}{mp} + e\Phi =$$

$$H = \frac{(c\vec{P} - e\vec{A})^2}{mp} + m^2 c^4 + e\Phi = \sqrt{(c\vec{P} - e\vec{A})^2 + m^2 c^4} + e\Phi \quad (14)$$

$$\epsilon = mc^2 p = \sqrt{p^2 + m^2 c^2}$$

$$\text{Note que } H = \sqrt{(c\vec{P} - e\vec{A})^2 + m^2 c^4} + e\Phi \equiv W \Rightarrow$$

$$(W - e\Phi)^2 - (c\vec{P} - e\vec{A})^2 = (mc^2)^2 \quad (15)$$

é invariante e está na forma do produto escalar  $p_\alpha p^\alpha = (mc)^2$  (16)

$$\text{portanto} : p^\alpha \equiv (E/c, \vec{p}) = \left( \frac{1}{c}(W - e\Phi), \vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) \quad (17)$$

b) tratamento explicitamente covariante da lagrangiana relativística

Densidade covariante : subst.  $\vec{x}, \vec{u}$  por  $x^\alpha, u^\alpha$ , a eq. (6)

/ /

pode ser rescrita como:  $L_{\text{inv}} = -\frac{mc}{r} \sqrt{u_x u^x}$  (18)

e a integral da ação fica:

$$A = -mc \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{u_x u^x} dz \quad (19)$$

com a equação do vínculo  $u_x u^x = c^2$  (20a)

$$\Rightarrow \frac{d}{dz} (u_x u^x) = 0 \Rightarrow \frac{du_x}{dz} u^x + u_x \frac{du^x}{dz} = 0 \quad (20b)$$

$$= \frac{du_x}{dz} f^{x\beta} g_{\beta x} u^x + u_x \frac{du^x}{dz} = u_p \frac{du^p}{dz} + u_x \frac{du^x}{dz} = 2u_x \frac{du^x}{dz} = 0$$

$$\text{o integrando de (19) é: } \sqrt{u_x u^x} = \sqrt{\frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx_\alpha}{ds}} = \sqrt{\frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx_\alpha}{ds} g^{\beta\alpha}}$$

$$\text{e a ação fica: } A = -mc \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx_\alpha}{ds}} ds, \quad (21)$$

com  $x^\alpha(s)$ , onde  $s$  é um parâmetro  $s = s(z)$  monótona e crescente então  $\tilde{L}(s)$  é a lagrangeana escrita em função de um parâmetro livre  $s$ :  $A = \int \tilde{L} ds \Rightarrow$

$$\text{eq. de Euler-Lagrange: } \frac{d}{ds} \left( \frac{d\tilde{L}}{d(x^\alpha/ds)} \right) - \frac{d^2\tilde{L}}{d(x^\alpha/ds)^2} = 0 \quad (22)$$

do cálculo variacional:  $\frac{d\tilde{L}}{d(x^\alpha/ds)} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow mc \frac{d}{ds} \left[ 2 \sqrt{\frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx_\alpha}{ds}} / \frac{d(x^\alpha/ds)}{ds} \right] = \frac{mc}{2} \frac{d}{ds} \left[ \frac{\frac{dx^\alpha}{ds} + \frac{dx_\alpha}{ds}}{\sqrt{\frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx_\alpha}{ds}}} \right] =$$

$$= mc \frac{d}{ds} \left[ \frac{\frac{dx^\alpha}{ds}}{\sqrt{\frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx_\alpha}{ds}}} \right] = 0 \quad (*)$$

impondo o vínculo  $u_x u^x = c^2$ , vem:

$$A = -mc \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{u_x u^x} dz = -mc \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx_\alpha}{ds}} ds$$

de onde concluímos que  $ds = dz$  e que

$$\sqrt{\frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx_\alpha}{ds}} ds = \sqrt{u_x u^x} dz = c dz \Rightarrow \frac{d}{dz} = \frac{c}{\sqrt{\frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx_\alpha}{ds}}} \frac{d}{ds}$$

que com a eq. (\*) vem:  $m \frac{d^2 x^\alpha}{dz^2} = 0$

a eq. de mov. da partícula livre

Para uma partícula carregada num campo externo, introduzimos o termo de interação:

$$A = - \int_{S_1}^{S_2} \left[ mc \sqrt{g} \frac{dx_\alpha dx_\beta}{ds} + \frac{e}{c} \frac{dx_\alpha A^\alpha(x)}{ds} \right] ds \quad (23)$$

com a "quadrilaçãogama":  $\tilde{L} = - \left[ mc \sqrt{g} \frac{dx_\alpha dx_\beta}{ds} + \frac{e}{c} \frac{dx_\alpha A^\alpha(x)}{ds} \right] \quad (25)$

a eq. de Euler-Lagrange fica:

$$mc \frac{d}{ds} \left[ \frac{\frac{dx^\alpha}{ds}}{\sqrt{\frac{dx_\alpha}{ds} \cdot \frac{dx^\alpha}{ds}}} + \frac{e}{c} A^\alpha \right] - \frac{e}{c} \frac{dx_\beta}{ds} \frac{\partial^\alpha A^\beta}{\partial x^\beta} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow m \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \frac{e}{c} \frac{d}{ds} A^\alpha(x) - \frac{e}{c} \frac{dx_\beta}{ds} \frac{\partial^\alpha \partial^\beta A^\alpha}{\partial x^\beta} = 0$$

como  $\frac{dA^\alpha}{dc} = \frac{dx_\beta}{dc} \frac{dA^\alpha}{dx_\beta} = \frac{dx_\beta}{dc} \frac{\partial^\beta A^\alpha}{\partial x^\beta}$ , na eq. de mov:

$$\Rightarrow m \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \frac{e}{c} \left( \frac{\partial^\beta A^\alpha - \partial^\alpha A^\beta}{\partial x^\beta} \right) \frac{dx_\beta}{ds} = 0 \Rightarrow$$

$$m \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} = \frac{e}{c} \left( \frac{\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha}{\partial x^\beta} \right) \frac{dx_\beta}{ds} \quad (26)$$

que é a equação do movimento (2):  $m \frac{du^\alpha}{ds} = \frac{e}{c} F^\alpha_\beta u^\beta$

formulação hamiltoniana, seja o momento conjugado:

$$p^\alpha = - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial (dx^\alpha/ds)} = mu^\alpha + \frac{e}{c} A^\alpha \quad (27)$$

$$\Rightarrow u^\alpha = \frac{1}{m} \left( p^\alpha - \frac{e}{c} A^\alpha \right)$$

definindo a hamiltoniana:  $\tilde{H} = h_2 (p_\alpha u^\alpha + \tilde{L})$ , (28)

com  $\tilde{L} = -mc \sqrt{u_\alpha u^\alpha} - (e/c) u_\alpha A^\alpha = \\ = -mc \sqrt{\frac{1}{m^2} (p_\alpha - \frac{e}{c} A_\alpha)(p^\alpha - \frac{e}{c} A^\alpha)} - \frac{e}{c} (p_\alpha - \frac{e}{c} A_\alpha) A^\alpha$

/ /

então:

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \left[ P_\alpha \left( \frac{P^\alpha - \frac{e}{c} A^\alpha}{m} \right) - \left( \frac{e}{c} \right) \left( P_\alpha \frac{P^\alpha - \frac{e}{c} A^\alpha}{m} \right) A^\alpha - mc \sqrt{u_\alpha u^\alpha} \right] \Rightarrow$$

$$\tilde{H} = \frac{1}{2m} (P_\alpha - \frac{e}{c} A_\alpha) (P^\alpha - \frac{e}{c} A^\alpha) - mc^2 \quad (29)$$

e as equações de Hamilton levam a

$$\frac{dx^\alpha}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_\alpha} = \frac{1}{m} (P^\alpha - \frac{e}{c} A^\alpha) \quad \left. \right\} \quad (30)$$

$$\frac{dP^\alpha}{dt} = - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x_\alpha} = \frac{e}{mc} (P_\beta - \frac{e}{c} A_\beta) \delta^\alpha_\beta A^\beta \quad \left. \right\}$$

onde a 2ª eq. é a força de Lorentz-relativística

### 3) Movimento num campo magnético uniforme e estatico

Para  $\vec{B}$  uniforme e estatico, as eqs de movimento são:

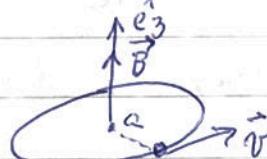
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = mp \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B}, \quad \frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0, \quad (37)$$

onde  $E = \text{const.} \Rightarrow \vec{v} = \text{const.} \Rightarrow p = \text{const.}$ , então

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \times \left( \frac{q\vec{B}}{pmc} \right) \equiv \vec{v} \times \vec{\omega}_B, \quad (38)$$

$$\text{onde } \vec{\omega}_B = \frac{q\vec{B}}{pmc} = \frac{qC\vec{B}}{pmc^2} = \frac{qC\vec{B}}{E} \quad (39)$$

e  $\omega_B$  é a frequência de precessão ou fiação



Seja  $\vec{B} = B\hat{e}_3$  e  $\vec{v} = v_{||}\hat{e}_3 + \vec{v}_{\perp}$   
de (38) vem:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = (v_{||}\hat{e}_3 + \vec{v}_{\perp}) \times \frac{qCB\hat{e}_3}{E} = \vec{v}_{\perp} \times \vec{\omega}_B = \frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt}$$

e  $v_{||}$  é uma constante do movimento. Para as outras componentes:

$$\frac{dv_1}{dt} = \omega_B v_2, \quad \frac{dv_2}{dt} = -\omega_B v_1$$

$$\text{que combinadas: } \frac{d^2 v_1}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\omega_B v_2) = -\omega_B^2 v_1$$

com solução geral:  $v_1 = v_0 e^{-i\omega_B t}$ , com  $v_0$  uma constante

$$\Rightarrow \frac{dv_1}{dt} = -i\omega_B v_0 e^{-i\omega_B t} = \omega_B v_2 \Rightarrow v_2 = -i v_1$$

$$\text{então } \vec{v} = v_{||}\hat{e}_3 + v_1\hat{e}_1 + v_2\hat{e}_2 = v_{||}\hat{e}_3 + v_0(\hat{e}_1 - i\hat{e}_2)e^{-i\omega_B t}$$

como a veloc. da rotação é uniforme:  $v_0 = 2\pi a/T = \omega_B a$

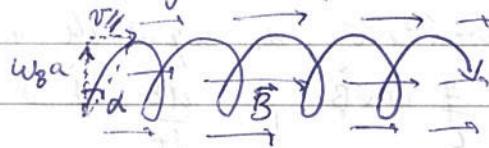
$$\text{dá } \vec{v}(t) = v_{||}\hat{e}_3 + \omega_B a(\hat{e}_1 - i\hat{e}_2)e^{-i\omega_B t} \quad (40)$$

e a é o raio da fiação. (Convenção: tomar a parte real)

integrando:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + v_{||}t\hat{e}_3 + i a(\hat{e}_1 - i\hat{e}_2)e^{-i\omega_B t} \quad (41)$$

que é a equação de uma trajetória helicoidal de raio  $a$   
e ângulo de passo  $\alpha = \tan^{-1}(\frac{v_{\parallel}}{w_B a})$



$$\text{de } v_{\perp}^2 = w_B a = \frac{q B a}{\mu m c} \Rightarrow c(p_{\perp} \mu m_{\perp}^{-1}) = c p_{\perp} = q B a$$

$$\text{de } 1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \Rightarrow 1 \text{ eV/C} = 5,34 \cdot 10^{-28} \text{ kg m/s}, \text{ pois } p = E/c \text{ (definição)}$$

$$1 \text{ kg m/s} = 1,87 \cdot 10^{27} \text{ eV/C} = \frac{3 \cdot 10^8}{e} \text{ eV/C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_{\perp} = \frac{q B a}{c} \Big|_{\text{física}} = \frac{q B a}{10^4 10^2} \Big|_{\text{SI}} = \frac{q B a}{10^6} \frac{3 \cdot 10^8 \text{ eV/C}}{e} = 300 \left( \frac{q}{e} \right) B a \text{ eV}$$

$$\text{se } q = e \Rightarrow p_{\perp} (\text{MeV/C}) = 3 \cdot 10^{-4} B(a) \cdot a(\text{cm}) \quad (42)$$

4) Movimento em campo  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  combinados, uniformes e estáticos

$\vec{E}$  e  $\vec{B}$  não paralelos ( $\vec{E} \perp \vec{B}$  ou  $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ ):

de  $\frac{dE}{dt} = q \vec{E} \cdot \vec{v}$  vemos que a energia não é constante e encontrar uma solução para  $\vec{v}$  é difícil

Contudo, podemos encontrar um ref. K', tal que

$$\frac{d\vec{p}'}{dt} = q \left( \vec{E}' + \vec{v}' \times \vec{B}' \right)$$

e em que  $\vec{E}' = 0$

caso i)  $|\vec{E}| < |\vec{B}|$

para  $\vec{E} \perp \vec{B}$  as eqs (11.148) ou (11.149) reduzem-se a:

$$\vec{E}'_H = \vec{E}_H, \quad \vec{E}'_L = \gamma (\vec{E}_L + \vec{\beta} \times \vec{B}) \quad (*)$$

$$\vec{B}'_H = \vec{B}_H, \quad \vec{B}'_L = \gamma (\vec{B}_L - \vec{\beta} \times \vec{E})$$

tomando  $\vec{\beta} = \beta \frac{(\vec{E} \times \vec{B})}{\vec{E} \cdot \vec{B}}$  simultaneamente  $\vec{\beta} \perp \vec{E}$  e  $\vec{\beta} \perp \vec{B}$ :

$$\vec{\beta} \perp \vec{E} \Rightarrow \vec{E}_H = 0 \quad \text{e} \quad \vec{E} = \vec{E}_L$$

$$\vec{\beta} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{B}_H = 0 \quad \text{e} \quad \vec{B} = \vec{B}_L$$

as transf. (\*) da  $\vec{E}$ :  $E'_\parallel = E_\parallel = 0$  (44')

$$\vec{E}'_\perp = \gamma \left( \vec{E} + \beta \frac{(\vec{E} \times \vec{B}) \times \vec{B}}{E \cdot B} \right) = \gamma \left( \vec{E} - \beta \frac{(\vec{B} \times \vec{E}) \times \vec{B}}{E \cdot B} \right) =$$

$$= \gamma \left( \vec{E} - \beta \frac{B^2 \vec{E}}{E B} \right) = \gamma \left( \vec{E} - \beta \frac{B \vec{E}}{E} \right)$$

tomando agora  $\beta = E/B < 1$  (que é possível) e

$$\vec{E}'_\perp = \gamma \left( \vec{E} - \frac{E B \vec{E}}{B E} \right) = 0 \quad \text{como queríamos} \quad (44'')$$

então:  $\vec{\beta} = \beta \frac{(\vec{E} \times \vec{B})}{E B} = \frac{E}{B} \frac{(\vec{E} \times \vec{B})}{E B} \Rightarrow \vec{\beta} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$  (43)

as transf. (\*) da  $\vec{B}$ :  $B'_\parallel = B_\parallel = 0$  (44''')

$$\vec{B}'_\perp = \vec{B}' = \gamma (\vec{B} - \vec{\beta} \times \vec{E}) = \gamma \left( \vec{B} - \frac{(\vec{E} \times \vec{B}) \times \vec{E}}{B^2} \right) =$$

$$= \gamma \left( \vec{B} - \frac{E^2 \vec{B}}{B^2} \right) = \gamma \vec{B} \left( 1 - \frac{E^2}{B^2} \right), \quad \text{mas}$$

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = (1 - E^2/B^2)^{-1/2} \Rightarrow \vec{B}' = \gamma \vec{B} \gamma^{-2} = \vec{B}/\gamma \quad (44''''')$$

neste referencial, portanto, temos somente  $\vec{B}$  e o movimento é helicoidal

caso ii)  $|E| > |B|$  (analogamente)

podemos encontrar um ref. K'' que move-se com

$$\vec{\beta}' = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{E^2} \quad (45)$$

em que temos somente  $\vec{E}$ :

$$\vec{E}''_\parallel = 0, \quad \vec{E}''_\perp = \vec{E}/\gamma' \quad (46)$$

$$\vec{B}''_\parallel = 0, \quad \vec{B}''_\perp = \gamma' (\vec{B} - \vec{\beta}' \times \vec{E}) = 0$$

e o movimento é hiperbólico com velocidade crescente

1 / 1

1. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
2. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
3. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
4. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
5. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
6. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
7. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
8. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
9. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
10. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
11. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
12. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
13. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
14. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
15. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
16. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
17. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
18. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
19. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
20. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
21. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
22. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
23. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
24. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
25. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
26. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
27. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
28. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
29. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
30. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
31. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
32. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
33. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
34. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
35. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
36. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
37. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
38. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
39. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
40. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
41. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
42. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
43. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
44. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
45. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
46. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
47. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
48. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
49. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)  
50. *Leucosia* sp. (Diptera: Syrphidae)

5) Arraste de partículas em campo magnético estático  
não-uniformes

$\vec{B}$  varia suavemente:  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} \gg a$  (raio de giragem)

1<sup>a</sup> aproximação: mov. helicoidal em torno de  $\vec{B}$ .

Seja  $\hat{n}$  tal que:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = g \hat{n}$  no ponto  $\hat{n} \cdot \vec{B} = 0$ , este é dentro da aproximação de 1<sup>a</sup> ordem:

$$\vec{w}_B(\vec{x}) = \underline{\underline{\epsilon}} \vec{B}(\vec{x}) \approx \vec{w}_0 \left[ 1 + \frac{1}{B_0} \left( \frac{\partial B}{\partial \xi} \right)_0 \hat{n} \cdot \vec{x} \right], \quad (47)$$

punc

com  $\xi$  a coordenada na direção  $\hat{n}$ .

A velocidade será  $\vec{v} = \vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp$  com mov. localmente helicoidal.

Seja  $\vec{v}_\perp = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$ , onde  $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$  e  $\vec{v}_1$  uma correção, de (47) vem:

$$\frac{d\vec{v}_\perp}{dt} = \vec{v}_1 \times \vec{w}_B(\vec{x}) \quad (48)$$

$$\frac{d\vec{v}_1}{dt} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{v}_1}{dt} \approx \vec{v}_0 \times \vec{w}_0 + \vec{v}_0 (\hat{n} \cdot \vec{x}_0) \frac{1}{B_0} \left( \frac{\partial B}{\partial \xi} \right)_0 + \dots + \vec{v}_1 \times \vec{w}_0 + \dots$$

$$\text{que em 1<sup>a</sup> ordem: } \frac{d\vec{v}_1}{dt} \approx \left[ \vec{v}_1 + \vec{v}_0 (\hat{n} \cdot \vec{x}_0) \frac{1}{B_0} \left( \frac{\partial B}{\partial \xi} \right)_0 \right] \times \vec{w}_0 \quad (49)$$

$$\text{de (40): } \vec{v}(t) = \vec{v}_\parallel \hat{e}_3 + w_B a (\hat{e}_1 - i \hat{e}_2) e^{-iwt} \Rightarrow \vec{v}_0 = -\vec{w}_0 \times (\vec{x}_0 - \vec{X}) \quad (50)$$

$$\text{de (41): } \vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_\parallel t + \hat{c}_3 + i a (\hat{e}_1 - i \hat{e}_2) e^{iwt} \Rightarrow (\vec{x}_0 - \vec{X}) = \frac{1}{w_0^2} (\vec{w}_0 \times \vec{v}_0) \quad (51)$$

onde  $\vec{X}$  é o centro do raio de girado do mov. circular não-perturbado ( $\vec{X} = 0$ , neste caso):  $\vec{v}_0 = -\vec{w}_0 \times \vec{x}_0$  que em (49):

$$\frac{d\vec{v}_1}{dt} \approx \left[ \vec{v}_1 - \frac{1}{B_0} \left( \frac{\partial B}{\partial \xi} \right)_0 \vec{w}_0 \times \vec{x}_0 (\hat{n} \cdot \vec{x}_0) \right] \times \vec{w}_0 \quad (52)$$

excluindo-se os termos oscilatórios,  $\vec{v}_1$  tem valor médio não-nulo:

$$\vec{v}_A = \langle \vec{v}_1 \rangle = \frac{1}{B_0} \left( \frac{\partial B}{\partial \xi} \right)_0 \vec{w}_0 \times \langle (\vec{x}_0)_\perp (\hat{n} \cdot \vec{x}_0) \rangle \quad (53)$$

agora, as componentes de  $\vec{x}_0$  oscilam com amplitude  $a$  e somente a componente paralela a  $\hat{n}$  contribui para a média,

/ /

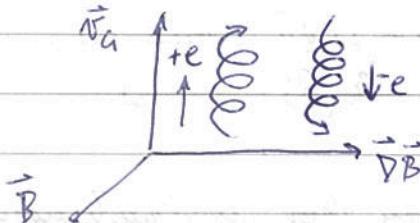
$$\text{assim: } \langle (\vec{x}_0)_{\perp} (\hat{n} \cdot \vec{x}_0) \rangle = \frac{a^2}{2} \hat{n} \quad (53)$$

$\rightarrow$  média temporal do seno cos

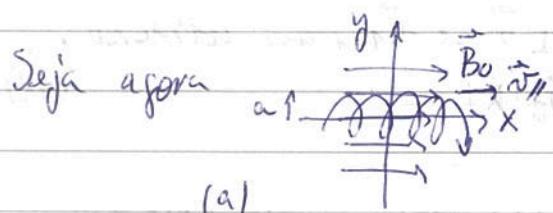
$$\Rightarrow \vec{v}_a = \frac{a^2}{2} \frac{1}{B_0} \left( \frac{\partial B}{\partial \phi} \right) (\vec{w}_0 \times \hat{n}) \quad (54)$$

$$\text{ou} \quad \vec{v}_a = \frac{a}{w_B a} \frac{1}{2 B^2} (\vec{B} \times \vec{\nabla}_{\perp} \vec{B}) \quad (55)$$

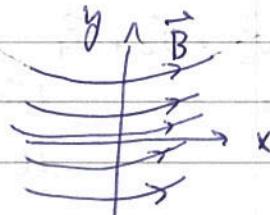
Se  $|\vec{\nabla}B/B| \ll 1 \Rightarrow v_a \ll w_B a$  (veloc. alreta < veloc. orbital)



$R \gg a$



(a) (b)



o centro divisor da espiral acompanha a curvatura de  $\vec{B}$ , ou seja, tem uma aceleração centrífuga  $v_{\parallel}^2/R$ , que é equivalente a uma força centrífuga efectiva:

$$e\vec{F}_c = \gamma m \frac{v_{\parallel}^2}{R} \vec{R} \quad (56)$$

além de  $\vec{B}_0$ . De (43) vem a velocidade de alreta:

$$\vec{v}_c \approx c \frac{\gamma m}{e} v_{\parallel}^2 \frac{\vec{R} \times \vec{B}_0}{R^2 B_0^2} \quad (57)$$

$$\text{ou} \quad \vec{v}_c = \frac{v_{\parallel}^2}{w_B R} \left( \frac{\vec{R} \times \vec{B}_0}{R B_0} \right) \quad (58)$$

Resolvendo-se diretamente a eq. da força de Lorentz, em coordenadas cilíndricas ( $\vec{B} = B \hat{\phi} \vec{\phi} = B_0 \hat{\phi} \vec{\phi}$ ), vem:

$$\begin{aligned} \ddot{p} - p \dot{\phi}^2 &= -w_B \ddot{z} \\ \ddot{p} \dot{\phi} + 2 \dot{p} \dot{\phi} &= 0 \\ \ddot{z} &= w_B \dot{p} \end{aligned} \quad (59)$$

para  $R \gg a$ , dentro da ordem mais baixa:  $\dot{\phi} \approx \frac{v_{\parallel}}{R}$ ,  $\rho \approx R$   
a primeira equação em (59):

$$\ddot{\rho}^{\perp 0} - R \left( \frac{v_{\parallel}}{R} \right)^2 \approx -w_B \dot{\rho} \Rightarrow \dot{\rho} \approx \frac{v_{\parallel}^2}{w_B R} \quad (60)$$

que é o análogo de  $\vec{v}_c$  em (58).

Numa região livre de correntes, podemos combinar (55) e (58):

$$\vec{B} \times \vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{\vec{\nabla}_{\perp} B}{B} = -\frac{\vec{R}}{R^2} \rightarrow \text{demonstr. no cap. 1}$$

$$\text{de (55): } \vec{v}_A = \frac{w_B a^2}{2} \left| \left( \frac{\vec{B}}{B} \times \left( -\frac{\vec{R}}{R^2} \right) \right) \right| = \frac{w_B a^2}{2R w_B} \frac{w_B}{RB} \left( \frac{\vec{R} \times \vec{B}}{R^2} \right) = \frac{v_{\perp}^2}{2w_B R} \left( \frac{\vec{R} \times \vec{B}}{R^2} \right)$$

então  $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_c$  e os vetores podem ser somados diretamente:

$$\text{Velocidade total do alarante: } \vec{v}_A = \frac{1}{w_B R} \left( v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right) \left( \frac{\vec{R} \times \vec{B}}{R^2} \right) \quad (61)$$

1 /

Indirect measurement is also called trigonometry  
Trigonometry is the study of relationships between angles and sides of triangles.  
Trigonometry is used in many fields such as engineering, architecture, and astronomy.  
Trigonometry is based on the Pythagorean theorem which states that in a right-angled triangle, the square of the hypotenuse is equal to the sum of the squares of the other two sides.  
Trigonometry uses ratios of the sides of a triangle to find missing angles or side lengths.  
The three main trigonometric ratios are sine, cosine, and tangent.  
Sine is the ratio of the length of the opposite side to the length of the hypotenuse.  
Cosine is the ratio of the length of the adjacent side to the length of the hypotenuse.  
Tangent is the ratio of the length of the opposite side to the length of the adjacent side.  
Trigonometry is used to solve problems involving angles and distances.  
Trigonometry is used to calculate the height of tall objects such as buildings and mountains.  
Trigonometry is used to calculate the distance between two points on the Earth's surface.  
Trigonometry is used to calculate the angle of elevation or depression of an object.  
Trigonometry is used to calculate the area of irregular shapes.  
Trigonometry is used to calculate the volume of solids.  
Trigonometry is used to calculate the force of gravity.  
Trigonometry is used to calculate the work done by a machine.  
Trigonometry is used to calculate the energy consumed by an electrical device.  
Trigonometry is used to calculate the pressure exerted by a fluid.  
Trigonometry is used to calculate the temperature of an object.  
Trigonometry is used to calculate the density of a substance.  
Trigonometry is used to calculate the viscosity of a fluid.  
Trigonometry is used to calculate the refractive index of a medium.  
Trigonometry is used to calculate the wavelength of a wave.  
Trigonometry is used to calculate the frequency of a wave.  
Trigonometry is used to calculate the amplitude of a wave.  
Trigonometry is used to calculate the phase shift of a wave.  
Trigonometry is used to calculate the intensity of a wave.  
Trigonometry is used to calculate the polarization of a wave.  
Trigonometry is used to calculate the dispersion of a wave.  
Trigonometry is used to calculate the reflection of a wave.  
Trigonometry is used to calculate the refraction of a wave.  
Trigonometry is used to calculate the diffraction of a wave.  
Trigonometry is used to calculate the interference of a wave.  
Trigonometry is used to calculate the standing waves.  
Trigonometry is used to calculate the beats.  
Trigonometry is used to calculate the Doppler effect.  
Trigonometry is used to calculate the wave equation.  
Trigonometry is used to calculate the wave function.  
Trigonometry is used to calculate the wave number.  
Trigonometry is used to calculate the wave velocity.  
Trigonometry is used to calculate the wave period.  
Trigonometry is used to calculate the wave frequency.  
Trigonometry is used to calculate the wave amplitude.  
Trigonometry is used to calculate the wave intensity.  
Trigonometry is used to calculate the wave polarization.  
Trigonometry is used to calculate the wave dispersion.  
Trigonometry is used to calculate the wave reflection.  
Trigonometry is used to calculate the wave refraction.  
Trigonometry is used to calculate the wave diffraction.  
Trigonometry is used to calculate the wave interference.  
Trigonometry is used to calculate the wave standing waves.  
Trigonometry is used to calculate the wave beats.  
Trigonometry is used to calculate the wave Doppler effect.  
Trigonometry is used to calculate the wave wave equation.  
Trigonometry is used to calculate the wave wave function.  
Trigonometry is used to calculate the wave wave number.  
Trigonometry is used to calculate the wave wave velocity.  
Trigonometry is used to calculate the wave wave period.  
Trigonometry is used to calculate the wave wave frequency.  
Trigonometry is used to calculate the wave wave amplitude.  
Trigonometry is used to calculate the wave wave intensity.  
Trigonometry is used to calculate the wave wave polarization.  
Trigonometry is used to calculate the wave wave dispersion.

## 8) Lagrangeana para o campo eletromagnético

Lagrangeana para o campo eletromagnético em interação com cargas e correntes. Campos (unifor) têm infinitos graus de liberdade.

$$\begin{aligned} i \rightarrow x^\alpha, k \rightarrow \text{cada ponto } x^\alpha \text{ corresponde a} \\ \text{coord. generaliz.: } q_i \rightarrow \phi_k(x) \text{ um conjunto de variáveis } x_i \\ \text{veloc. generaliz.: } \dot{q}_i \rightarrow \partial^\alpha \phi_k(x) \quad (83) \\ L = \sum_i L_i(q_i, \dot{q}_i) \rightarrow \int d^4x (\partial^\alpha \phi_k, \partial^\beta \phi_k) d^4x \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \rightarrow \partial^\beta \frac{\partial L}{\partial (\partial^\beta \phi_k)} = \frac{\partial L}{\partial \phi_k} \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{L}$  é a densidade da lagrangeana.

A integral de ação é:

$$A = \iint d^4x dt = \int d^4x \quad (84)$$

e como  $A$  e  $d^4x$  são invariantes  $\Rightarrow \mathcal{L}$  é invariante.

Exigindo que a ação seja um extremo com respeito à variação dos campos:

$$\frac{\delta A}{\delta \phi_k(x)} = 0$$

Nom a eq. de Euler-Lagrange:

$$\partial^\beta \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\beta \phi_k)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} = 0$$

A partir das quantidades  $F^{\alpha\beta}$ ,  $A^\alpha$  e  $J^\alpha$  construir o escalar:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{c} J_\alpha A^\alpha, \quad (85)$$

onde os coeficientes e sinais concordam com (10):

$$L_{int} = -e\phi + (e/c) \vec{u} \cdot \vec{A}$$

Vimos em (11.136):

$$\begin{aligned} F^{\alpha\beta} &= \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathcal{L} &= -\frac{1}{16\pi} \sum_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) - \frac{1}{c} J_\alpha A^\alpha \quad (86) \end{aligned}$$

/ /

íjucar (simetria de  $\delta_{\alpha\beta}$ )

antissim de

 $F^{\alpha\beta}$ )

calculando:

$$\frac{\partial d}{\partial (\partial^\beta A^\alpha)} = -\frac{1}{16\pi} \delta_{\lambda\mu} \delta_{\nu\sigma} \left\{ \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\sigma F^{\lambda\nu} - \delta_\beta^\sigma \delta_\alpha^\mu F^{\lambda\nu} + \right. \\ \left. + \delta_\beta^\lambda \delta_\alpha^\nu F^{\mu\sigma} - \delta_\beta^\nu \delta_\alpha^\lambda F^{\mu\sigma} \right\} = \\ = -\frac{1}{4\pi} F_{\beta\alpha} = \frac{1}{4\pi} F_{\alpha\beta} \quad (87)$$

$$\frac{\partial d}{\partial A^\alpha} = -\frac{1}{c} J_\alpha \quad (88)$$

e as equações de movimento são:

$$\frac{1}{4\pi} \partial^\beta F_{\beta\alpha} = \frac{1}{c} J^\alpha \quad (89)$$

ou  $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta$  (11.141), a forma covariante das eqs. de Maxwell inhomogêneas.

já as equações homogêneas são automaticamente satisfeitas:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \partial_\alpha \epsilon^{\alpha\beta\lambda\mu} F_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} \partial_\alpha \epsilon^{\alpha\beta\lambda\mu} (\partial_\lambda A_\mu - \partial_\mu A_\lambda) = \\ (11.140) \quad &= \partial_\alpha \epsilon^{\alpha\beta\lambda\mu} \partial_\lambda A_\mu = \cancel{\epsilon^{\alpha\beta\lambda\mu}} \cancel{\partial_\alpha \partial_\lambda} A_\mu = 0 \end{aligned}$$

antissim triw ↙      ↘ sim triw

e a eq. da continuidade vem da divergência de (89):

$$\frac{1}{4\pi} \partial^\alpha \partial^\beta F_{\beta\alpha} = \frac{1}{c} \partial^\alpha J_\alpha \Rightarrow \partial^\alpha J_\alpha = 0 \quad (90)$$

↙ sim ↘ antissim

9) Lagrangeana de Proca, efeitos da massa do fóton

Adiciona-se um termo de massa em (85):

$$d_{Proca} = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{\mu^2}{8\pi} A_\alpha A^\alpha - \frac{1}{c} J_\alpha A^\alpha, \quad (91)$$

onde  $\mu$  é o inverso do compr. de onda Compton do fóton:

$$\mu = \frac{m c}{t_0}$$

A eq. de movimento fica:

$$\partial^\beta F_{\beta\alpha} + \mu^2 A_\alpha = \frac{4\pi}{c} J_\alpha \quad (92)$$

Junmando:  $\vec{E} = -\nabla\phi - \gamma_c \vec{\nabla}\vec{A}$  }  $F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$ ,  
 $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

onde:  $\partial^{\alpha\beta} = (\partial/\partial x_0, -\vec{\nabla})$ ,  $A^{\alpha\beta} = (\phi, \vec{A})$

a condição de Lorentz é:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \gamma_c \partial\phi/\partial t \Rightarrow \partial_\alpha A^\alpha = 0$   
 então, calculando o primeiro termo de (92):

$$\partial^\beta F_{\beta\alpha} = \partial^\beta \delta_{\beta\mu} \delta_{\alpha\nu} F^{\mu\nu} = \partial^\beta \delta_{\beta\mu} \delta_{\alpha\nu} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) =$$

$$= \partial^\beta \delta_{\beta\mu} (\partial^\mu A_\alpha - \partial_\alpha A^\mu) = \partial^\beta (\partial_\beta A_\alpha - \partial_\alpha A_\beta) =$$

$$= \partial^\beta \partial_\beta A_\alpha - \partial_\alpha \partial^\beta A_\beta \stackrel{(cazb. \text{Lorentz})}{=} \square A_\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \square A_\alpha + \mu^2 A_\alpha = \frac{4\pi}{c} J_\alpha \quad (93)$$

no limite estático:  $\partial \vec{A}/\partial t = 0$  e

$$\nabla^2 A_\alpha - \mu^2 A_\alpha = -\frac{4\pi}{c} J_\alpha$$

Para uma carga puntiforme q na origem só não é nula a componente temporal do potencial  $A_0 = \phi$ , que assume a forma esferossimétrica de Yukawa:

$$\phi(r) = \frac{q}{r} e^{-mr} \quad (94)$$

Agora, se o fóton tiver massa: da Braglie

$$E^2 = (mcw)^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \stackrel{!}{=} \frac{\hbar^2 c^2}{\lambda^2} + m^2 c^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w^2 = \frac{\hbar^2}{c^2} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 c^2 + \left( \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w^2 = k^2 c^2 + \mu^2 c^2 \equiv w_0^2 + \mu^2 c^2 \quad (95), (96)$$

/ /

10) Tensões canônicas e simétricas das tensões; leis de conservação

a) Generalização da hamiltoniana: tensor canônico das tensões

Definindo-se as variáveis canônicas do momento

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (99)$$

e a hamiltoniana:

$$H = \sum p_i \dot{q}_i - L \quad (100)$$

se  $\partial L/\partial t = 0 \Rightarrow dL/dt = 0 \Rightarrow H$  é uma constante do movimento  
Agora, a energia é a componente temporal do quadrivector  
energia-momento; queremos que a hamiltoniana se transforme de  
maneira idêntica. Como:

$$H = \int \mathcal{L} d^3x = \int \mathcal{L} \frac{d^3x}{dx_0} dx_0$$

e como  $d^4x = d^3x dx_0 \Rightarrow \mathcal{L}$  se transforma como a componente  $(0,0)$   
de um tensor de segunda ordem.

Ademais, como  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\partial_x(x), \partial^\alpha \partial_x(x))$  para os campos,  
introduzimos, em analogia com (100):

$$\mathcal{L} = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi_k)} \frac{\partial \phi_k}{\partial t} - \mathcal{L} \quad (101)$$

entendendo as derivadas temporais para  $\partial_t \phi_k$  e  $\partial^\alpha \partial_t \phi_k$  vem a  
generalização da densidade de hamiltoniana com o tensor canônico  
de tensões:

$$T^{\alpha\beta} = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \partial_\beta \phi_k)} \partial^\beta \phi_k - g^{\alpha\beta} \mathcal{L} \quad (102)$$

Na ausência de fontes ( $J^\alpha = 0$ ), a lagrangeana do campo  
eletromagnético livre é:

$$L_{em} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (103)$$

/ /

Substituindo  $\partial^\beta A^\lambda$  por  $A^\lambda$  (com somatórios implícitos):

$$T^{\alpha\beta} = \frac{\partial d_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\alpha A^\lambda)} \partial^\beta A^\lambda - f^{\alpha\beta} d_{\mu\nu} \Rightarrow$$

$$d_{\mu\nu} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{16\pi} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) =$$

$$= -\frac{1}{16\pi} (\partial_\mu f_{\nu\sigma} \partial^\sigma A^\nu - \partial_\nu f_{\mu\sigma} \partial^\sigma A^\mu) (g^{\mu\beta} \partial_\beta A^\nu - g^{\nu\beta} \partial_\beta A^\mu) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial d_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\alpha A^\lambda)} = -\frac{1}{16\pi} (g_{\mu\nu} \delta_\alpha^\mu \delta_\lambda^\nu F^{\mu\nu} - f_{\mu\nu} \delta_\alpha^\nu \delta_\lambda^\mu F^{\mu\nu} +$$

$$+ F_{\mu\nu} g^{\mu\beta} \delta_\alpha^\beta \delta_\lambda^\nu - F_{\mu\nu} g^{\nu\beta} \delta_\alpha^\beta \delta_\lambda^\mu) =$$

$$= -\frac{1}{16\pi} (f_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - f_{\mu\nu} F^{\mu\lambda} + f^{\mu\lambda} F_{\mu\lambda} - f^{\nu\lambda} F_{\lambda\nu}) =$$

$$= -\frac{1}{16\pi} (F_\lambda^\lambda + F_\lambda^\lambda + f^{\mu\lambda} F_{\mu\lambda} + f^{\nu\lambda} F_{\nu\lambda}) =$$

$$= -\frac{1}{16\pi} (f^{\mu\lambda} F_{\mu\lambda} + f^{\nu\lambda} F_{\nu\lambda} + f^{\mu\lambda} F_{\mu\lambda} + f^{\nu\lambda} F_{\nu\lambda}) = -\frac{1}{4\pi} f^{\mu\lambda} F_{\mu\lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi} f^{\mu\lambda} F_{\mu\lambda} \partial^\beta A^\lambda - f^{\alpha\beta} d_{\mu\nu} \quad (104)$$

veremos

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & EX & EY & EZ \\ -EX & 0 & -BZ & BY \\ -EY & BZ & 0 & -BX \\ -EZ & -BY & BX & 0 \end{pmatrix} \quad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -EX & -EY & -EZ \\ EX & 0 & -BZ & BY \\ EY & BZ & 0 & -BX \\ EZ & -BY & BX & 0 \end{pmatrix}, \text{ veremos}$$

$$d_{\mu\nu} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{16\pi} (0 - EX^2 - EY^2 - EZ^2 + EX^2 + 0 + BZ^2 + BY^2 + -EY^2 + BZ^2 + 0 + BX^2 + -EZ^2 + BY^2 + BX^2 + 0) = \frac{1}{8\pi} (E^2 - B^2)$$

Resolvendo em particular  $T^{00}$ :

$$T^{00} = -\frac{1}{4\pi} (F_{0\lambda} \partial^0 A^\lambda) - \frac{1}{8\pi} (E^2 - B^2) = -\frac{1}{4\pi} (EX \frac{\partial A_x}{\partial t} + EY \frac{\partial A_y}{\partial t} + EZ \frac{\partial A_z}{\partial t}) - \frac{1}{8\pi} (E^2 - B^2) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} (\vec{E} \cdot \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) - \frac{1}{8\pi} (E^2 - B^2),$$

$$\text{mas } \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E} + \vec{\nabla}\phi \Rightarrow \text{OK, esperado}$$

$$T^{00} = \frac{E^2}{4\pi} + \frac{\vec{E} \cdot \vec{\nabla}\phi}{4\pi} - \frac{1}{8\pi} (E^2 - B^2) = \frac{(E^2 + B^2)}{8\pi} + \frac{\vec{E} \cdot \vec{\nabla}\phi}{4\pi} \quad (105')$$

numa região livre de fontes :  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{E}\phi) = \vec{E} \cdot \vec{\nabla}\phi$   
e numa região localizada :  $\int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{E}\phi) = \oint_S (\vec{E}\phi) \cdot \hat{n} da = 0$

$$\text{então: } \int_V T^{00} d^3x = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + B^2) d^3x \equiv E_{\text{campo}} \quad (106')$$

e as outras componentes do tensor de tensões?

$$\text{analogamente: } T^{0i} = \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})_i + \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}_i \cdot (\vec{A} \cdot \vec{E}) \quad (105'')$$

$$T^{i0} = \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})_i + \frac{1}{4\pi} [\vec{\nabla}_i \times (\vec{B}\phi)]_i - \frac{2}{8\pi} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})_i \quad (105'')$$

que, no entanto, não é um tensor simétrico. A divergência em (105'') indica que também para  $T^{0i}$ :

$$\int_V T^{0i} d^3x = \frac{1}{4\pi} \int (\vec{E} \times \vec{B})_i d^3x \equiv C P_i^0 \quad (106'')$$

As eqs. (106) sugerem uma generalização covariante do teorema de Poynting:  $\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0$

Vamos mostrar que:  $\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \quad (107)$

Partindo de (102), vemos que:

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = \sum_k \partial_\alpha \left[ \frac{\partial L}{\partial (\partial_\alpha \phi_k)} \partial^\beta \phi_k \right] - \partial^\beta L =$$

$$= \sum_k \left[ \partial_\alpha \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial_\alpha \phi_k)} \right) \partial^\beta \phi_k + \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial_\alpha \phi_k)} \right) \partial^\beta (\partial_\alpha \phi_k) \right] - \partial^\beta L =$$

$$= \sum_k \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial L}{\partial \phi_k} \right) \partial^\beta \phi_k + \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial_\alpha \phi_k)} \right) \partial^\beta (\partial_\alpha \phi_k) \right]}_{\partial^\beta L}, \text{ para } L = L(\phi_k, \partial_\alpha \phi_k) - \partial^\beta L =$$

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = \partial^\beta L - \partial^\beta L = 0$$

/ /  
então (107) integrada é:

$$0 = \int \partial_\alpha T^{\alpha\beta} d^3x = \partial_0 \int V T^{0\beta} d^3x + \int \partial_i T^{i\beta} d^3x \xrightarrow{\text{divergência}} 0 \quad (\partial_\alpha \text{ localizado})$$

de onde as 4 equações:  $0 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int V T^{0\beta} d^3x, \beta=0,1,2,3$

com (106) são:  $\frac{d}{dt} E_{campo} = 0, \frac{d}{dt} \vec{P}_{campo} = 0 \quad (108)$

as densidades de energia e momento são:

$$u = \frac{1}{8\pi} (E^2 + \vec{B}^2), \vec{j} = \frac{1}{4\pi c} (\vec{E} \times \vec{B})$$

b) O tensor simétrico das tensões

O tensor canônico de tensões encontrado até agora,  $T^{\alpha\beta}$ , é conveniente, mas tem a desvantagem de não ser simétrico (veja (105)). A questão da simetria aparece quando analisamos o momento angular do campo:  $L_{campo} = \frac{1}{4\pi c} \int \vec{x} \times (\vec{E} \times \vec{B}) d^3x$

A generalização covariante da densidade de momento angular é um tensor de ordem 3:

$$\mu^{\alpha\beta\gamma} = T^{\alpha\beta} x^\gamma - T^{\alpha\gamma} x^\beta \quad (109)$$

Se sua lei de conservação exige que a quadridivergência se anule:

$$\partial_\alpha \mu^{\alpha\beta\gamma} = 0, \quad (110)$$

mas

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \mu^{\alpha\beta\gamma} &= \partial_\alpha (T^{\alpha\beta} x^\gamma - T^{\alpha\gamma} x^\beta) = \\ &= (\partial_\alpha T^{\alpha\beta}) x^\gamma + T^{\alpha\beta} \partial_\alpha x^\gamma - (\partial_\alpha T^{\alpha\gamma}) x^\beta - T^{\alpha\gamma} \partial_\alpha x^\beta = \\ (107) \rightarrow &= 0 \cdot x^\gamma + T^{\alpha\beta} \delta_\alpha^\gamma - 0 \cdot x^\beta - T^{\alpha\gamma} \delta_\alpha^\beta = \\ &= T^{\gamma\beta} - T^{\beta\gamma} \end{aligned}$$

$\neq 0$ , para o tensor canônico de tensões

Ademais,  $T^{\alpha\beta}$  depende dos potenciais (e não é invariante sob transf. de calibre) e seu traço não é nulo.

Substituindo-se em (104) :  $\partial^\beta A^\lambda = -\bar{F}^{\lambda\beta} + \partial^\lambda A^\beta$  e regroupando-se os termos :

$$T^{\lambda\beta} = \frac{1}{4\pi} \left( g^{\alpha\mu} F_{\mu\lambda} F^{\lambda\beta} + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \bar{F}^{\mu\nu} \right) - \frac{1}{4\pi} f^{\alpha\mu} F_{\mu\lambda} \partial^\lambda A^\beta \quad (111)$$

O segundo termo é

$$\begin{aligned} T_D^{\alpha\beta} &= -\frac{1}{4\pi} f^{\alpha\mu} F_{\mu\lambda} \partial^\lambda A^\beta = -\frac{1}{4\pi} f^{\alpha\mu} (g_{\mu\nu} F^{\nu\delta}) \partial^\lambda A^\beta = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \delta_\mu^\alpha F^{\delta\beta} \partial_\delta A^\beta = -\frac{1}{4\pi} F^{\delta\beta} \partial_\delta A^\beta = -\frac{1}{4\pi} F^{\alpha\lambda} \partial_\lambda A^\beta = \\ &= \frac{1}{4\pi} F^{\lambda\alpha} \partial_\lambda A^\beta = \frac{1}{4\pi} (F^{\lambda\alpha} \partial_\lambda A^\beta + A^\beta \partial_\lambda F^{\lambda\alpha}) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \partial_\lambda (F^{\lambda\alpha} A^\beta) \end{aligned} \quad \text{Lsg. Maxwell com } J^\alpha = 0 \quad (112)$$

que é uma quadri-divergência, então :  $\int T_D^{\alpha\beta} d^3x = 0$ , para campos localizados, ademais :  $\partial_\lambda T_D^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \partial_\lambda (\partial_\lambda (F^{\lambda\alpha} A^\beta)) = 0$ , pois  $F^{\lambda\alpha}$  é antisimétrico.

Então, removemos o segundo termo e definimos o tensor simétrico das tensões :

$$(14)^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} - T_D^{\alpha\beta}$$

$$\text{ou } (14)^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} (g^{\alpha\mu} F_{\mu\lambda} F^{\lambda\beta} + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \quad (113)$$

Notamos que :  $F_{\mu\lambda} F^{\mu\lambda} = 2(B^2 - E^2)$

$$\text{agora, se } g^{\alpha\mu} F_{\mu\lambda} F^{\lambda\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & Ex & Ey & Ez \\ -Ex & 0 & -Bz & By \\ -Ey & Bz & 0 & -Bx \\ -Ez & -By & Bx & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -Ex & -Ey & -Ez \\ Ex & 0 & -Bz & By \\ Ey & Bz & 0 & -Bx \\ Ez & -By & Bx & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{temos: } (14)^{00} = \frac{1}{4\pi} (g^{0\mu} F_{\mu\lambda} F^{\lambda 0} + \frac{1}{4} f^{00} F_{\mu\lambda} F^{\mu\lambda}) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left( E^2 + \frac{1}{2} (B^2 - E^2) \right) = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) \quad (114')$$

$$(14)^{0i} = \frac{1}{4\pi} (g^{0\mu} F_{\mu\lambda} F^{\lambda i} + \frac{1}{4} f^{0i} F_{\mu\lambda} F^{\mu\lambda}) \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad (114'')$$

$$= \frac{1}{4\pi} (g^{00} F_{0\lambda} F^{\lambda i} + g^{0j} F_{0\lambda} F^{\lambda j}) = \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})_i \quad , \quad j = 1, 2, 3$$

/ /

$$\textcircled{H}^{ij} = -\frac{1}{4\pi} [E^i E_j + B^i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (E^2 + B^2)] \quad (114'''), \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

O tensor  $\textcircled{H}^{\alpha\beta}$  pode ser escrito em bloco:

$$\textcircled{H}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} u & i & c\vec{S} \\ -c\vec{S} & i - T_{ij}^{(M)} & \end{pmatrix}, \quad (115)$$

onde  $T_{ij}^{(M)}$  é o tensor de tensões de Maxwell:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} [E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{B}) \delta_{\alpha\beta}] \quad (6.120)$$

as formas covariante e mistas do tensor  $\textcircled{H}^{\alpha\beta}$  são:

$$\textcircled{H}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} u & i & c\vec{S} \\ -c\vec{S} & i - T_{ij}^{(M)} & \end{pmatrix}, \quad \textcircled{H}_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} u & i & c\vec{S} \\ c\vec{S} & i - T_{ij}^{(M)} & \end{pmatrix}, \quad \textcircled{H}_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} u & i & c\vec{S} \\ -c\vec{S} & i - T_{ij}^{(M)} & \end{pmatrix}$$

A lei diferencial de conservação é:

$$\partial_\alpha \textcircled{H}^{\alpha\beta} = 0 \quad (116)$$

que inclui o teorema de Poynting:

$$\text{para } \beta = 0: 0 = \partial_\alpha \textcircled{H}^{\alpha 0} = \frac{1}{c} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} \right), \text{ onde } \vec{S} = c \vec{J} \text{ é o vetor de Poynting.}$$

E a conservação do momento linear:  $\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{J} \cdot \vec{E} \quad (6.108)$

$$\text{para } \beta = i = 1, 2, 3: 0 = \partial_\alpha \textcircled{H}^{\alpha i} = \frac{\partial s_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij}^{(M)}$$

na ausência de fontes.  $\frac{d}{dt} (\bar{P}_{\text{mec}} + \bar{P}_{\text{camp}})_\alpha = \sum_\beta \int_V \frac{\partial}{\partial x_\beta} T_{\alpha\beta} d^3x \quad (6.121)$

A conservação do momento angular, definida pelo tensor

$$n^{\alpha\beta\gamma} = \textcircled{H}^{\alpha\beta} x^\gamma - \textcircled{H}^{\alpha\gamma} x^\beta$$

fica garantida por (116) e pela simetria de  $\textcircled{H}^{\alpha\beta}$ .

C) Leis de conservação na presença de fontes

Considera-se:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \textcircled{H}^{\alpha\beta} &= \frac{1}{4\pi} \left( \partial_\alpha f^{\alpha\mu} F_{\mu\lambda} F^{\lambda\beta} + \frac{1}{4} \partial_\alpha f^{\alpha\beta} F_{\mu\lambda} F^{\mu\lambda} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[ 2^\mu (F_{\mu\lambda} F^{\lambda\beta}) + \frac{1}{4} \partial^\beta (F_{\mu\lambda} F^{\mu\lambda}) \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[ (2^\mu F_{\mu\lambda}) F^{\lambda\beta} + F_{\mu\lambda} (2^\mu F^{\lambda\beta}) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{4} (\partial^\beta F_{\mu\lambda}) F^{\mu\lambda} + \frac{1}{4} F_{\mu\lambda} (\partial^\beta F^{\mu\lambda}) \right] \end{aligned}$$

$$\text{mas } (\partial^\beta F_{\mu\lambda}) F^{\mu\lambda} = \partial^\beta (\sum_\delta F^{\delta\sigma} f_{\delta\lambda}) F^{\mu\lambda} = \partial^\beta (F^{\delta\sigma}) f_{\delta\lambda} f_{\sigma\lambda} F^{\mu\lambda} = \\ = \partial^\beta (F^{\delta\sigma}) \sum_\delta F^{\mu\lambda}_\delta = \partial^\beta (F^{\delta\sigma}) F_{\delta\sigma} = F_{\mu\lambda} (\partial^\beta F^{\mu\lambda})$$

$$\Rightarrow \partial_\alpha (\textcircled{H})^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} [(\partial^\mu F_{\mu\lambda}) F^{\lambda\beta} + F_{\mu\lambda} (\partial^\mu F^{\lambda\beta}) + \frac{1}{2} F_{\mu\lambda} (\partial^\beta F^{\mu\lambda})]$$

de (89) vemos que:  $\partial^\mu F_{\mu\lambda}/4\pi = J_\lambda/c \Rightarrow$

$$\Rightarrow \partial_\alpha (\textcircled{H})^{\alpha\beta} + F^{\beta\lambda} J_\lambda/c = \frac{1}{8\pi} F_{\mu\lambda} [\partial^\mu F^{\lambda\beta} + \partial^\mu F^{\lambda\beta} + \partial^\beta F^{\mu\lambda}]$$

de (11.143) vemos:  $\partial^\mu F^{\lambda\beta} + \partial^\beta F^{\mu\lambda} + \partial^\lambda F^{\mu\beta} = 0$

$$\text{então } -\partial^\lambda F^{\beta\mu} = +\partial^\lambda F^{\mu\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \partial_\alpha (\textcircled{H})^{\alpha\beta} + F^{\beta\lambda} J_\lambda/c = \frac{1}{8\pi} F_{\mu\lambda} (\partial^\mu F^{\lambda\beta} + \partial^\lambda F^{\mu\beta}) = 0,$$

pois o lado direito é a contracção de um objeto simétrico e outros antisimétricos nos índices  $\mu$  e  $\lambda$ . Assim, a divergência é:

$$\partial_\alpha (\textcircled{H})^{\alpha\beta} = -F^{\beta\lambda} J_\lambda/c, \quad (118)$$

com componente temporal:

$$\frac{1}{c} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{J} \cdot \vec{S} \right) = -\frac{1}{c} \vec{J} \cdot \vec{E} \quad (119)$$

= (6.108)

e componente espacial:

$$\frac{\partial f^i}{\partial t} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}^{(u)}}{\partial x^i} = - \left[ \rho E^i + \frac{1}{c} (\vec{J} \times \vec{B})_i \right], \quad (120)$$

= (6.121)

onde usamos  $J^\alpha = (c\rho, \vec{J})$

O quadvíctor no 2º membro de (108) é a densidade de força de Lorentz:  $f^\beta \equiv \frac{1}{c} F^{\beta\lambda} J_\lambda = \left( \frac{1}{c} \vec{J} \cdot \vec{E}, \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{B} \right) \quad (121)$

que integrada dá a equação de movimento das partículas:

$$\int f^\beta d^3x = \frac{d}{dt} P_{\text{partículas}}^\beta$$

E assim:

$$\int d^3x (\partial_\alpha (\textcircled{H})^{\alpha\beta} + f^\beta) = \frac{d}{dt} (P_{\text{campo}}^\beta + P_{\text{partículas}}^\beta) = 0$$

que é a conservação do quadvíctor para o sistema  
(campo + partículas)

1 / 1

the <sup>last</sup> <sup>two</sup> <sup>days</sup> <sup>I</sup> <sup>have</sup> <sup>been</sup> <sup>working</sup> <sup>on</sup> <sup>the</sup> <sup>final</sup> <sup>version</sup> <sup>of</sup> <sup>my</sup> <sup>thesis</sup> <sup>and</sup> <sup>it's</sup> <sup>been</sup> <sup>tiring</sup> <sup>but</sup> <sup>also</sup> <sup>rewarding</sup> <sup>to</sup> <sup>see</sup> <sup>the</sup> <sup>progress</sup> <sup>I</sup> <sup>have</sup> <sup>made</sup> <sup>in</sup> <sup>such</sup> <sup>a</sup> <sup>short</sup> <sup>time</sup>. <sup>I</sup> <sup>have</sup> <sup>been</sup> <sup>able</sup> <sup>to</sup> <sup>integrate</sup> <sup>new</sup> <sup>research</sup> <sup>findings</sup> <sup>into</sup> <sup>my</sup> <sup>work</sup> <sup>and</sup> <sup>explore</sup> <sup>new</sup> <sup>perspectives</sup> <sup>on</sup> <sup>the</sup> <sup>topic</sup>. <sup>I</sup> <sup>have</sup> <sup>also</sup> <sup>had</sup> <sup>the</sup> <sup>opportunity</sup> <sup>to</sup> <sup>edit</sup> <sup>and</sup> <sup>refine</sup> <sup>my</sup> <sup>writing</sup> <sup>skills</sup>. <sup>I</sup> <sup>feel</sup> <sup>confident</sup> <sup>that</sup> <sup>the</sup> <sup>final</sup> <sup>version</sup> <sup>of</sup> <sup>my</sup> <sup>thesis</sup> <sup>reflects</sup> <sup>the</sup> <sup>depth</sup> <sup>and</sup> <sup>breadth</sup> <sup>of</sup> <sup>my</sup> <sup>research</sup> <sup>and</sup> <sup>will</sup> <sup>make</sup> <sup>a</sup> <sup>valuable</sup> <sup>contribution</sup> <sup>to</sup> <sup>the</sup> <sup>field</sup>.