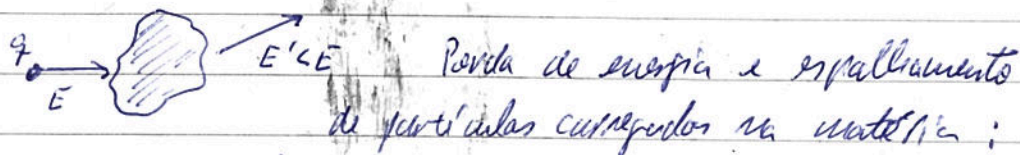
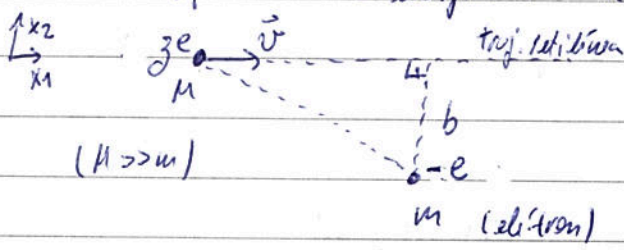


cap. 13) Colisões entre partículas carregadas, perda de energia e espalhamento



- part. pesadas ( $\mu, \pi, K, p, \dots$ ) } elétrons: colisões inelásticas ( $10^4 \text{ eV}$ ,  $50 \sim 0$ )  
trajetórias retas } núcleos: colisões elásticas ( $10^4 \text{ eV}$ ,  $150$ )
- elétrons, principalmente, com elétrons ( $10^4 \text{ eV}$ ,  $150$ ): trajetórias curvas

1) Transmissão de energia numa colisão coulombiana



- partícula incidente rápida:  $v \gg v_e$
- elétron livre inicialmente em repouso
- transmissão de momento:  $\Delta p \sim 0$

→ part. incidente:  $v$ ,  $E = \gamma M c^2$

na posição do elétron:

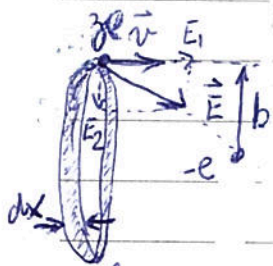
$$E_1 = \frac{-q\gamma v t}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}, \quad E_2 = \frac{\gamma q b}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \quad (11,152)$$

com  $q = ze$

integral dupla

no tempo  $\Rightarrow$  o impulso  $\Delta p$  é na direção transversal:

$$\Delta p = \int_{-\infty}^{+\infty} e E_2(t) dt = e \int \frac{E_2 dt}{dx} dx = \frac{e}{v} \int E_2(x) dx$$



gaussiana:  $2\pi b dx$   
(anel)

lei de Gauss:  $\int E_2(x) 2\pi b dx = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \Rightarrow \int E_2(x) dx = \frac{2ze}{b}$

$$\Rightarrow \Delta p = \int_{-\infty}^{+\infty} e E_2(t) dt = \frac{2ze^2}{bv}, \quad \text{em unidades} \quad (1)$$

calculo direto: 
$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{eqb}{(b^2 + p^2 v^2 t^2)^{3/2}} = eqb \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{dx}{v} \frac{v}{(b^2 + p^2 v^2 t^2)^{3/2}}$$

$$u = pvt \Rightarrow dt = \frac{dx}{v} \Rightarrow \frac{dx}{v} = dt$$

$$\Rightarrow J = \frac{eqb}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(b^2 + u^2)^{3/2}} = \frac{eq}{b^2 v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(1 + u^2/b^2)^{3/2}}, \quad z = u/b$$

$$\Rightarrow J = \frac{eq}{bv} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(1+z^2)^{3/2}}, \quad z = \tan \theta \Rightarrow 1+z^2 = 1/\cos^2 \theta$$

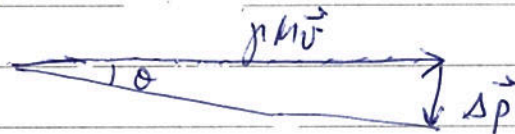
$$\Rightarrow J = \frac{eq}{bv} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \left( \frac{\cos^2 \theta}{1} \right)^{3/2} = \frac{eq}{bv} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \theta d\theta =$$

$$= \left( \frac{eq}{bv} \right) \sin \theta \Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{2eq}{bv} \Rightarrow \Delta p = \frac{2ze^2}{bv}$$

a energia transferida ao elétron é:  $(p \ll mc)$  approx. n-relat.:

$$\Delta E(b) = \frac{\Delta p^2}{2m} = \frac{2ze^4}{mv^2} \left( \frac{1}{b^2} \right) \quad (2)$$

para pequenos ângulos ( $\theta \ll 1$ ):



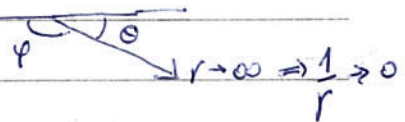
$$\tan \theta \approx \theta \approx \frac{\Delta p}{p} = \frac{2ze^2}{pvb} \quad (3)$$

agora, no espalhamento Rutherford:  $\frac{1}{r} = \frac{1}{b} \cos \varphi + \frac{d}{2b^2} (\cos \varphi - 1)$ ,  $\varphi$  traj. hiperbólica

onde  $d = \frac{ze^2}{mv^2/2}$  é a distância de maior aproximação para uma colisão frontal e elástica.

para distâncias muito grandes:

$$\begin{cases} \cos \varphi = \cos \theta \\ \omega \varphi = -\cos \theta \end{cases} \quad \varphi + \theta = \pi$$

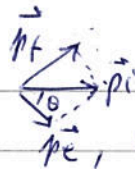


$$r \rightarrow \infty: 0 = \frac{1}{b} \cos \theta - \frac{d}{2b^2} (\cos \theta + 1) \Rightarrow \frac{\cos \theta + 1}{\cos \theta} = \frac{2b}{d} = \frac{2b}{ze^2} \frac{mv^2}{2} \Rightarrow$$

$$J(\theta/2) = \frac{2ze^2}{(mv)v b} \quad (4) \sim (3) \text{ para } \theta \ll 1, p = mv \text{ e } z = 1$$



Seja uma colisão frontal:  $M \vec{p}_i \rightarrow \dots$



$$K = E_e - m c^2$$

cons. energia:  $\sqrt{p_i^2 c^2 + M^2 c^4} + m c^2 = \sqrt{p_f^2 c^2 + M^2 c^4} + K + m c^2$

cons. p:  $\vec{p}_i = \vec{p}_f + \vec{p}_e \Rightarrow p_f^2 = p_i^2 + p_e^2 - 2 p_i p_e \cos \theta$

$\Rightarrow K = \frac{2 m c^2 p_i^2 c^2 \omega^2 \theta}{(m c^2 + \sqrt{p_i^2 c^2 + M^2 c^4})^2 - p_i^2 c^2 \omega^2 \theta}$ , para  $\theta = 0$ :

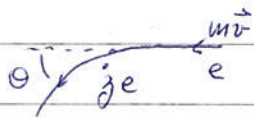
$$K_{max} = \frac{2 m c^2 p_i^2 c^2}{(m c^2 + \sqrt{p_i^2 c^2 + M^2 c^4})^2} = \frac{2 m c^2 (M^2 \gamma^2 c^4 - M^2 c^4)}{M^2 c^4 (1 + \frac{m}{M} + 2 \gamma \frac{m}{M})}$$

para  $M \gg m_e$ :  $K_{max} = 2 m c^2 (\gamma^2 - 1) = 2 m c^2 \gamma^2 \beta^2$

$\Rightarrow \Delta E (b_{min}) = \Delta E_{max} = 2 m \gamma^2 v^2$  (5)

que com (2):  $\frac{2 z^2 e^4}{m v^2 b_{min}^2} = 2 m \gamma^2 v^2 \Rightarrow b_{min} = \frac{z e^2}{\gamma m v^2}$  (6)

Problema 13.1)



depois da colisão:  $p_{\perp}' = m v \sin \theta$

$p_{\parallel}' = m v \cos \theta$

no ref. lab:  $p_{\perp} = m v \sin \theta$

$M \rightarrow e$

$p_{\parallel} = m v (\cos \theta - 1)$

$p^2 = m^2 v^2 (1 - \cos \theta)$

$\Rightarrow \Delta E = \frac{p^2}{2 m} = m v^2 (1 - \cos \theta) = 2 m v^2 \sin^2 \theta / 2 = 2 m v^2 \left( \frac{\tan^2 \theta / 2}{\tan^2 \theta / 2 + 1} \right)$

eq. (4):  $\frac{z^2 e^4}{m v^2 b} = \frac{z^2 e^2}{m v^2} \Rightarrow \sin^2 \theta / 2 = \left( \frac{z e^2}{m v^2 b} \right)^2 \frac{1}{\left( \frac{z^2 e^4}{m v^2} \right)^2 + b^2}$

eq. (6):  $b_{min} \approx \frac{z e^2}{m v^2} \Rightarrow \Delta E(b) = \frac{2 z^2 e^4}{m v^2} \left( \frac{1}{b_{min}^2 + b^2} \right)$  (7)

ok para  $b \rightarrow 0$  e reduz-se a (2) para  $b \gg b_{min}$

Para  $b$  muito grande temos que corrigir a ligação do elétron ao átomo (o elétron não é livre). Se o intervalo  $\Delta t \approx b_{max} / v$

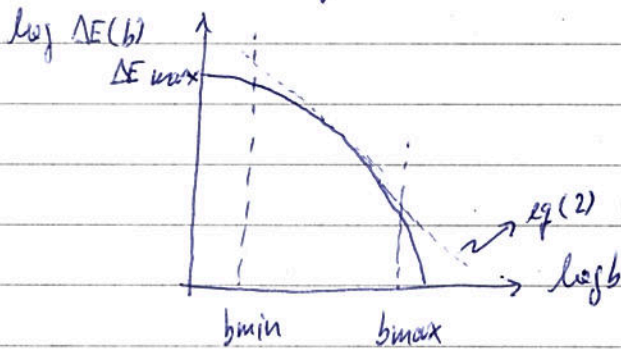
em que a colisão ocorre for comparável ao período de oscilação do elétron em sua órbita:

$\frac{b_{max}}{v} \approx \frac{2 \pi}{\omega} \approx \tau$

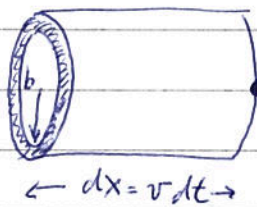
no ref. da partícula  $z e$ .

$= \frac{1}{f}$

no ref. do elétron:  $\frac{b_{max}}{\gamma v} \approx Z \Rightarrow b_{max} \approx 2\pi \left( \frac{\gamma v}{\omega} \right) \sim (9)$



mas a partícula incidente vê uma nuvem de elétrons com densidade volumétrica  $NZ$ , onde  $Z$  é o número atômico.



O número de elétrons entre  $b$  e  $b+db$  em  $dx$  é:

$$dm = NZ \cdot 2\pi b db dx \quad (10)$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dx} = 2\pi NZ \int \Delta E(b) b db \quad (11)$$

que deve ser integrada entre  $b_{min}$  e  $b_{max}$ , De (2):

$$\frac{dE}{dx} \approx 4\pi NZ \frac{z^2 e^4}{m v^2} \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{1}{b^2} b db \approx 4\pi NZ \frac{z^2 e^4}{m v^2} \ln B, \quad (12)$$

$$(13)$$

$$\text{onde } B = \frac{b_{max}}{b_{min}} \approx \frac{2\pi \gamma v}{\omega} \frac{\gamma m v^2}{z e^2} \approx \frac{2\pi \gamma^2 v^3}{z e^2 \omega} \sim (14)$$

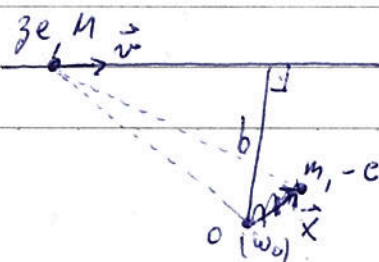
que é o resultado clássico de Bohr (1915).

## 2) Transferência de energia a uma carga ligada harmonicamente

colisões coulombianas  $\left\{ \begin{array}{l} b < b_{max} \text{ com transf. de energia dada por (2)} \\ b > b_{max}, \text{ adiabática} \end{array} \right.$

$b_{max} ?$

$M \gg m :$



aprox. dipolo:  $\vec{E}(\omega) \approx \vec{E}(x_0)$

$\uparrow b, \downarrow \frac{dE}{dx}$

elétron não-relativístico

aprox. osc. harm.  $X_0 \ll b$



A equação de força para a carga ligada harmonicamente é

$$\ddot{\vec{x}} + \Gamma \dot{\vec{x}} + \omega_0^2 \vec{x} = -\frac{e}{m} \vec{E}(t) \quad (15)$$

const. amortecimento  $\leftarrow$  freq. característica  $\frac{1}{m} \rightarrow \vec{E} = \vec{E}_p + \vec{E}_r$  (11, 152)

análise de Fourier:

$$\vec{x}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{x}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (16)$$

$$\vec{E}(t) \equiv \vec{E}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (17)$$

com as transformadas inversas:

$$\vec{x}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{x}(t) e^{i\omega t} dt, \quad \vec{E}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(t) e^{i\omega t} dt$$

mas  $\vec{x}(t)$  e  $\vec{E}(t)$  são reais, então:

$$\begin{cases} \vec{x}(-\omega) = \vec{x}^*(\omega) \\ \vec{E}(-\omega) = \vec{E}^*(\omega) \end{cases} \quad (18)$$

subst. na eq. (15):  $\ddot{\vec{x}}(t) = -i\omega \dot{\vec{x}}(t)$ ,  $\dot{\vec{x}} = -\omega^2 \vec{x}(t)$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [-\omega^2 \vec{x}(\omega) - i\omega \Gamma \vec{x}(\omega) + \omega_0^2 \vec{x}(\omega)] e^{-i\omega t} d\omega = -\frac{e}{m} \vec{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\Rightarrow \vec{x}(\omega) = \frac{-e}{m} \left[ \frac{\vec{E}(\omega)}{\omega_0^2 - i\omega \Gamma - \omega^2} \right] \quad (19)$$

O trabalho efetuado pela partícula incidente sobre a carga é:

$$P = \frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$E = \int d^3x' \vec{F} \cdot \vec{v} = \int d^3x' \rho(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = \int d^3x' \vec{E} \cdot \rho \vec{v} = \int d^3x' \vec{E} \cdot \vec{J}$$

$$\Rightarrow \Delta E = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int d^3x' \vec{E} \cdot \vec{J} \quad (21)$$

a densidade de corrente para  $\sigma$  elétrons é  $\vec{J} = -e\vec{v} \sigma[\vec{x}' - \vec{x}(t)]$ :

$$\Rightarrow \Delta E = -e \int_{-\infty}^{+\infty} dt \vec{E} \cdot \vec{v} \rightarrow \vec{v} = \dot{\vec{x}} \quad (22)$$

$\rightarrow \vec{E}(t)$  na aprox. dipolo

agora,  $\Delta E = -e \int_{-\infty}^{+\infty} dt \vec{v} \cdot \vec{E} = -e \int_{-\infty}^{+\infty} dt (-i\omega) \vec{x}(t) \cdot \vec{E}(t) =$

$$= +e \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int \vec{x}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \vec{E}(\omega') e^{-i\omega' t} d\omega' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta E = +e \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int \vec{x}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int \vec{E}(\omega') e^{-i\omega' t} d\omega' \right)^* \dagger$$

$$\text{onde } \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\omega') e^{-i\omega' t} d\omega' \right)^* \dagger = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}^*(\omega') e^{+i\omega' t} d\omega' \right)^* \dagger =$$

$$= \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(-\omega') e^{+i\omega' t} d\omega' \right)^* \dagger = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}^*(-\omega') e^{-i\omega' t} d\omega' =$$

$$= - \int_{+\infty}^{-\infty} \vec{E}^*(-\omega') e^{i(-\omega')t} d\omega' = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}^*(\omega'') e^{i\omega'' t} d\omega'' \quad (\text{du } \omega')$$

$$\Rightarrow \Delta E = e \int d\omega \int d\omega' i\omega \vec{x}(\omega) \cdot \vec{E}^*(\omega') \left( \frac{1}{2\pi} \int e^{i(\omega' - \omega)t} dt \right) =$$

$$= e \int d\omega \int d\omega' i\omega \vec{x}(\omega) \cdot \vec{E}^*(\omega') \delta(\omega' - \omega)$$

$$= e \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega i\omega \vec{x}(\omega) \cdot \vec{E}^*(\omega) = \int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty}$$

$$\text{mas } \int_{-\infty}^0 d\omega i\omega \vec{x}(\omega) \cdot \vec{E}^*(\omega) = - \int_0^{+\infty} d\omega i\omega \vec{x}(\omega) \cdot \vec{E}^*(\omega) =$$

$$= \int_0^{+\infty} d\omega (-i\omega) \vec{x}(-\omega) \cdot \vec{E}^*(-\omega) = \int_0^{+\infty} d\omega (i\omega) \vec{x}^*(\omega) \cdot \vec{E}(\omega) =$$

$$= \int_0^{+\infty} d\omega [i\omega \vec{x}(\omega) \cdot \vec{E}(\omega)]^* \dagger$$

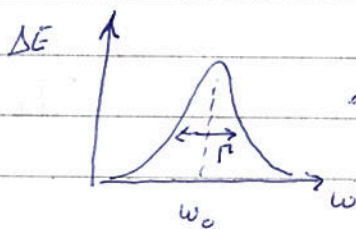
$$\text{como } z^* + z = (a - ib) + (a + ib) = 2a, \text{ vem:}$$

$$\Rightarrow \Delta E = 2e \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} i\omega \vec{x}(\omega) \cdot \vec{E}(\omega) d\omega \quad (23)$$

$$\text{Subst. (19), vem: } \Delta E = -\frac{2e^2}{m} \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} i\omega \frac{\vec{E}(\omega) \cdot \vec{E}^*(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\Gamma} d\omega \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\Gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\Gamma}$$

$$\Rightarrow \Delta E = -\frac{2e^2}{m} \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} |\vec{E}(\omega)|^2 \frac{i\omega(\omega_0^2 - \omega^2) - \omega^2\Gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2} d\omega$$

$$\Rightarrow \Delta E = \frac{e^2}{m} \int_0^{+\infty} |\vec{E}(\omega)|^2 \frac{2\omega^2\Gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2} d\omega \quad (24)$$



~ lorentziana, max. ΔE na freq. de ressonância  
 $\omega \approx \omega_0$



aproximando o campo elétrico na frequência natural  $\vec{E}(\omega) \approx \vec{E}(\omega_0)$ :

$$\Delta E \approx \frac{2e^2}{m} |\vec{E}(\omega_0)|^2 \int_0^\infty \frac{\omega^2 \Gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2} d\omega = \frac{2e^2}{m} |\vec{E}(\omega_0)|^2 \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{[(\omega_0/\Gamma)^2 - x^2]^2 + x^2} \quad (25)$$

com  $x \equiv \omega/\Gamma$ .

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{[(\omega_0/\Gamma)^2 - x^2]^2/x^2 + 1} \stackrel{\text{par}}{=} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{[(x_0^2 - x^2)/x]^2 + 1} \approx \frac{\pi}{2}$$

para uma lorentziana:

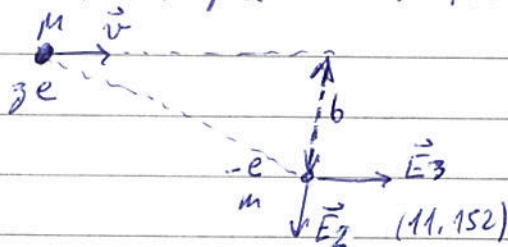
$$L(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma/2}{(x-x_0)^2 + (\Gamma/2)^2}, \text{ temos a normalização: } \int_{-\infty}^{+\infty} L(x) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{(\Gamma/2)}{(\Gamma/2)^2} \frac{dx}{[(x-x_0)/(\Gamma/2)]^2 + 1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{dy}{(y-y_0)^2 + 1} = 1$$

Assim, a transferência de energia é:

$$\Delta E = \frac{\pi e^2}{m} |\vec{E}(\omega_0)|^2 \quad (26)$$

Ainda temos que avaliar  $|\vec{E}(\omega_0)|^2$ :



a transformada de  $E_z(t)$  é:

$$E_z(\omega) = \frac{ze b \gamma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t} dt}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \quad (27)$$

ou  $E_z(\omega) = \frac{ze}{\sqrt{2\pi} b \gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega b x / \gamma v}}{(1+x^2)^{3/2}} dx$ , com  $x \equiv \gamma v t / b$  (28)

que é proporcional a uma função de Bessel modificada de ordem 1 (tabela de transformadas integrais):

$$\vec{E}_z(\omega) = \frac{ze}{b\gamma} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \frac{\omega b}{\gamma v} K_1\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right) \right] \quad (29)$$

análogo imediato:  $E_1(\omega) = -i \frac{ze}{\gamma b v} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \frac{\omega b}{\gamma v} K_0\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right) \right]$  (30)

\*  $K_\nu(z) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1/2)}{\sqrt{\pi} z^\nu} \int_0^\infty \frac{\omega z x dx}{(1+x^2)^{\nu+1/2}}$ ,  $K_1(z) = \frac{2 \Gamma(3/2)}{\sqrt{\pi} z} \int_0^\infty \frac{\omega z x dx}{(1+x^2)^{3/2}}$

com  $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$

A transferência de energia para a carga ligada harmonicamente é:

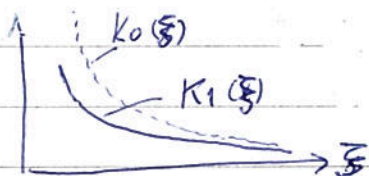
$$\Delta E(b) = \frac{2z^2 e^4}{m v^2} \left( \frac{1}{b^2} \right) \left[ \xi^2 K_1^2(\xi) + \frac{1}{\beta^2} \xi^2 K_0^2(\xi) \right], \quad (31)$$

onde  $\xi = \omega_0 b / \gamma v = b / b_{\max}$  (2) (32)

e o fator entre colchetes tem os valores limites:

$$[\ ] = \begin{cases} 1, & \xi \ll 1 \text{ ou } b \ll b_{\max} \Rightarrow \Delta E \text{ aprox (2)} \\ (1 + \beta^{-2}) \frac{1}{2} \xi e^{-2\xi}, & \xi \gg 1 \text{ ou } b \gg b_{\max} \end{cases} \quad (33)$$

$\Rightarrow$  queda exponencial



### 3) Fórmulas clássica e quântica para a perda de energia

Supondo  $N$  átomos por unidade de volume com  $Z$  elétrons por átomo e se  $f_j$  elétrons têm frequência  $\omega_j$ :  $\sum_j f_j = Z$ , onde  $f_j$  é a constante de força do ( $j$ -ésimo) oscilador, daí:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dx} &= 2\pi N \sum_j f_j \int_{b_{\min}}^{\infty} \Delta E_j(b) b db \quad (34) \\ &= \frac{4\pi N z^2 e^4}{m v^2} \sum_j f_j \int_{b_{\min}}^{\infty} \frac{1}{b^2} \left[ \xi^2 K_1^2(\xi) + \frac{\xi^2 K_0^2(\xi)}{\beta^2} \right] b db \\ &= \frac{4\pi N z^2 e^4}{m v^2} \sum_j f_j \int_{\xi_{\min}}^{\infty} \left[ \xi^2 K_1^2(\xi) + \frac{\xi^2 K_0^2(\xi)}{\beta^2} \right] \frac{d\xi}{\xi} \\ &= \frac{4\pi N z^2 e^4}{m v^2} \sum_j f_j \int_{\xi_{\min}}^{\infty} \left[ K_1^2(\xi) + K_0^2(\xi) - \frac{v^2}{c^2} K_0^2(\xi) \right] \xi d\xi \end{aligned}$$

Lembrando as fórmulas de recorrência das funções de Bessel:

$$K'_\nu(x) = -K_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} K_\nu(x) \quad \text{e} \quad K'_\nu = -K_{\nu+1} + \frac{\nu}{x} K_\nu(x), \quad \nu \text{ em:}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [x K_0 K_1] &= K_0 K_1 + x \left( \frac{dK_0}{dx} \right) K_1 + x K_0 \left( \frac{dK_1}{dx} \right) = \\ &= K_0 K_1 + x \left( -K_1 + \frac{0}{x} K_0 \right) K_1 + x K_0 \left( -K_0 - \frac{1}{x} K_1 \right) = -x (K_0^2 + K_1^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [x^2 (K_1^2 - K_0^2)] &= 2x (K_1^2 - K_0^2) + x^2 \left( 2K_1 \frac{dK_1}{dx} - 2K_0 \frac{dK_0}{dx} \right) = \\ &= 2x (K_1^2 - K_0^2) + x^2 \left( 2K_1 \left( -K_0 - \frac{1}{x} K_1 \right) - 2K_0 \left( -K_1 + \frac{0}{x} K_0 \right) \right) = -2x K_0^2 \end{aligned}$$



então, a integral fica:

$$\int_{\xi_{min}}^{\infty} \xi [K_1^2 + K_0^2] d\xi - \beta^2 \int_{\xi_{min}}^{\infty} \xi K_0^2 d\xi = - \int_{\xi_{min}}^{\infty} \frac{d(\xi K_0 K_1)}{d\xi} d\xi + \frac{\beta^2}{2} \int_{\xi_{min}}^{\infty} \frac{d[\xi^2 (K_1^2 - K_0^2)]}{d\xi} d\xi =$$

$$= \xi_{min} K_1(\xi_{min}) K_0(\xi_{min}) - \frac{\beta^2}{2} \xi_{min}^2 (K_1^2(\xi_{min}) - K_0^2(\xi_{min})) \quad (35')$$

mas  $\xi_{min} = \frac{\omega b_{min}}{\gamma v} = \frac{\omega z e^2}{\gamma^2 m v^3} \ll 10^{-7}$  para partículas relativísticas

e para  $\xi \ll 1$  :  $K_1(\xi) \approx \frac{1}{\xi}$  e  $K_0(\xi) \approx \ln\left(\frac{1.123}{\xi}\right)$

então, a integral fica:

$$\approx \xi_{min} \frac{1}{\xi_{min}} \ln\left(\frac{1.123}{\xi_{min}}\right) - \frac{v^2}{2c^2} \xi_{min}^2 \left[ \frac{1}{\xi_{min}^2} - \ln^2\left(\frac{1.123}{\xi_{min}}\right) \right] \approx \ln\left(\frac{1.123}{\xi_{min}}\right) - \frac{v^2}{2c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dx} = \frac{4\pi N z^2 e^4}{m v^2} \sum_j f_j \left[ \ln\left(\frac{1.123}{\xi_{min}}\right) - \frac{v^2}{2c^2} \right]$$

definindo a frequência média por :  $\ln\langle \omega \rangle = \frac{\sum_j f_j \ln \omega_j}{Z}$  (38)

e calculando:

$$\sum_j f_j \ln\left(\frac{\alpha}{\omega_j}\right) = \sum_j f_j (\ln \alpha - \ln \omega_j) = \ln \alpha \sum_j f_j - \sum_j f_j \ln \omega_j =$$

$$= \ln \alpha Z - Z \ln \langle \omega \rangle = Z \ln(\alpha / \langle \omega \rangle)$$

vem a fórmula clássica de Bohr (1915):

$$\frac{dE_c}{dx} = \frac{4\pi N Z z^2 e^4}{m v^2} \left( \ln B_c - \frac{v^2}{2c^2} \right) \quad (36)$$

onde  $B_c = \frac{1.123 \gamma v}{\langle \omega \rangle b_{min}} = \frac{1.123 \gamma^2 m v^3}{z e^2 \langle \omega \rangle}$  (37)

que é uma boa aproximação para partículas pesadas ( $Z, A, z$ ), lentas e para um grande número de colisões.

- efeitos quânticos
- 1 - não continuidade em  $dE/dx$  ( $b \approx b_{max}$ )
  - 2 - natureza oscilatória, princípio da incerteza

em geral, o resultado clássico superestima os resultados.

Admitindo, por simplicidade, que  $\Delta E(b_{max}) = f(t_1 \omega_0)$ :

$$\Delta E(b_{max}) = \frac{1}{p^2} z^2 \left(\frac{v_0}{v}\right)^4 \frac{(t_1 \omega_0)^2}{I_H}, \quad (39)$$

onde  $v_0 = t_1 / m r_0 = \left(\frac{t_1}{m}\right) \left(\frac{m k e^2}{t_1^2}\right) = (k e^2 / t_1 c) c = \alpha c = c / 137$

e' a velocidade orbital de um elétron no estado fundamental

e  $I_H = m k^2 e^4 / 2 t_1^2 = 13,6 \text{ eV}$  e' o potencial de ionização do hidrogênio  
 como  $I_H = \frac{m (k e^2)^2}{2 t_1^2} \frac{m t_1^2}{m t_1^2} = \frac{t_1^2 (m k e^2)^2}{2 m t_1^2} = \frac{t_1^2}{2 m t_1^2} = \frac{t_1}{2 m t_1} = \frac{t_1}{2 m v_0} = \frac{t_1 \omega_0}{2}$

então para  $v \gg v_0 \Rightarrow \Delta E \ll I_H$  (efeitos quânticos:  $\Delta E = \Sigma_i$ )

(cálculo clássico  $\Delta E \rightarrow 0$ , mas cálculo quântico  $\Delta E \neq 0$ , estatisticamente, após muitas colisões  $\Delta E_f \ll 1$  e a fórmula clássica pode ser usada)

princípio da incerteza:  $\Delta x \approx t_1 / p \Rightarrow b_{min} \approx \Delta x \approx t_1 / p$ :

$$b_{min}^{\ddagger} = \frac{t_1}{2 p m v} \quad (40)$$

e devemos escolher o maior entre  $b_{min}^c$  (6) e  $b_{min}^{\ddagger}$  (40).

como  $\frac{b_{min}^c}{b_{min}^{\ddagger}} = \frac{z e^2}{p m v^2} \frac{p m v}{t_1} = \frac{z e^2}{t_1 m v} \equiv \eta$  (42)

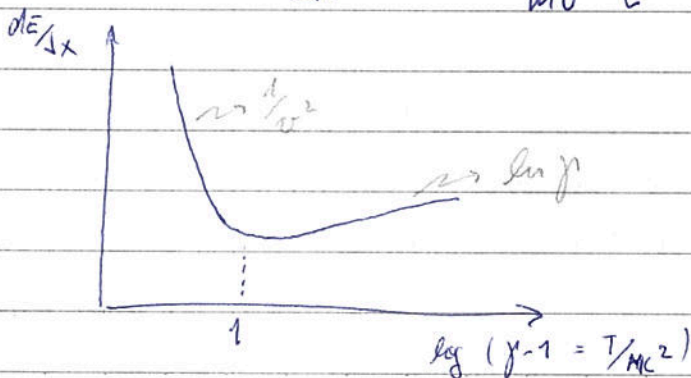
fórmula clássica para  $\eta > 1 \Rightarrow z e \gg 1$  e/ou  $v \ll 1$

para  $\eta < 1$ , modificamos:

$$B_f = \frac{b_{max}}{b_{min}^{\ddagger}} = \eta B \approx \frac{z e^2}{t_1 v} \frac{p m v^3}{z e^2 \omega} = \frac{p^2 m v^2}{t_1 \omega} \quad (43)$$

e temos a fórmula de Bethe (1930):

$$\frac{dE_f}{dx} = 4 \pi N Z \frac{z^2 e^4}{m v^2} \left[ \ln \left( \frac{2 p^2 m v^2}{t_1 \omega} \right) - \frac{v^2}{c^2} \right] \quad (44)$$





para elétrons incidindo sobre elétrons, o cálculo do momento na ref. do CM (em repouso):  $(b_{min})_e = \frac{t_1}{mc} \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}$  (41)

modificando o logaritmo:  $B_e \approx (\gamma-1) \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}} \frac{mc^2}{t_1 \langle \omega \rangle} \approx \gamma^{3/2} \frac{mc^2}{\sqrt{2} t_1 \langle \omega \rangle}$  (45)

No caso de emissões fotoefricas ( $\Delta E \ll E \approx 10 \text{ keV}$ )

$$b_{min}(E) = \frac{ze^2}{\gamma m v^2} = \frac{ze^2}{\gamma \beta^2 (m v)} = \frac{ze^2}{\gamma v \sqrt{2mE}} \Rightarrow B_e(E) = \frac{\gamma v \sqrt{2mE}}{t_1 \langle \omega \rangle}$$

e note que  $b_{min}(E) \approx \frac{t_1}{\Delta p} = \frac{t_1}{\sqrt{2mE}}$  (49)

As expressões de  $dE/dx$  até agora representam a perda média de energia por unidade de caminho percorrido na matéria  $\Rightarrow$  flutuações. Perda de energia média quadrática é:

$$\frac{dE^2}{dx} = 2\pi N Z \int_{b_{min}}^{b_{max}} [\Delta E(b)]^2 b db = 4\pi N Z \frac{z^2 e^4}{m v^2} \left[ \gamma^2 m v^2 \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right) \right], \text{ para } b_{min} \ll b_{max} \quad (50)$$

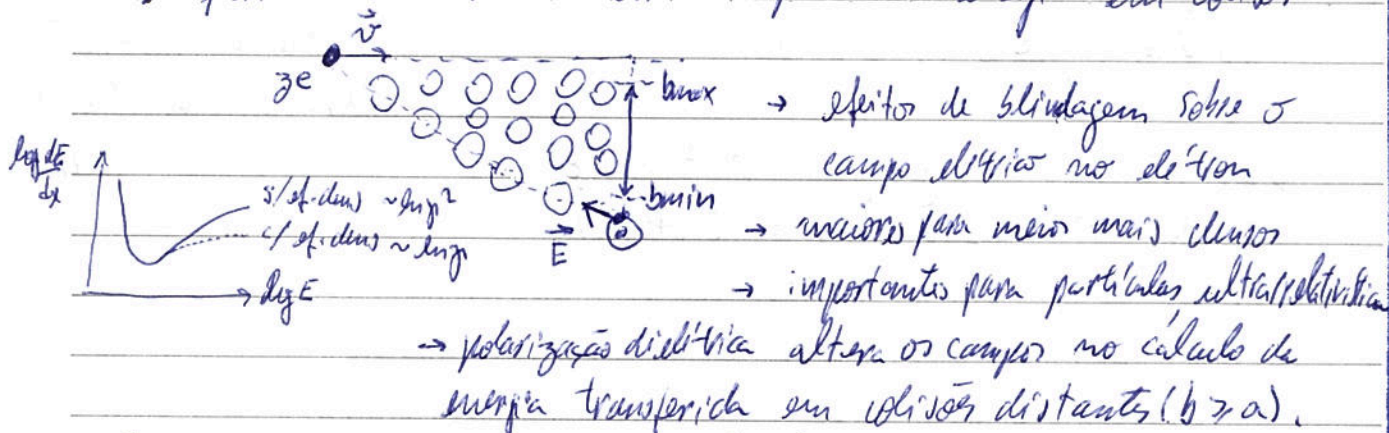
e a distribuição de energia será dada por uma gaussiana:

$$P(E_0, E, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Omega} e^{-\frac{(E-E_0)^2}{2\Omega^2}} \quad (52)$$

onde  $\Omega^2 = x \frac{dE^2}{dx}$ ,  $E_0$  é a energia inicial e  $\bar{E}$  a energia média final.

que vale para  $\Omega \Rightarrow \Delta E_{max} \approx 2\gamma^2 m v^2$ , para partículas muito relativísticas a gaussiana é substituída pela distribuição de Landau.

#### 4) Efeito da densidade sobre a perda de energia em colisões



Seja um meio contínuo de constante dielétrica  $\epsilon(\omega)$ :

$$\vec{D}(\vec{x}, \omega) = \epsilon(\omega) \vec{E}(\vec{x}, \omega)$$

Sejam as transformadas de tempo e frequência:

$$F(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega F(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t}, \quad F(\vec{x}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt F(\vec{x}, t) e^{i\omega t}$$

e as transformadas espaciais:

$$F(\vec{x}, \omega) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3k F(\vec{k}, \omega) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}, \quad F(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3x F(\vec{x}, \omega) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}}$$

que combinadas dão:

$$F(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega F(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (53)$$

então  $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{x}, t) = i\vec{k} \times \vec{F}(\vec{x}, t)$ ,  $\frac{\partial}{\partial t} F(\vec{x}, t) = -i\omega F(\vec{x}, t)$

lembrando que:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho \Rightarrow \epsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \left( -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{c \partial t} \right) = -\nabla^2 \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})}{\partial t} = \frac{4\pi\rho}{\epsilon}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \frac{4\pi\mu\vec{J}}{c} + \frac{\mu\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi\mu\vec{J}}{c} - \frac{\mu\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{\nabla}\phi}{\partial t} - \frac{\mu\epsilon}{c} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

que no calibre de Lorentz:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{\mu\epsilon}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$  de separam-se:

$$\nabla^2 \phi - \frac{\mu\epsilon}{c} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\rho}{\epsilon} \Rightarrow \text{eq. transf.} : (\kappa^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \mu\epsilon) \phi = \frac{4\pi\rho}{\epsilon}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{\mu\epsilon}{c} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu\vec{J}}{c} \Rightarrow \text{eq. transf.} : (\kappa^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \mu\epsilon) \vec{A} = \frac{4\pi\mu\vec{J}}{c}$$

$\kappa^2$

$\frac{\omega^2}{c^2}$



que para um dielétrico ( $\epsilon(\omega)$ ), não magnético ( $\mu=1$ ):

$$\Rightarrow \begin{cases} [\kappa^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega)] \varphi(\vec{\kappa}, \omega) = \frac{4\pi \rho(\vec{\kappa}, \omega)}{\epsilon(\omega)} \\ [\kappa^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega)] \vec{A}(\vec{\kappa}, \omega) = \frac{4\pi}{c} \vec{J}(\vec{\kappa}, \omega) \end{cases} \quad (54)$$

São as equações de onda transformadas,

A única fonte macroscópica é a carga incidente:

$$\rho(\vec{x}, t) = ze \delta(\vec{x} - \vec{v}t) \quad \vec{J}(\vec{x}, t) = \vec{v} \rho(\vec{x}, t) \quad (55)$$

Suas transformadas de Fourier são:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{\kappa}, \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3x dt e^{-i(\vec{\kappa} \cdot \vec{x} - \omega t)} ze \delta(\vec{x} - \vec{v}t) = \\ &= \frac{ze}{(2\pi)^2} \int dt e^{-i(\vec{\kappa} \cdot \vec{v} - \omega)t} = \frac{ze}{2\pi} \delta(\omega - \vec{\kappa} \cdot \vec{v}) \end{aligned} \quad (56')$$

$$\begin{aligned} \vec{J}(\vec{\kappa}, \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3x dt e^{-i(\vec{\kappa} \cdot \vec{x} - \omega t)} \vec{v} ze \delta(\vec{x} - \vec{v}t) = \\ &= \frac{ze}{(2\pi)^2} \int dt e^{-i(\vec{\kappa} \cdot \vec{v} - \omega)t} \vec{v} = \frac{ze}{2\pi} \vec{v} \delta(\omega - \vec{\kappa} \cdot \vec{v}) = \vec{v} \rho(\vec{\kappa}, \omega) \end{aligned} \quad (56'')$$

2 as transformadas de Fourier dos potenciais:

$$\varphi(\vec{\kappa}, \omega) = \frac{2ze}{\epsilon(\omega) [\kappa^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega)]} \delta(\omega - \vec{\kappa} \cdot \vec{v}) \quad (57)$$

$$\vec{A}(\vec{\kappa}, \omega) = \frac{4\pi}{c} \frac{\vec{v} ze \delta(\omega - \vec{\kappa} \cdot \vec{v})}{2\pi [\kappa^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega)]} = \epsilon(\omega) \frac{\vec{v}}{c} \varphi(\vec{\kappa}, \omega)$$

$$\text{de } \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \vec{E}(\vec{\kappa}, \omega) = -i\vec{\kappa} \varphi(\vec{\kappa}, \omega) + i\omega \frac{\vec{A}(\vec{\kappa}, \omega)}{c}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{\kappa}, \omega) = i \left[ \frac{\omega \epsilon(\omega) \vec{v}}{c} - \vec{\kappa} \right] \varphi(\vec{\kappa}, \omega) \quad (58')$$

$$\text{de } \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \Rightarrow \vec{B}(\vec{\kappa}, \omega) = i\vec{\kappa} \times \vec{A}(\vec{\kappa}, \omega) = i\epsilon(\omega) \vec{\kappa} \times \frac{\vec{v}}{c} \varphi(\vec{\kappa}, \omega) \quad (58'')$$

daí transformada:  $\vec{E}(x, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \vec{E}(\vec{k}, \omega) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$

Tomamos o campo a uma distância perpendicular  $b$  de uma partícula que se move na direção  $x$ :

$$\vec{E}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \vec{E}(\vec{k}, \omega) e^{i\vec{k}\cdot\vec{b}} \quad (59)$$

Seja  $\vec{E} = E_1(\omega) \hat{x} + E_2(\omega) \hat{y}$ , então de (57) e (58), vem:

$$E_1(\omega) = \frac{ze}{\epsilon(\omega)} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{b}} \left[ \frac{\omega \epsilon(\omega) \nu - k_1}{c^2} \right] \frac{\delta(\omega - \nu k_1)}{[k^2 - \omega^2/c^2 \epsilon(\omega)]} \quad (60)$$

integrando em  $d^3k_1$ :

$$\delta(\omega - \nu k_1) \Rightarrow k_1 = \omega/\nu, \quad \delta(\alpha x) = \delta(x)/|\alpha|$$

$$\lambda^2 = k_1^2 - \omega^2/c^2 \epsilon = \omega^2/\nu^2 (1 - \beta^2 \epsilon)$$

$$E_1(\omega) = -\frac{ze \omega}{(2\pi)^{3/2} \nu^2} \left[ \frac{1}{\epsilon(\omega)} - \beta^2 \right] \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 e^{ibk_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_3}{k_2^2 + k_3^2 + \lambda^2} \quad (61)$$

mas  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_3}{k_2^2 + k_3^2 + \lambda^2} = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^2 + k_2^2}} \Rightarrow$

$$E_1(\omega) = -\frac{ize \omega}{\sqrt{2\pi} \nu^2} \left[ \frac{1}{\epsilon(\omega)} - \beta^2 \right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ibk_2} dk_2}{\sqrt{\lambda^2 + k_2^2}} \quad (62)$$

agora, de  $K_0(z) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu + 1/2)}{\sqrt{\pi} z^\nu} \int_0^\infty \frac{dx \omega(xz)}{(1+x^2)^{\nu+1/2}} \Rightarrow$

$$K_0(z) = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{dx \omega(xz)}{(1+x^2)^{1/2}}, \quad \text{vem: } x = k_2/\lambda, \quad xz = b k_2 = b \lambda x$$

$$E_1(\omega) = -\frac{ize \omega}{\nu^2} \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \left[ \frac{1}{\epsilon(\omega)} - \beta^2 \right] K_0(\lambda b) \quad (63) \Rightarrow z = b \lambda$$

analogamente  $E_2(\omega) = \frac{ze}{\nu} \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{\lambda}{\epsilon(\omega)} K_1(\lambda b) \quad (64)$

$$B_3(\omega) = \epsilon(\omega) \beta E_2(\omega)$$

que no limite  $\epsilon(\omega) \rightarrow 1$  tendem aos resultados obtidos anteriormente em (29) e (30).



de (4.34) :  $\vec{P} = \frac{1}{4\pi} (\vec{D} - \vec{E}) = \frac{(\epsilon - 1)\vec{E}}{4\pi}$  e se  $\vec{P} = -Ne \sum_j f_j \vec{x}_j$ ,

onde  $N$  é o número de átomos por unidade de volume e  $f_j$  a fração dos átomos com amplitude  $\vec{x}_j$  de dipolo.

Logo :  $\Delta E(b) = 2e \sum_j f_j \text{Re} \int_0^\infty i\omega \vec{x}_j(\omega) \cdot \vec{E}^*(\omega) d\omega$ ,

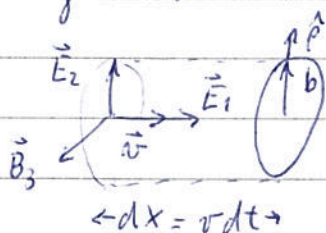
temos para o termo do dielétrico :

$$\Delta E(b) = \frac{1}{2\pi N} \text{Re} \int_0^\infty -i\omega \epsilon(\omega) |\vec{E}(\omega)|^2 d\omega \quad (65)$$

então para colisões com  $b \geq a$  :

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b \geq a} = 2\pi N \int_a^\infty \Delta E(b) b db$$

Na geometria :



o vetor de Poynting na direção radial é

$$S_p = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot \hat{p} = -\frac{c}{4\pi} E_1 B_3$$

e como  $[S] = \left[ \frac{d^2 P}{dx^2} \right]$  integrando sobre o círculo de raio  $b$  e sobre o tempo :

$$\left(\frac{dE}{dx}\right) = \frac{c}{4\pi} 2\pi b \int_{-\infty}^{+\infty} dt (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot \hat{p}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dE}{dx}\right) = -\frac{cb}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt B_3(t) E_1(t) = -\frac{cb}{4\pi} \int dt d\omega d\omega' B_3(\omega') E_1(\omega) e^{-i(\omega+\omega')t} =$$

$$= -\frac{cb}{2} \int d\omega d\omega' B_3(\omega') E_1(\omega) \delta(\omega+\omega') = -\frac{cb}{2} \int d\omega B_3(-\omega) E_1(\omega) =$$

$$= -\frac{cb}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega E_1(\omega) B_3^*(\omega) = -cb \text{Re} \int_0^\infty d\omega E_1(\omega) B_3^*(\omega)$$

ou ainda :  $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \text{Re} (\vec{E} \times \vec{B}^*)$ , ou inserindo as funções  $E_1(\omega)$  e  $B_3^*(\omega)$  :

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b \geq a} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{ze}{v}\right)^2 \text{Re} \int_0^\infty i\omega \lambda^* a k_1(\lambda^* a) K_0(\lambda a) \left(\frac{1}{\epsilon(\omega)} - \beta^2\right) d\omega$$

Fermi (67)

Seja o caso de  $\epsilon(\omega)$  complexo; a polarização vem de  
 $\vec{D}(\vec{x}, \omega) = \vec{E}(\vec{x}, \omega) + 4\pi\vec{P}(\vec{x}, \omega)$ ,  
 num meio linear:  $\vec{P}(\vec{x}, \omega) = \chi(\omega)\vec{E}(\vec{x}, \omega)$ , com  $\chi(\omega) = \frac{\epsilon(\omega) - 1}{4\pi}$

e para um oscilador harmônico amortecido (cap. 7):

$$\vec{P}(\omega) = \frac{ne^2}{m} \frac{\vec{E}(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma}$$

onde  $n$  é a densidade eletrônica. A constante dielétrica correspondente é:  $\epsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma}$ ,

onde  $\omega_p = \sqrt{4\pi ne^2/m}$  é a frequência de plasma.

Se  $f_j$  é a fração dos átomos com frequência  $\omega_j$ , vem:

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi N e^2}{m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_j} \quad (69)$$

as expressões são complicadas para integrar diretamente, vamos aproximar para o caso ultrarelativístico ( $\beta \approx 1$ ). Para frequências ópticas (muito importantes) e  $a \sim$  raio atômico:

$$|\lambda a| \sim (\omega a/c) \ll 1$$

e temos pequenos argumentos nas funções de Bessel:

$$\lambda^* a K_1(\lambda^* a) \approx \lambda^* a \frac{1}{\lambda^* a} = 1$$

$$K_0(\lambda a) \approx \ln(1.123/\lambda a)$$

A expressão de Fermi fica:

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\beta \approx 1} \approx \frac{2}{\pi} \left(\frac{ze}{v}\right)^2 Re \int_0^\infty i\omega \ln\left(\frac{1.123}{\lambda a}\right) \left(\frac{1}{\epsilon(\omega)} - \beta^2\right) d\omega$$

no limite  $\beta \rightarrow 1$  ( $v \rightarrow c$ ) e da definição de  $\lambda$ :

$$\lambda \approx \omega/c (1 - \beta^2 \epsilon)^{1/2} \Rightarrow \ln\left(\frac{1.123}{\lambda a}\right) \approx \ln\left(\frac{1.123c}{\omega a}\right) - \frac{1}{2} \ln(1 - \epsilon)$$

$$\text{e daí: } \left(\frac{dE}{dx}\right)_{\beta \approx 1} \approx \frac{2}{\pi} \left(\frac{ze}{c}\right)^2 Re \int_0^\infty i\omega \left(\frac{1}{\epsilon(\omega)} - 1\right) \left\{ \ln\left(\frac{1.123c}{\omega a}\right) - \frac{1}{2} \ln[1 - \epsilon(\omega)] \right\} d\omega$$

(70)



$$\text{def.: } \left( \frac{dE}{dx} \right)_{bza} \approx \frac{2}{\pi} \left( \frac{ze}{c} \right)^2 \text{Re}(I), \text{ com } I = \int_0^{\infty} w \left[ \ln\left(\frac{1.123c}{wa}\right) - \frac{1}{2} \ln(1-\epsilon) \right] \left( \frac{1-\epsilon}{\epsilon} \right) dw$$

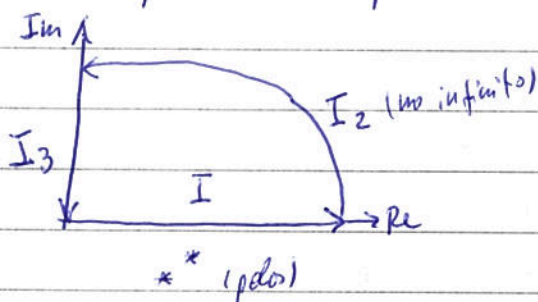
$$\text{de } \epsilon(w) = 1 + \frac{wp^2}{w_0^2 - w^2 - iw\Gamma} \Rightarrow 1 - \epsilon(w) = \frac{-wp^2}{w_0^2 - w^2 - iw\Gamma} \Rightarrow$$

$$\frac{1 - \epsilon(w)}{\epsilon(w)} = \frac{-wp^2}{w_0^2 + wp^2 - w^2 - iw\Gamma}, \text{ além disso:}$$

$$\frac{1}{2} \ln[1 - \epsilon(w)] = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{-wp^2}{w_0^2 - w^2 - iw\Gamma}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{wp^2}{w^2 - w_0^2 + iw\Gamma}\right) = \ln wp - \frac{1}{2} \ln(w^2 - w_0^2 + iw\Gamma)$$

$$\text{e assim: } I = i \int_0^{\infty} w \left[ \ln\left(\frac{1.123c}{wa}\right) - \ln w + \frac{1}{2} \ln(w^2 - w_0^2 + iw\Gamma) \right] \left( \frac{-wp^2}{w_0^2 + wp^2 - w^2 - iw\Gamma} \right) dw$$

Esta integral pode ser obtida pelo teorema de Cauchy, adicionando-se a I outros 2 integrais, tal que se forme um caminho fechado no plano complexo:



Sem polos no interior  
( $\sum \text{Res} = 0$ )

A integral  $I_3$  é puramente imaginária, seja  $w = i\Omega$ , com  $\Omega$  real:

$$I_3 = i \int_0^{\infty} i\Omega \left[ \ln\left(\frac{1.123c}{wa}\right) - \ln(i\Omega) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{i^2\Omega^2 - w_0^2 + i^2\Omega\Gamma}{w_0^2 + wp^2 - i^2\Omega^2 - i^2\Omega\Gamma}\right) \right] \left( \frac{-wp^2}{w_0^2 + wp^2 - i^2\Omega^2 - i^2\Omega\Gamma} \right) d\Omega$$

$$\text{mas } -\ln w + \frac{1}{2} \ln(w^2 - w_0^2 + iw\Gamma) = \ln\left(\frac{\sqrt{w^2 - w_0^2 + iw\Gamma}}{w}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{-(\Omega^2 + w_0^2 + \Omega\Gamma)}}{i\Omega}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{i\sqrt{\Omega^2 + w_0^2 + \Omega\Gamma}}{i\Omega}\right) = -\ln\Omega + \frac{1}{2} \ln(\Omega^2 + w_0^2 + \Omega\Gamma)$$

$$\Rightarrow I_3 = i \int_0^{\infty} \Omega \left[ \ln\left(\frac{1.123c}{wa}\right) - \ln\Omega + \frac{1}{2} \ln(\Omega^2 + w_0^2 + \Omega\Gamma) \right] \left( \frac{wp^2}{\Omega^2 + w_0^2 + wp^2 + \Omega\Gamma} \right) d\Omega \Rightarrow \text{Re}(I_3) = 0$$

Para calcular a integral  $I_2$ , fazemos  $w = \Omega e^{i\theta}$

com  $\Omega \rightarrow \infty$  e  $\theta$  variando no intervalo  $[0, \pi/2]$ , mas apenas

$$-\ln w + \frac{1}{2} \ln(w^2 - w_0^2 + iw\Gamma) = \ln\left(\frac{\sqrt{\Omega^2 e^{2i\theta} - w_0^2 + i\Omega\Gamma e^{i\theta}}}{\Omega e^{i\theta}}\right)$$

$$\sim \ln\sqrt{1 - (w_0/\Omega e^{i\theta})^2 + i\Gamma/\Omega e^{i\theta}} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow I_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\omega a} \left[ \frac{1 - \beta^2 \cos^2 \theta}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} \right] \frac{1}{\omega a} e^{i\theta} d\theta$$

$$\Rightarrow I_2 = -\omega p^2 \int_0^{\pi/2} e^{2i\theta} \ln\left(\frac{1.123c}{\omega a}\right) \sigma(e^{-2i\theta}) d\theta \approx -\omega p^2 \ln\left(\frac{1.123c}{\omega a}\right) \int_0^{\pi/2} d\theta$$

$$\Rightarrow I_2 = -\omega p^2 \frac{\pi}{2} \ln\left(\frac{1.123c}{\omega a}\right) \text{ e como } \Sigma P_{res} = 0 \Rightarrow I = -I_2$$

então:  $\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a} = \left(\frac{ze\omega p}{c}\right)^2 \ln\left(\frac{1.123c}{\omega a}\right)$  (71)

comparando com (36):

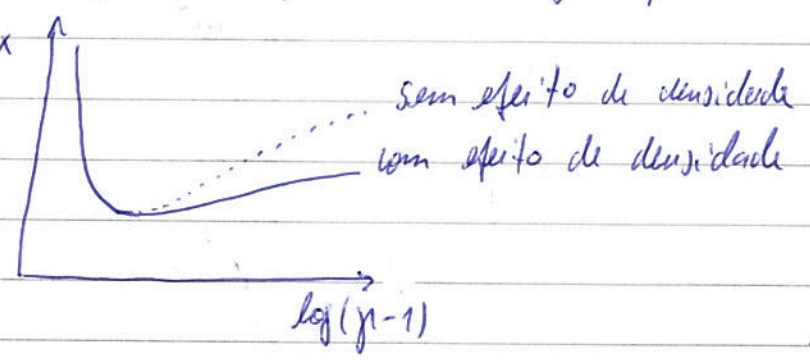
$$\frac{dE_c}{dx} = 4\pi N Z \frac{z^2 e^4}{m v^2} \left( \ln Bc - \frac{\beta^2}{2} \right) \xrightarrow{\lim \beta \rightarrow 1} \left(\frac{ze}{c}\right)^2 \omega p^2 \left( \ln Bc - \frac{1}{2} \right)$$

com  $\omega p^2 = \frac{4\pi N Z e^2}{m}$  (72) e  $Bc = \frac{1.123 \mu c}{\langle \omega \rangle a}$

então:  $\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a} = \frac{(ze)^2 \omega p^2}{c^2} \left[ \ln\left(\frac{1.123 \mu c}{a \langle \omega \rangle}\right) - \frac{1}{2} \right]$  (73)

na fórmula final para a blindagem (71):  $\langle \omega \rangle \rightarrow \omega p$   
 $\beta \rightarrow 1$  (desaparece)

há, portanto, uma diminuição na perda de energia para altas energias:  $dE/dx$



### 5) Radiação Cherenkov

Admitimos anteriormente  $|\lambda a| \ll 1$ , se  $|\lambda a| \gg 1$ , de (63):

$$E_1(\omega b) = -\frac{izew}{v^2} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left[ 1 - \beta^2 \right] K_0(\lambda b) \rightarrow \frac{izew}{c^2} \left[ 1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon(\omega)} \right] \frac{e^{-\lambda b}}{\sqrt{\lambda b}}$$

$K_0(\lambda b) \approx K_1(\lambda b) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda b}} e^{-\lambda b}$  (76')



$$\text{de (64): } E_2(\omega, b) = \frac{ze}{v} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\lambda}{\epsilon(\omega)} K_1(\lambda b) \rightarrow \frac{ze}{v \epsilon(\omega)} \sqrt{\frac{\lambda}{b}} e^{-\lambda b} \quad (76'')$$

$$B_3(\omega, b) = \epsilon(\omega) \beta E_2(\omega) \rightarrow \epsilon(\omega) \beta E_2(\omega, b) \quad (76''')$$

e o integrando de (68):

$$-ca B_3^* E_1 \rightarrow \frac{ze^2}{c^2} \left(-i \sqrt{\frac{\lambda^*}{\lambda}}\right) \omega \left[1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon(\omega)}\right] e^{-(\lambda + \lambda^*)a} \quad (77)$$

como  $\lambda = \omega/v \sqrt{1 - \epsilon(\omega) \beta^2} \in \mathbb{C}$ , se  $\text{Re}(\lambda) > 0 \Rightarrow e^{-(\lambda + \lambda^*)a} \rightarrow 0$   
 e a energia é dissipada nas vizinhanças. maioria (para  $|\lambda a| \gg 1$ )

A única condição para a energia ser emitida para longe ( $|\lambda a| \gg 1$ ):

$$e^{-(\lambda + \lambda^*)a} = 1 \Rightarrow \lambda + \lambda^* = 0 \Rightarrow \lambda \text{ é imaginário puro}$$

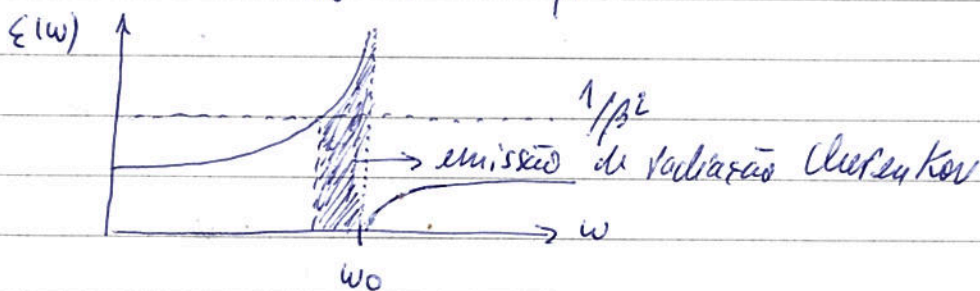
$$\Rightarrow \epsilon(\omega) \text{ real e } \beta^2 \epsilon(\omega) > 1 \Rightarrow \frac{v}{c} > \frac{1}{\sqrt{\epsilon(\omega)}} \quad (78)$$

ou  $v > \frac{c}{\sqrt{\epsilon(\omega)}} = \frac{c}{n}$ , onde  $n$  é o índice de refração

ou seja:  $v > c/n$  (Veloc. da partícula > Veloc. de fase dos campos de freq.  $\omega$ )

assumindo um modelo simples para o dielétrico:

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} > \frac{1}{\beta^2}$$



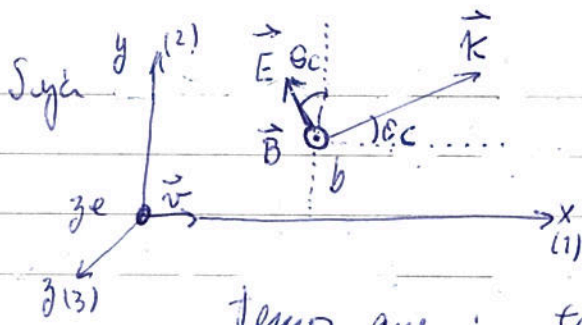
se  $\lambda$  é imaginário puro:  $\left(-i \sqrt{\frac{\lambda^*}{\lambda}}\right) = \left(-i \sqrt{\frac{-iy}{iy}}\right) = (-i \sqrt{-1}) = -i^2 = 1$

e a eq. (77) é real e independente de  $a$

De (68):  $\left(\frac{dE}{dx}\right)_{Ch} = \frac{(ze)^2}{c^2} \int \frac{\omega \left[1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon(\omega)}\right] d\omega}{\epsilon(\omega) > 1/\beta^2} \quad (79)$

que é a fórmula de Frank-Tamm (1937) da radiação

Cherenkov (1934).



válida para grandes distâncias, em que os campos são transversais

temos que:  $\tan \theta_c = \frac{-E_1}{E_2}$  (80)

e  $\cos \theta_c = \frac{E_2}{\sqrt{E_2^2 + E_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (E_1/E_2)^2}} = \frac{1}{\beta \sqrt{\epsilon(\omega)}}$  pois (81)

$$\left(\frac{E_1}{E_2}\right)^2 = \frac{i^2 z_e^2 \omega^2}{c^4} \left[ \frac{1-1}{\beta^2 \epsilon} \right]^2 \frac{e^{-2\lambda b}}{\lambda b} \frac{v^2 \epsilon^2 b}{z_e^2 \epsilon^2 \lambda e^{-2\lambda b}} = \frac{-v^2 \epsilon^2 \omega^2}{c^4} \frac{(\beta^2 \epsilon - 1)^2}{\beta^4 \epsilon^2 \lambda^2} = \frac{-v^2 \omega^2}{c^4} \frac{(1 - \beta^2 \epsilon)^2}{\beta^4 \omega^2 (1 - \beta^2 \epsilon)} = -1 + \beta^2 \epsilon$$

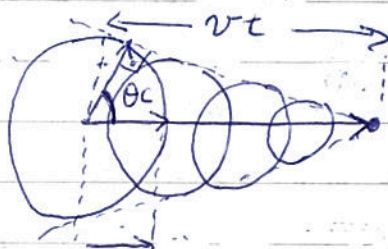
mas  $\cos \theta_c = \frac{1}{\beta \sqrt{\epsilon}} = \frac{c}{v \cdot n} = \frac{(c/n)}{v} = \frac{v_f}{v} \rightarrow$  veloc. fase dos campos  
 $v \rightarrow$  veloc. partícula

de (78), vem:  $\beta \geq \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \Rightarrow \frac{1}{\beta \sqrt{\epsilon}} < 1 \Rightarrow \cos \theta_c < 1 \Rightarrow \theta_c$  é um ângulo físico



$ct/m = ct/\sqrt{\epsilon}$

caso ( $v < c/\sqrt{\epsilon}$ )



$ct/m = ct/\sqrt{\epsilon}$

$\cos \theta_c = \frac{ct \cdot 1}{\sqrt{\epsilon} v \cdot \beta \sqrt{\epsilon}} = \frac{1}{\beta \sqrt{\epsilon}}$

de (57):  $\vec{A}(\vec{k}, \omega) = \epsilon(\omega) \vec{\beta} z_e \delta(\vec{\omega} - \vec{k} \cdot \vec{v})$  e de (53):  
 $\frac{\epsilon(\omega) [\kappa^2 - \omega^2/c^2 \epsilon(\omega)]}{\epsilon(\omega) [\kappa^2 - \omega^2/c^2 \epsilon(\omega)]}$

$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3 \kappa \int d\omega \vec{A}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$

$= \frac{z_e \vec{\beta}}{(2\pi)^2} \int d^3 \kappa \int d\omega \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} = (\omega = \vec{k} \cdot \vec{v})$

$= \frac{z_e \vec{\beta}}{(2\pi)^2} \int d^3 \kappa \frac{e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \vec{k} \cdot \vec{v} t)}}{[\kappa^2 - (\vec{k} \cdot \vec{v})^2/c^2 \epsilon]} = \frac{z_e \vec{\beta}}{(2\pi)^2} \int d^3 \kappa \frac{e^{i\kappa_1(x - vt)} e^{i\vec{\kappa}_\perp \cdot \vec{\rho}}}{\kappa_1^2 (1 - \beta^2 \epsilon) + \kappa_\perp^2}$   
 com  $\vec{\rho} \perp \hat{x}$  e  $\kappa_\perp \perp \vec{k}_1$



Vamos expressar a integral em  $K_1$  na forma:

$$\int dK_1 \frac{e^{iK_1 z}}{\alpha K_1^2 + K_\perp^2} = \int dz \frac{e^{i\beta z}}{\alpha z^2 + y^2}, \text{ onde } z = K_1, y = K_\perp$$

$$z = x - vt, \alpha = 1 - \beta^2 \epsilon$$

Sejam  $z = x - vt > 0$  os pontos adiante da partícula

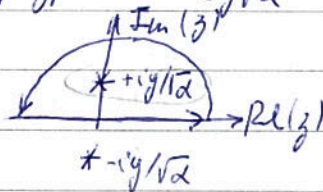
No regime Cherenkov:  $\beta^2 \epsilon > 1 \Rightarrow \alpha < 0$  e o integrando tem 2 pólos:

$$z^2 = -y^2/\alpha \Rightarrow z_p = \pm iy/\sqrt{\alpha} \quad (\Rightarrow z_p = y/\sqrt{1-\alpha})$$

como:  $\frac{1}{\alpha z^2 + y^2} = \frac{1}{2y\sqrt{\alpha}} \left( \frac{i}{z - iy/\sqrt{\alpha}} - \frac{i}{z + iy/\sqrt{\alpha}} \right)$ , podemos calcular os

resíduos:  $\lim_{z \rightarrow z_p} (z - z_p) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_p} \left( \frac{z \pm iy/\sqrt{\alpha}}{2y\sqrt{\alpha}} \right) \left( \frac{ie^{i\beta z}}{z + iy/\sqrt{\alpha}} - \frac{ie^{i\beta z}}{z - iy/\sqrt{\alpha}} \right)$

tomando um contorno pelo plano superior no infinito



$$Res = \lim_{z \rightarrow +iy/\sqrt{\alpha}} \left( \frac{z - iy/\sqrt{\alpha}}{2y\sqrt{\alpha}} \right) \left( \frac{ie^{i\beta z}}{z + iy/\sqrt{\alpha}} - \frac{ie^{i\beta z}}{z - iy/\sqrt{\alpha}} \right) = \frac{1}{2y\sqrt{\alpha}} (-i) e^{i\beta z}$$

$$\Rightarrow \oint f(z) dz = 2\pi i \sum Res = \frac{2\pi i (-i) e^{i\beta z}}{2y\sqrt{\alpha}} = \frac{\pi e^{i\beta z}}{y\sqrt{\alpha}} = \frac{\pi e^{iK_\perp(x-vt)/\sqrt{1-\beta^2\epsilon}}}{K_\perp \sqrt{1-\beta^2\epsilon}}$$


voltando ao potencial vetor:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{2ze}{(2\pi)^2} \beta \pi \int d^2 K_\perp \frac{e^{iK_\perp(p+x-vt)/\sqrt{1-\beta^2\epsilon}}}{K_\perp \sqrt{1-\beta^2\epsilon}}$$

## 7) Espalhamento elástico de partículas rápidas por átomos

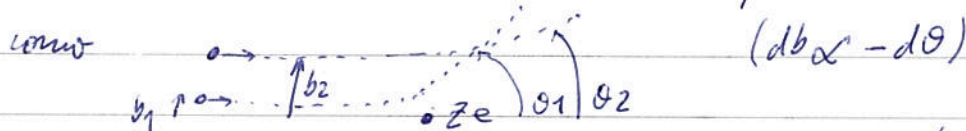
Uma partícula rápida de momento  $p = \gamma M v$  e carga  $ze$  passando por um núcleo de carga  $Ze$  com parâmetro de impacto  $b$  sofrerá um desvio (de (3)):

$$\theta \approx \frac{2zZe^2}{\gamma v b} \quad (89)$$

Seja   $n = \frac{dN}{dA dt} \Rightarrow \frac{dN}{dt} = n dA = n b db d\phi =$  (90)

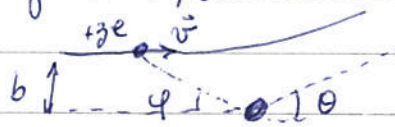
nº partículas por unidade de tempo em  $d\Omega$  :  $\frac{dN}{dt} = n \frac{d\Omega}{d\Omega} \sin\theta d\theta d\phi$   
(entre  $b$  e  $b+db$ ,  $\phi$  e  $\phi+d\phi$ )

então :  $\frac{d\Omega}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|$ , onde o módulo é por causa de  $(db < -d\theta)$  (91)



de (89) :  $\frac{db}{d\theta} = -\frac{2zZe^2}{\gamma v \theta^2} \Rightarrow \frac{d\Omega}{d\Omega} \approx \frac{b}{\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \left( \frac{2zZe^2}{\gamma v} \right)^2 \frac{1}{\theta^4}$  (92)

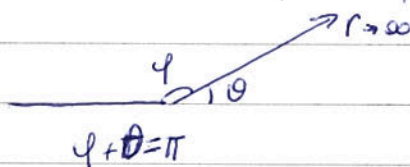
Seja o espalhamento Rutherford (coulombiano):



a máxima aproximação é

$$\frac{1}{2} M v^2 = k \frac{zZe^2}{d} \Rightarrow d = \frac{2kzZe^2}{Mv^2}$$

em coordenadas polares, a trajetória é :  $\frac{1}{r} = \frac{1}{b} \sin\varphi + \frac{d}{2b^2} (\cos\varphi - 1)$



que para  $r \rightarrow \infty$  :  $0 = \frac{1}{b} \sin\theta - \frac{d}{2b^2} (\cos\theta + 1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\cos\theta + 1}{\sin\theta} = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2b}{d} \Rightarrow b = \frac{d}{2} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) = \left( \frac{kzZe^2}{Mv^2} \right) \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

de  $\frac{d}{dx} \cot x = -\frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow 2\pi b db = 2\pi \left( \frac{d}{2} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \left( -\frac{d}{4} \frac{d\theta}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right) = -\frac{d^2}{8} \frac{2\pi \sin\theta}{2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$   
 $\sin\theta = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$



$$\Rightarrow 2\pi b db d\theta = \frac{d^2}{16} \frac{2\pi \sin\theta d\theta d\phi}{\sin^4\theta/2} = \frac{4}{\pi b_0} \left( \frac{zZe^2}{mv^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4\theta/2} = d\sigma,$$

onde tomamos  $|db/d\theta|$  e  $K=1 \Rightarrow \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{zZe^2}{2mv^2} \right)^2 \operatorname{cosec}^4\frac{\theta}{2}}$  (93)

que é a fórmula da seção de choque de Rutherford.

Para  $b \gg 1$ , no modelo de Fermi-Thomson, o potencial pode ser aproximado:

$$V(r) \approx \frac{zZe^2}{r} \exp(-r/a),$$
 (94)

onde o raio atômico é  $a \approx 1,4 a_0 Z^{-1/3}$ , (95)

com  $a_0 = \hbar^2/me^2$  sendo o raio de Bohr.

de (92):  $\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \frac{1}{\theta^4}$ , mas para grandes  $b$  o efeito de blindagem com que a seção de choque

tenda a um valor finito quando  $\theta \rightarrow 0$ :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \left( \frac{zZe^2}{pv} \right)^2 \frac{1}{(\theta^2 + \theta_{\min}^2)^2}$$
 (96)

de (3), para  $\theta \ll 1$ :  $\theta \approx \theta_{\min} = \frac{\Delta p}{p} = \frac{2zZe^2}{pvb}$

e podemos estimar  $\theta_{\min}$  fazendo  $b=a$ :  $\theta_{\min} \approx \frac{2zZe^2}{pv a}$  (97)

Integrando sobre todos os ângulos vem a seção de choque total:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\theta d\theta d\phi \approx 2\pi \left( \frac{zZe^2}{pv} \right)^2 \int_0^\pi \frac{\theta d\theta}{(\theta^2 + \theta_{\min}^2)^2}$$
 (103)

$$\int_0^\pi \frac{\theta d\theta}{(\theta^2 + \theta_{\min}^2)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{2u} = -\frac{1}{2(\theta^2 + \theta_{\min}^2)} \Big|_0^\pi = \frac{1}{2\theta_{\min}^2} - \frac{1}{2(\pi^2 + \theta_{\min}^2)}$$

( $u \Rightarrow 2\theta d\theta = du$ )

$$= \frac{\frac{1}{2\theta_{\min}^2} - \frac{1}{2(\pi^2 + \theta_{\min}^2)}}{2\theta_{\min}^2(\pi^2 + \theta_{\min}^2)} \approx \frac{\pi^2}{2\theta_{\min}^2 \pi^2} = \frac{1}{2\theta_{\min}^2}$$

$$\Rightarrow \sigma \approx \pi \left( \frac{zZe^2}{pv} \right)^2 \frac{1}{\theta_{\min}^2} = \pi a^2$$
 (104')

na estimativa quântica:  $\Delta x < a \Rightarrow \Delta p \gtrsim \hbar/a \Rightarrow$

$$\theta_{\min}^2 \approx \frac{\Delta p}{p} = \frac{\hbar}{pa} \quad (98) \quad \Rightarrow \sigma \approx \pi a^2 \left( \frac{zZe^2}{\hbar v} \right)^2$$
 (104'')

para núcleos pontuais as fórmulas são válidas, mas para um núcleo de dimensão finita:

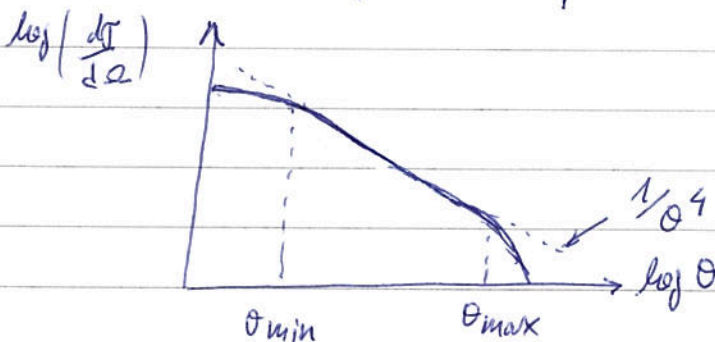
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{finito}} = |F(q^2)|^2 \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{pontual}}$$

onde  $F(q^2)$  é o fator de forma.

Para pequenos  $\lambda$  o espalhamento é difrativo confinado em  $\Delta\theta \approx \lambda/kR = \hbar/pR$ , onde  $R$  é o raio do núcleo, isto define  $\theta_{\text{max}}$ :  $\theta_{\text{max}} \approx \frac{\hbar}{pR}$  (101)

usando  $R = 1,4 A^{1/3} \cdot 10^{-15}$  m, vem:

$$\theta_{\text{max}} \approx \frac{\hbar}{2\pi (1,4 \cdot 10^{-15}) A^{1/3} p \text{ mc}} = \frac{276}{A^{1/3}} \frac{\text{mc}}{p} \quad (102)$$



8) Ângulo de espalhamento médio quadrático e distribuição angular do espalhamento múltiplo

O espalhamento Rutherford está confinado em ângulos pequenos, mas num material de espessura finita ocorrem múltiplos espalhamentos. Vamos calcular o ângulo típico, ou médio, de espalhamento. O ângulo médio quadrático é

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{\int \theta^2 (d\sigma/d\Omega) d\Omega}{\int (d\sigma/d\Omega) d\Omega} \quad (105)$$

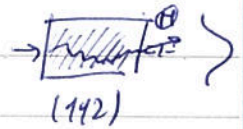
$$\text{de (92): } \langle \theta^2 \rangle = \frac{\int \theta^2 (1/\theta^4) \sin\theta d\theta d\varphi}{\int (1/\theta^4) \sin\theta d\theta d\varphi} \approx \frac{\int \theta^{-2} \theta d\theta}{\int \theta^{-4} \theta d\theta} = \frac{\int_{\theta_{\text{min}}}^{\theta_{\text{max}}} d\theta/\theta}{\int_{\theta_{\text{min}}}^{\theta_{\text{max}}} d\theta/\theta^3} \Rightarrow$$





A distribuição para o espalhamento múltiplo é gaussiana:

$$P_M(\theta') d\theta' = \frac{1}{\sqrt{\pi \langle \theta^2 \rangle}} \exp\left(-\frac{\theta'^2}{\langle \theta^2 \rangle}\right) d\theta' \quad (112)$$



de (92);  $d\Omega = \left(\frac{d\Omega}{d\Omega}\right) d\Omega \approx \left(\frac{2zZe^2}{pv}\right)^2 \frac{1}{\theta^4} \theta d\theta d\varphi$

convertendo ( $\theta = \theta'/\sin\varphi$ ):  $d\Omega \approx \left(\frac{2zZe^2}{pv}\right)^2 \frac{d\theta' \sin^2\varphi d\varphi}{\theta'^3}$

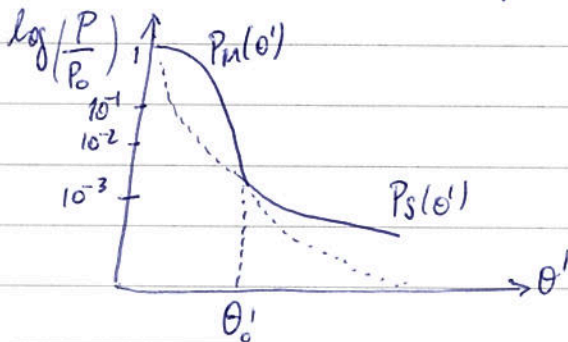
integrando de 0 a  $\pi$  em  $\varphi$ , para que  $\theta' > 0$ :

$$\int_0^\pi \sin^2\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{d\Omega}{d\theta'} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{2zZe^2}{pv}\right)^2 \frac{1}{\theta'^3} \quad (113)$$

então, para 1 espalhamento (simple), a distribuição é:

$$P_S(\theta') d\theta' = N_t \frac{d\Omega}{d\theta'} d\theta' = \frac{\pi}{2} N_t \left(\frac{2zZe^2}{pv}\right)^2 \frac{d\theta'}{\theta'^3} \quad (114)$$

Agora, como  $P_S \propto \theta'^{-3}$  e  $P_M \propto \exp(-\theta'^2)$ , existe um  $\theta'_0$  que:



(115) def.:  $\alpha \equiv \theta' / \sqrt{\langle \theta^2 \rangle} \Rightarrow P_M(\alpha) d\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2} d\alpha \quad (116)$

$$\Rightarrow P_S(\alpha) d\alpha = \frac{\pi}{2} N_t \left(\frac{2zZe^2}{pv}\right)^2 \frac{\langle \theta^2 \rangle^{1/2} d\alpha}{\langle \theta^2 \rangle^{3/2} \alpha^3}$$

de (114):  $P_S(\alpha) d\alpha = \frac{1}{8 \ln(204 Z^{-1/3})} \frac{d\alpha}{\alpha^3} \quad (116')$

a transição  $P_M(\theta') \rightarrow P_S(\theta')$  ocorre em  $\alpha \approx 2,5$  em  $P \approx P_0/600$