Cap. 14 | Radiação de cargas em movimento

Vamos refazer o cálculo, mais adequado para o caso relativístico

1) Potenciais de Liénard-Wiechert

As densidades de carga e de corrente de uma partícula puntiforme são:

$$\rho(\vec{x},t) = e\,\delta(\vec{x}-\vec{x}(t))$$
$$\vec{J}(\vec{x},t) = e\,\vec{v}(t)\,\delta(\vec{x}-\vec{x}(t)), \qquad (12.138)$$

onde $\vec{x}(t)$ é a posição e $\vec{v}(t)=\dot{\vec{x}}(t)$ a velocidade da partícula em função do tempo.

Em notação quadrivetorial:

$$J^\mu(\vec{x},t) = e\,c\beta^\mu(t)\,\delta(\vec{x}-\vec{x}(t)),$$

onde $\beta^\mu = (1,\vec{\beta})$, $\vec{\beta}=\vec{v}/c$, β^μ <u>não</u> é um quadrivetor e $J^\mu = (c\rho, \vec{J})$.

Lembrando que da equação de Poisson vem a função de Green:

$$\nabla^2\phi(x) = \nabla^2\int \frac{\rho(x')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x' = \int\rho(x')\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)d^3x' = \qquad (1.31)$$

$$= -\int\rho(x')\,4\pi\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')\,d^3x' = -4\pi\rho(x) \Rightarrow \boxed{\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) = -4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')}$$

e da solução para o potencial vetor em 3D:

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{4\pi}{c}\int d^3x'\,dt'\,G(\vec{x},t;\vec{x}',t')\,\vec{J}(\vec{x}',t'),$$

onde $G(\vec{x},t;\vec{x}',t') = \dfrac{\delta(t-t'-|\vec{x}-\vec{x}'|/c)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$ é a função de Green <u>retardada</u>.

Vem das eqs. de Maxwell não-homogêneas:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c}J^\beta, \quad \text{com } F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \partial_\alpha(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) = \Box A^\beta - \partial^\beta(\cancelto{0 \text{ (cond. Lorenz)}}{\partial_\alpha A^\alpha}) = \boxed{\Box A^\beta = \frac{4\pi}{c}J^\beta(x)} \qquad (12.123)$$

na condição de Lorenz

então, por analogia: $A^{\alpha}(x) = \frac{4\pi}{c}\int d^4x'\, D_r(x-x')\, J^{\alpha}(x')$, (1)

onde D_r é a função de Green retardada que satisfaz:

$$\Box_x D_r(x,x') = \delta^{(4)}(x-x')$$ (12.124)

e como

tempo próprio

$$J^{\alpha}(x') = e c\, \beta^{\alpha}(t)\, \delta(\vec{x}' - \vec{x}(t)) = e c \int d\tau\, \beta^{\alpha}(\tau)\, \delta(x' - x'(\tau))\, \delta(t-\tau) \Rightarrow$$

$$J^{\alpha}(x') = e c \int d\tau\, V^{\alpha}(\tau)\, \delta^{(4)}(x' - r(\tau)),$$ (2)

com $V^{\alpha}(\tau) = \frac{dx^{\alpha}}{d\tau}$ sendo a quadrivelocidade, esta sim um quadrivetor

→ digressão depois voltar aqui]

Para avaliar as integrais, vejamos, inicialmente, as relações matemáticas[a]:

$$\int dt'\, f(t')\, \delta[g(t')] = f(t_0) \Big/ \left|\frac{dg}{dt'}\right|_{t_0}$$, onde t_0 é raiz de g: $g(t_0) = 0$

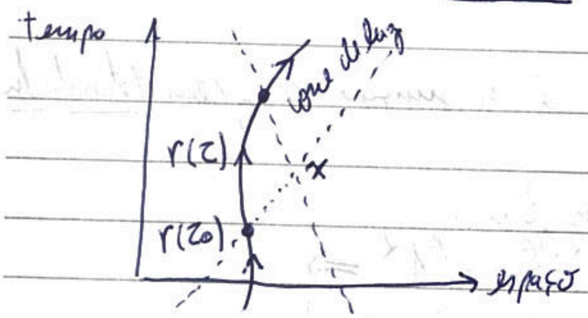
a função δ é par: $\delta(t - t' - |\vec{x} - \vec{x}'|/c) = \delta(t' - t + |\vec{x} - \vec{x}'|/c)$

Se $g(t') = t' + |\vec{x} - \vec{x}(t')|/c - t = t' + \sqrt{(\vec{x} - \vec{x}(t'))\cdot(\vec{x} - \vec{x}(t'))}/c - t$ $\qquad \sqrt{y^2} = |y|$

$$\Rightarrow \frac{dg}{dt'} = 1 + \frac{1}{2c}\, \frac{(\vec{x} - \vec{x}(t'))}{|\vec{x} - \vec{x}(t')|} \cdot \left(-2\frac{d\vec{x}(t')}{dt'}\right) \equiv$$

$$\equiv 1 - \hat{n}(t') \cdot \frac{\vec{v}(t')}{c} = 1 - \vec{\beta}(t') \cdot \hat{n}(t') ,$$

onde $\hat{n}(t')$ é o versor que aponta desde o ponto $\vec{x}(t')$ (trajetória da partícula) até $\vec{x}$ (onde o campo está sendo avaliado) e a condição $g(t_0) = 0 \Rightarrow t_0 = t' + |\vec{x} - \vec{x}(t')|/c > t'$, ou seja, t' é um instante <u>anterior</u> a t (D_r é a função de Green <u>retardada</u>).



a linha de mundo da partícula intercepta o cone de luz em 2 pontos, um anterior ($r(\tau_0)$) e um posterior.

assim: $\int dt'\, V^{\alpha}(\tau)\, \delta(t - t' - |\vec{x} - \vec{x}'|/c) = \frac{V^{\alpha}(\tau_0)}{|1 - \vec{\beta}\cdot\hat{n}|_{\tau_0}}$

$A^\alpha = \frac{4\pi}{c} \int d^3x' dt' \frac{\delta(t'-t-|\vec{x}-\vec{x}'|/c)}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} \int d\tau\, ec\, V^\alpha(\tau)\, \delta^{(4)}(x'-r(\tau))$

e temos: $$A^\alpha(x) = \left. \frac{e V^\alpha(\tau)}{(1-\vec{\beta}\cdot\hat{n})\cdot[x-r(\tau)]} \right|_{\tau=\tau_0} \qquad (6')$$

como x e τ_0 estão no cone de luz, eles têm intervalo nulo:
$$[x - r(\tau_0)]^2 = 0 \Rightarrow x_0 - r(\tau_0) = |\vec{x} - \vec{r}(t_0)| \equiv R$$ → cada

▶ <u>digressão pela seção 12.11:</u>

Vimos que $\Box_x D(x,x') = \delta^{(4)}(x-x') = \delta(x_0-x_0')\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')$

na ausência de superfícies de contorno, podemos reduzir a notação: $D(x,x') = D(x-x') = D(z) \Rightarrow \Box_z D(z) = \delta^{(4)}(z)$

usando as transf. de Fourier:
$$D(z) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\, \tilde{D}(k)\, e^{-ik\cdot z}, \quad \text{com } k\cdot z = k_0 z_0 - \vec{k}\cdot\vec{z} \qquad (12.125)$$

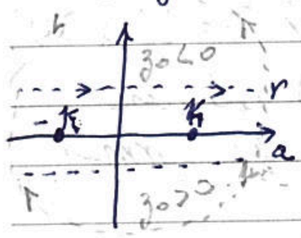
e $$\delta^{(4)}(z) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\, e^{-ik\cdot z} \quad (12.126), \quad \text{encontramos: } \tilde{D}(k) = -\frac{1}{k\cdot k}, \quad (12.127)$$

pois $$\Box_z e^{-ik\cdot z} = (\partial_0^2 - \nabla^2)\, e^{-ik\cdot z} = (-k_0^2 + |\vec{k}|^2)\, e^{-ik\cdot z} = -k\cdot k\, e^{-ik\cdot z}$$
$$\Rightarrow \Box_z D(z) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\, \tilde{D}(k)\, \Box_z e^{-ik\cdot z} = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\, \underbrace{\tilde{D}(k)(k\cdot k)}_{-1} e^{-ik\cdot z}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\, e^{-ik\cdot z} = \delta^{(4)}(z) \quad ✓$$

Então: $$D(z) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\, \frac{e^{-ik\cdot z}}{k\cdot k} \qquad (12.128)$$
$$= -\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3k\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{z}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0\, \frac{e^{-ik_0 z_0}}{k_0^2 - \kappa^2} \qquad (12.129) \quad (\kappa = |\vec{k}|)$$

a integral em k_0 tem 2 polos simples em $k_0 = \pm\kappa$

(1ª escolha: $z_0 < 0$ no plano superior)



para o contorno r: $\begin{cases} z_0 < 0 : \oint dk_0 f(k_0) = 0 \\ z_0 > 0 : \oint dk_0 f(k_0) = -2\pi i \sum \text{Res} \end{cases}$ ↳ horário

então: $$\oint_r dk_0 \frac{e^{-ik_0 z_0}}{k_0^2 - \kappa^2} = -2\pi i \sum \text{Res}\left(\frac{e^{-ik_0 z_0}}{k_0^2 - \kappa^2}\right) = -\frac{2\pi}{\kappa}\,\text{sen}(\kappa z_0)$$

pois $$\sum \text{Res} = \lim_{k_0\to\kappa} \frac{e^{-ik_0 z_0}}{(k_0+\kappa)\cancel{(k_0-\kappa)}}\cancel{(k_0-\kappa)} + \lim_{k_0\to-\kappa} \frac{e^{-ik_0 z_0}}{(k_0-\kappa)\cancel{(k_0+\kappa)}}\cancel{(k_0+\kappa)} = \frac{e^{-i\kappa z_0}}{2\kappa} + \frac{e^{+i\kappa z_0}}{-2\kappa} =$$
$$= -i\,\text{sen}(\kappa z_0)$$

e a função de Green fica: $D_r(z) = \frac{\theta(z_0)}{(2\pi)^3} \int d^3k\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{z}} \frac{\text{sen}(kz_0)}{k}$,

onde $\theta(z_0)$ é a função degrau. Integrando sobre os ângulos de $\vec{k}$, vem:

$$D_r(z) = \frac{\theta(z_0)}{(2\pi)^3} \int dk\, k\, \text{sen}\alpha\, d\alpha\, d\beta\, e^{ikR} \frac{\text{sen}(kz_0)}{k} \quad \text{, onde } R = |\vec{z}| = |\vec{x}-\vec{x}'|$$

$$= \frac{\theta(z_0)}{(2\pi)^{3/2}} 2 \cdot 2\pi \int_0^\infty dk\, e^{ikR} \frac{\text{sen}(kz_0)}{k} = \frac{\theta(z_0)}{2\pi^2 R} \int_0^\infty dk\, \text{sen}(kR)\, \text{sen}(kz_0) \qquad (12,130)$$

agora, $\text{sen}(kz_0)\,\text{sen}(kR) = \frac{1}{2}[\cos(z_0-R)k - \cos(z_0+R)k]$, de onde:

$$D_r(z) = \frac{\theta(z_0)}{4\pi^2 R} \int_0^\infty dk \left[e^{i(z_0-R)k} - e^{i(z_0+R)k}\right]$$

$$= \frac{\theta(z_0)}{8\pi^2 R} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[e^{i(z_0-R)k} - e^{i(z_0+R)k}\right]$$

estas integrais são as funções delta de Dirac, a primeira $\delta(z_0-R)$ e a segunda $\delta(z_0+R)$, mas como $z_0>0$ e $R>0$ a segunda se anula.

Então, $$D_r(x-x') = \frac{\theta(x_0-x_0')}{4\pi R} \delta(x_0-x_0'-R) \qquad (12,131)$$

instante de t

que é a função de Green retardada ou causal ($x_0' < x_0$)

fonte obs

Analogamente, para o contorno a:

$$D_a(x-x') = \frac{\theta[-(x_0-x_0')]}{4\pi R} \delta(x_0-x_0'+R) \qquad (12,132)$$

que é a função de Green avançada.

Usando a seguinte propriedade da δ: $\delta(x^2-\alpha^2) = \frac{1}{2|\alpha|}[\delta(x+\alpha)+\delta(x-\alpha)] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2R}[\delta(z_0-R)+\delta(z_0+R)] = \delta(z_0^2-R^2) = \delta[(x_0-x_0')^2-|\vec{x}-\vec{x}'|^2] = \delta[(x-x')^2]$$

e levando em conta que a função $\theta(z_0)$ seleciona automaticamente um sinal para z_0, teremos as formas invariantes:

$$D_r(x-x') = \frac{1}{2\pi}\theta(x_0-x_0')\,\delta[(x-x')^2]$$

$$D_a(x-x') = \frac{1}{2\pi}\theta(x_0'-x_0)\,\delta[(x-x')^2] \qquad (12,133)$$

Finalmente, as soluções para o potencial vetor são:

$$A^\alpha(x) = A^\alpha_{in}(x) + \frac{4\pi}{c}\int d^4x'\, D_r(x-x')\, J^\alpha(x') \qquad (12.134)$$

$$A^\alpha(x) = A^\alpha_{em}(x) + \frac{4\pi}{c}\int d^4x'\, D_a(x-x')\, J^\alpha(x'),$$

onde A^α_{in} e A^α_{em} são as soluções da equação de onda homogênea, respectivamente, para ondas <u>incidentes</u> e ondas <u>emergentes</u>.

Das eqs. (1) e (2) do Cap. 14:

$$A^\alpha(x) = \frac{4\pi}{c}\int d^4x'\, D_r(x-x')\, J^\alpha(x') =$$

$$= \frac{4\pi}{\cancel{c}} e\cancel{c}\int d^4x'\, D_r(x-x')\int d\tau\, V^\alpha(\tau)\,\delta^{(4)}(x'-r(\tau)) = \leftarrow \text{aplicando a } \delta 4$$

$$= 4\pi e\int d\tau\, V^\alpha(\tau)\, D_r(x-r(\tau)) =$$

voltar

$$= {}^2\cancel{4\pi} e\,\frac{1}{\cancel{2\pi}}\int d\tau\, V^\alpha(\tau)\,\theta[x_0-r_0(\tau)]\,\delta\{[x-r(\tau)]^2\} \qquad (3)$$

coda → note que da propriedade: $\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|(df/dx)_{x=x_i}|}$,

tomando $f(x) = [x-r(\tau)]^2 \Rightarrow \frac{df}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}[x-r(\tau)]^2 = -2[x-r(\tau)]_\beta \frac{dr^\beta(\tau)}{d\tau} =$

$$= -2[x-r(\tau)]_\beta V^\beta(\tau),$$

avaliados em $\tau=\tau_0$.

então, o denominador em (6') torna-se:

$$A^\alpha(x) = \left.\frac{e V^\alpha(\tau)}{V\cdot[x-r(\tau)]}\right|_{\tau=\tau_0} \qquad (6)$$

lembrando que $x_0 - r_0(\tau_0) = |\vec{x}-\vec{r}(\tau_0)| \equiv R$, vem: $\quad (V^\alpha = \gamma(c,\vec{v}))$

$$V\cdot(x-r) = V_0(x_0-r_0(\tau_0)) - \vec{v}\cdot(\vec{x}-\vec{r}(\tau_0)) = \gamma c R - \gamma\vec{v}\cdot\hat{n}R = \gamma c R(1-\vec{\beta}\cdot\hat{n}) \qquad (7)$$

assim: $A^\alpha(x) = \left.\frac{e\cancel{\gamma c}(1,\vec{\beta})}{\cancel{\gamma c}R(1-\vec{\beta}\cdot\hat{n})}\right|_{\tau=\tau_0} \Rightarrow$ os potenciais são:

$$\phi(\vec{x},t) = \left[\frac{e}{(1-\vec{\beta}\cdot\hat{n})R}\right]_{ret}, \quad \vec{A}(\vec{x},t) = \left[\frac{e\vec{\beta}}{(1-\vec{\beta}\cdot\hat{n})R}\right]_{ret} \qquad (8)$$

para calcular os campos, derivamos (3):

$$\partial^\alpha A^\beta = 2e\int d\tau\, V^\beta(\tau)\, \partial^\alpha \{\theta[x_0 - r_0(\tau)]\, \delta\{[x-r(\tau)]^2\}\}$$

a derivada de θ é: $\partial^\alpha\theta[(x_0-r_0(\tau)] = \delta(x_0 - r_0(\tau))$ que só contribui em $R=0$, em $R\neq 0$:

$$\partial^\alpha A^\beta = 2e\int d\tau\, V^\beta(\tau)\,\theta[x_0-r_0(\tau)]\,\partial^\alpha\delta\{[x-r(\tau)]^2\}, \qquad (9)$$

onde $\partial^\alpha\delta[f] = \partial^\alpha f \cdot \frac{d}{df}\delta[f] = \partial^\alpha f\, \frac{d\tau}{df}\,\frac{d}{d\tau}\delta[f(\tau)]$, com $f=[x-r(\tau)]^2$

$df/d\tau = -2(x-r(\tau))\cdot V$

não é potência é componente $\quad = -\frac{(x-r)^\alpha}{V\cdot(x-r)}\frac{d}{d\tau}\delta[f]$, que em (9) fica: (integrando por partes)

$$\partial^\alpha A^\beta = 2e\int d\tau\, \frac{d}{d\tau}\left[\frac{(x-r)^\alpha V^\beta}{V\cdot(x-r)}\right]\theta[x_0-r_0(\tau)]\,\delta\{[x-r(\tau)]^2\} \qquad (10)$$

comparando (10) com (3), podemos deduzir a eq. análoga de (6):

$$F^{\alpha\beta} = \frac{e}{V\cdot(x-r)}\frac{d}{d\tau}\left[\frac{(x-r)^\alpha V^\beta - (x-r)^\beta V^\alpha}{V\cdot(x-r)}\right]_{\tau_0}, \qquad (11)$$

onde $r^\alpha = r^\alpha(\tau)$ e $V^\alpha = V^\alpha(\tau)$ são funções de τ, portanto, deve-se estimar em $\tau=\tau_0$. Agora:

$(x-r)^\alpha = (R, R\hat n)$, $\quad V^\alpha = (\gamma c, \gamma c\vec\beta) \Rightarrow \frac{d}{d\tau}V^\alpha = \gamma\frac{d}{dt}(\gamma c, \gamma c\vec\beta)$

$$c\gamma\frac{d\gamma}{dt} = c\gamma\frac{d}{dt}(1-\beta^2)^{-1/2} = c\gamma\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{(1-\beta^2)^{3/2}}\right)\cdot\left(-2\vec\beta\cdot\frac{d\vec\beta}{dt}\right) = \frac{c}{(1-\beta^2)^2}\vec\beta\cdot\frac{d\vec\beta}{dt} = c\gamma^4\vec\beta\cdot\dot{\vec\beta}$$

analogamente $\frac{d}{d\tau}(\gamma c\vec\beta) = c\gamma^2\dot{\vec\beta} + c\gamma^4\vec\beta(\vec\beta\cdot\dot{\vec\beta})$

$$\Rightarrow \frac{dV^\alpha}{d\tau} = \left[c\gamma^4\vec\beta\cdot\dot{\vec\beta},\ c\gamma^2\dot{\vec\beta}+c\gamma^4\vec\beta(\vec\beta\cdot\dot{\vec\beta})\right] \qquad (12)$$

$$\frac{d}{d\tau}[V\cdot(x-r)] = V\cdot\frac{d}{d\tau}(x-r) + (x-r)_\alpha\frac{dV^\alpha}{d\tau} = V\cdot\left(\frac{-dr}{d\tau}\right) + (x-r)_\alpha\frac{dV^\alpha}{d\tau}$$

$$= -V^2 + (x-r)_\alpha\frac{dV^\alpha}{d\tau} = -c^2 + (x-r)_\alpha\frac{dV^\alpha}{d\tau}$$

e os campos serão: $\quad \vec B = [\hat n\times\vec E]_{ret} \qquad (13)$

$$\vec E(\vec x,t) = e\underbrace{\left[\frac{\hat n-\vec\beta}{\gamma^2(1-\vec\beta\cdot\hat n)^3R^2}\right]_{ret}}_{\text{campo de velocidade}} + \frac{e}{c}\underbrace{\left[\frac{\hat n\times\{(\hat n-\vec\beta)\times\dot{\vec\beta}\}}{(1-\vec\beta\cdot\hat n)^3 R}\right]_{ret}}_{\text{campo de aceleração}} \qquad (14)$$

2) Potência total irradiada por uma carga acelerada – fórmula de Larmor relativística.

No caso não-relativístico, na eq. (14), o campo de aceleração reduz-se a:

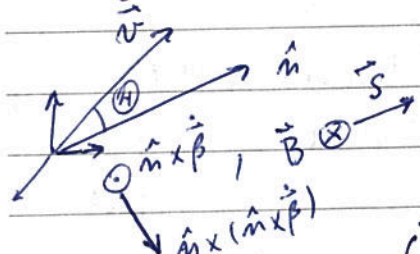
$$v \ll c : \beta \to 0, \gamma \to 1 \ : E_a = \frac{e}{c}\left[\frac{\hat{n}\times\hat{n}\times\dot{\vec{\beta}}}{R}\right]_{ret} \qquad (18)$$

O fluxo instantâneo de energia é dado pelo vetor de Poynting:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times(\hat{n}\times\vec{E}) = \frac{c}{4\pi}|E_a|^2\,\hat{n} \qquad (19)$$

agora potência é $\quad P = S\cdot A = \frac{c}{4\pi}|E_a|^2\, 4\pi R^2 \Rightarrow$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi}|E_a|^2\frac{\cancel{4\pi}R^2}{\cancel{4\pi}} = \frac{c}{4\pi}|R\,E_a|^2 = \frac{\cancel{c}e^2}{4\pi c^{\cancel{2}}}\,|\hat{n}\times(\hat{n}\times\dot{\vec{\beta}})|^2 \qquad (20)$$



$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c}\frac{|\dot{\vec{v}}|^2}{c^2}\,\mathrm{sen}^2\Theta = \frac{e^2}{4\pi c^3}|\dot{\vec{v}}|^2\,\mathrm{sen}^2\Theta \qquad (21)$$

integrando em todo o ângulo sólido:

$$\int_0^{\pi}\mathrm{sen}^2\Theta\,\mathrm{sen}\Theta\,d\Theta\int_0^{2\pi}d\varphi = \frac{4}{3}\cdot 2\pi$$

$$\int_0^{\pi}\mathrm{sen}^3x\,dx = \left[\frac{\cos^3x}{3} - \cos x\right]_0^{\pi} = \frac{\cos^3\pi}{3} - \cos\pi - \frac{\cos^3 0}{3} + \cos 0 = \frac{(-1)^3}{3} - (-1) - \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{P = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}|\dot{\vec{v}}|^2} \qquad (22)$$

, que é a fórmula de Larmor (potência total irradiada por uma carga acelerada não-relativística, ou quando $\beta \to 0$)

Para a extensão relativística, iniciamos escrevendo a potência como:

$$P = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{\vec{v}}\cdot\dot{\vec{v}} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{m^2c^3}m\dot{\vec{v}}\cdot m\dot{\vec{v}} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{m^2c^3}\frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (23)$$

a generalização invariante de Lorentz é $\quad P = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{m^2c^3}\frac{dp_\mu}{d\tau}\frac{dp^\mu}{d\tau} \qquad (24)$

que reduz-se a (22) quando $\beta \to 0$

Como $p^\mu = (E/c, \vec p)$, tem: $-\frac{dp_\mu}{d\tau}\frac{dp^\mu}{d\tau} = \left(\frac{d\vec p}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dE}{d\tau}\right)^2$, mas (25')

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \Rightarrow \frac{dE^2}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(p^2c^2) + \cancel{\frac{d}{d\tau}(m^2c^4)} \Rightarrow \cancel{2}E\frac{dE}{d\tau} = c^2\cancel{2}p\frac{dp}{d\tau} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c^2}\left(\frac{dE}{d\tau}\right)^2 = \frac{c^2p^2}{E^2}\left(\frac{dp}{d\tau}\right)^2 = \frac{\cancel{c^2}\cancel{\gamma^2}\cancel{m^2}v^2}{\cancel{\gamma^2}\cancel{m^2}c^{\cancel{4}\,2}}\left(\frac{dp}{d\tau}\right)^2 = \beta^2\left(\frac{dp}{d\tau}\right)^2$$

$$\Rightarrow -\frac{dp_\mu}{d\tau}\frac{dp^\mu}{d\tau} = \left(\frac{d\vec p}{d\tau}\right)^2 - \beta^2\left(\frac{dp}{d\tau}\right)^2 \simeq \left(\frac{d\vec p}{dt}\right)^2, \text{ quando } \beta\to 0 \qquad (25'')$$

Para calcular o vetor de Poynting, temos que considerar o tempo de retardo, pois a potência é:

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \vec S\cdot\hat n = \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, \frac{dt}{dt'}\, \vec S(\vec x, t(t'))\cdot\hat n$$

Como vimos: $\int dt'\, f(t')\,\delta[g(t')] = \frac{f(t_0)}{(1-\vec\beta\cdot\hat n)_{t_0}}$

e por outro lado: $\int dt\, f(t)\,\delta(t-t_0) = f(t_0)$ $\Big\}$ $\frac{dt}{dt'} = (1-\vec\beta\cdot\hat n)_{ret}$

então, a generalização da potência irradiada é:

de (14): $$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c}\frac{[\hat n\times(\hat n-\vec\beta)\times\dot{\vec\beta}]^2}{(1-\vec\beta\cdot\hat n)^{\cancel{6}\,5}}\cancel{(1-\vec\beta\cdot\hat n)}\Bigg|_{ret}$$

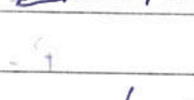
$$= \frac{e^2}{4\pi c}\frac{[\hat n\times(\hat n-\vec\beta)\times\dot{\vec\beta}]^2}{(1-\vec\beta\cdot\hat n)^5}\Bigg|_{ret} \Rightarrow$$

$$P(t') = \frac{e^2}{4\pi c}\int d\Omega\, \frac{[\hat n\times(\hat n-\vec\beta)\times\dot{\vec\beta}]^2}{(1-\vec\beta\cdot\hat n)^5} =$$ $\vec A\times\vec B\times\vec C = \vec B(\vec A\cdot\vec C) - \vec C(\vec A\cdot\vec B)$

$$= \frac{e^2}{4\pi c}\int d\Omega\left\{\frac{[(\hat n-\vec\beta)(\hat n\cdot\dot{\vec\beta}) - \dot{\vec\beta}(1-\vec\beta\cdot\hat n)]^2}{(1-\vec\beta\cdot\hat n)^5}\right\} =$$ $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$$= \frac{e^2}{4\pi c}\int d\Omega\left\{\frac{(1-2\hat n\cdot\vec\beta+\beta^2)(\hat n\cdot\dot{\vec\beta})^2 - 2(\hat n\cdot\dot{\vec\beta} - \vec\beta\cdot\dot{\vec\beta})(\dot{\vec\beta}\cdot\hat n)(1-\hat n\cdot\vec\beta) + \dot{\vec\beta}^2(1-2\vec\beta\cdot\hat n + (\vec\beta\cdot\hat n)^2)}{(1-\vec\beta\cdot\hat n)^5}\right\}$$

definindo os ângulos



$\hat n\cdot\vec\beta = \beta\cos\theta$

$\hat n\cdot\dot{\vec\beta} = \dot\beta\cos(\theta+\theta_0)$

$\vec\beta\cdot\dot{\vec\beta} = \beta\dot\beta\cos\theta_0$

e definindo $u=\cos\theta \Rightarrow \int d\Omega\, f(\theta) = 2\pi\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\, f(\theta) :=$

$$= 2\pi\int_0^\pi d(-\cos\theta)\, f(\theta) = 2\pi\int^1 du\, f(u)$$

e a integral fica:

$$P(t') = \frac{e^2\dot\beta^2}{2c}\int_{-1}^{1}\frac{du}{(1-\beta u)^5}\left\{(\beta^2-1)\left[u^2\cos^2\theta_0+\frac{1}{2}(1-u^2)\sin^2\theta_0+\right.\right.$$

$$\left.+2\cos^2\theta_0\, u\beta(1-\beta u)+(1-2\beta u+\beta^2u^2)\right\} =$$

$$=\frac{\dot\beta^2e^2}{2c}\int_{-1}^{1}\frac{du}{(1-\beta u)^5}\left\{(1-u^2)+\sin^2\theta_0\left[\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\beta^2\right)u^2-2\beta u-\frac{1}{2}(1-\beta^2)\right]\right\}$$

introduzindo $x \equiv 1-\beta u$, vem:

$$P(t') = \frac{\dot\beta^2e^2}{2c\beta^3}\int_{1-\beta}^{1+\beta}\frac{dx}{x^5}\left\{(\beta^2-1+2x-x^2)+\sin^2\theta_0\left[\frac{(3+\beta^2)(1-2x-x^2)}{2}\right.\right.$$

$$\left.\left.-2\beta^2(1-x)-\beta^2\frac{(1-\beta^2)}{2}\right]\right\} =$$

$$=\frac{\dot\beta^2e^2}{2c\beta^3}\left\{\left(\frac{\beta^2-1}{4x^2}+\frac{2}{3x^2}-\frac{1}{2x^2}\right)+\sin^2\theta_0\left(\frac{(3/2-\beta^2/2)(1-\beta^2)}{4x^2}+\frac{\beta^2-3}{3x^2}+\frac{3+\beta^2}{4x^2}\right)\right\}=$$

$$=\frac{2\dot\beta^2e^2\gamma^6}{3c}(1-\beta^2\sin^2\theta_0),$$ que retornando à forma

vetorial, dá: $$\boxed{P(t') = \frac{2e^2\gamma^6}{3c}\left[\dot{\vec\beta}^2-(\vec\beta\times\dot{\vec\beta})^2\right]} \qquad (26)$$

que é a generalização relativística da fórmula de Larmor, deduzida por Liénard (1898).

Exemplos

1) acelerador linear: $\overset{e}{\bullet}\!\!\xrightarrow{\dot{\vec\beta}}\xrightarrow{\vec\beta}$, $\dot{\vec\beta}\parallel\vec\beta \Rightarrow \vec\beta\times\dot{\vec\beta}=0$

$\Rightarrow P = \frac{2e^2\gamma^6}{3c}\dot\beta^2$, mas de (23), temos: $P = \frac{2e^2}{3m^2c^3}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2$ (27)

e como $F = \frac{dp}{dt} = \frac{dE}{dx} \Rightarrow P = \frac{2e^2}{3m^2c^3}\left(\frac{dE}{dx}\right)^2$ (28)

$$\Rightarrow P = \frac{2e^2}{3m^2c^3}\left(\frac{dE}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\,\frac{dE}{dx}\right) \Rightarrow \frac{P}{dE/dt} = \frac{2e^2}{3m^2c^3}\frac{1}{v}\frac{dE}{dx} \to \frac{2}{3}\frac{(e^2/mc^2)}{mc^2}\frac{dE}{dx}, \quad (29)$$

onde fizemos $\beta\to1$ na última passagem. Como $r_e = e^2/mc^2 = 2{,}82\cdot10^{-13}$ cm é o raio clássico do elétron e mc^2 sua energia de repouso, a perda de energia será muito pequena, a menos que

$\frac{dE}{dx} \sim \frac{mc^2}{r_e} \simeq 2\cdot10^{20}$ eV/m , tipicamente : $\frac{dE}{dx} \sim 10$ MeV/m

2) Síncrotron

A aceleração centrípeta é $\dot{\beta} = c\beta^2/R \Rightarrow$

$$\dot{\beta}^2 - (\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}})^2 = \frac{c^2\beta^4}{R^2}(1-\beta^2) = \frac{c^2\beta^4}{R^2\gamma^2} \Rightarrow P = \frac{2e^2c\beta^4\gamma^4}{3R^2} \qquad (31)$$

Liénard (1898)

como $E = \gamma mc^2 \Rightarrow P = \frac{2e^2c}{3R^2}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^4\beta^4 = \frac{\delta E}{T}$, então a perda de energia durante um ciclo $T = 2\pi R/\beta c \Rightarrow$

$$\delta E = \frac{4\pi e^2}{3R}\gamma^4\beta^3 \qquad (32)$$

assim para elétrons de alta energia ($\beta \simeq 1$):

$$\delta E(MeV) = \frac{8,85\cdot 10^{-2}\,[E(GeV)]^4}{R(m)} \qquad (33)$$

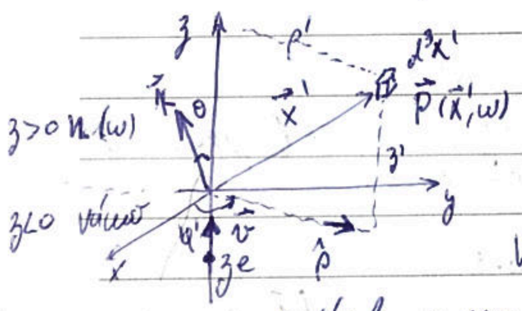
o 1º síncrotron tinha $R = 1m$ e $E_{max} = 0,3GeV \Rightarrow \delta E = 1keV/volta$

síncrotron de Cornell $R = 100m$ e $E_{max} = 10GeV \Rightarrow \delta E = 8,85\,MeV/volta$

acelerador de prótons $R = 3\cdot 10^4 m$ e $E_{max} = 10TeV \Rightarrow \delta E = 10keV/volta$

9) Radiação de transição

A radiação de transição, observada por Ginsburg e Frank (1946), é emitida quando uma partícula carregada atravessa a interface entre dois meios com propriedades dielétricas distintas.



Os campos se ajustam na interface e combinam-se coerentemente.

$\vec{P}(\vec{x}',\omega)$: polarização

Vimos (seção 13.2) que o campo de uma partícula carregada movendo-se com velocidade constante $\vec{v} = v\hat{z}$ na trajetória $\vec{x}(t) = \vec{v}t$, no vácuo, é:

$$\vec{E}_i(\vec{x}',\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{ze\omega}{\gamma v^2} e^{i\omega z/v} K_1\left(\frac{\omega\rho}{\gamma v}\right)\hat{\rho} +$$

ondas (125)

$$-i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{ze\omega}{\gamma^2 v^2} e^{i\omega z/v} K_0\left(\frac{\omega\rho}{\gamma v}\right)\hat{z}$$

este campo produz a polarização: $\vec{P}(\vec{x}',\omega) \simeq \left(\frac{\varepsilon(\omega)-1}{4\pi}\right)\vec{E}_i(\vec{x}',\omega)$ (121)

e o dipolo $\vec{P}(\vec{x}',\omega)d^3x'$ no elemento de volume d^3x'. O dipolo gera o campo de radiação (9.18): $d\vec{E}_{rad} = \frac{e^{ikR}}{R}(\vec{k}\times\vec{P})\times\vec{k}\, d^3x'$, onde

$\vec{k}$ é o vetor de onda na direção de observação e $R = |\vec{x}-\vec{x}'| \simeq r - \hat{k}\cdot\vec{x}'$

$$\Rightarrow \vec{E}_{rad} = \frac{e^{ikr}}{r}\left[\frac{\varepsilon(\omega)-1}{4\pi}\right]\cdot k^2 \int_{z'>0} [(\hat{k}\times\vec{E}_i)\times\hat{k}]e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}'}d^3x' =$$

$$= \frac{e^{ikr}}{r}\left[\frac{\varepsilon(\omega)-1}{4\pi}\right]k^2\int d^2x'_\perp \{[\hat{k}\times\vec{E}_i(x'_\perp,0,\omega)\times\hat{k}]e^{-ikx'\operatorname{sen}\theta}\overbrace{\int_0^\infty dz' e^{i(\omega z'/v - kz'\cos\theta)}}^{\delta}$$

$$= \frac{e^{ikr}}{r}\left[\frac{\varepsilon(\omega)-1}{4\pi}\right]k^2\delta(\omega/v - k\cos\theta)\int d^2x'_\perp \{[\hat{k}\times\vec{E}_i(\vec{x}'_\perp,\omega)]\times\hat{k}\}e^{-ikx'\operatorname{sen}\theta}$$

de onde: $\frac{\omega}{v} = k\cos\theta = \frac{\omega n\cos\theta}{c} \Rightarrow \cos\theta = \frac{c/n}{v} = \frac{v_f}{v} \leq 1 \Rightarrow \underbrace{v \geq v_f}_{\text{Cherenkov}}$

/ /

Se $v < v_f$ e o meio for finito, mas $Z \gg D$ (distância de formação), teremos mesmo assim campo de radiação (radiação de transição). Seja um fator de amortecimento η (presente na maioria dos materiais):

$$\int_0^\infty dz'\, e^{iz'(\omega/v - K\cos\theta)} = \lim_{\eta\to 0}\int_0^\infty dz'\, e^{[-\eta + i(\omega/v - K\cos\theta)]z'} =$$

$$= \lim_{\eta\to 0}\left(\frac{-1}{-\eta + i(\omega/v - K\cos\theta)}\right) = \frac{i}{\omega/v - K\cos\theta}$$

de uma forma mais geral se limitarmos a integral em Z (placa dielétrica):

$$\int_0^Z dz'\, e^{i(\omega/v - K\cos\theta)z'} = \frac{i\left(1 - e^{i(\omega/v - K\cos\theta)Z}\right)}{\omega/v - K\cos\theta}$$

$\hat{\varepsilon}_a$

o campo transversal a $\hat{K}$ vem da integral em $d^2x_\perp$, $\vec{K} = K(\cos\theta\,\hat{z} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{x})$ dados $\hat{K} = \vec{K}/K$, $\vec{E}_i$, $\vec{x}'$ e notando que $\hat{\rho} = \cos\varphi'\hat{x} + \operatorname{sen}\varphi'\hat{y}$, vem:

$$[\hat{K}\times\vec{E}_i]\times\hat{K} = (E_\rho\cos\varphi'\cos\theta - E_z\operatorname{sen}\theta)(\hat{y}\times\hat{K}) + E_\rho\operatorname{sen}\varphi'\hat{y} \quad \hat{\varepsilon}_b$$

o segundo termo é uma função ímpar que integrada sobre $d^2\vec{x}_\perp$ dá zero. E a integral fica:

$$I = \int d^2x'_\perp\,(\hat{K}\times\vec{E}_i)\times\vec{K}\, e^{-iKx'\operatorname{sen}\theta} =$$

$$= \frac{i\hat{\varepsilon}_a}{(\omega/v - K\cos\theta)}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{ze\omega}{\gamma v^2}\iint dx\,dy\, e^{-iK\operatorname{sen}\theta x}\left[\cos\theta\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}K_1\left(\frac{\omega}{\gamma v}\sqrt{x^2+y^2}\right) + \right.$$

$$\left. + i\frac{\operatorname{sen}\theta}{\gamma}K_0\left(\frac{\omega}{\gamma v}\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]$$

$\rho' = \sqrt{x^2+y^2}$

utilizando $\cos\varphi' = x'/\rho' \rightarrow \cos\varphi' K_1\left(\frac{\omega\rho'}{\gamma v}\right) = \frac{x'}{\rho'}K_1\left(\frac{\omega\rho'}{\gamma v}\right) = -\frac{\gamma v}{\omega}\frac{\partial}{\partial x'}K_0\left(\frac{\omega\rho'}{\gamma v}\right)$

e o primeiro termo é integrado por partes:

$$I = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{ze\omega\, i\hat{\varepsilon}_a}{\gamma v^2(\omega/v - K\cos\theta)}\iint dx\,dy\left[-iK\frac{\gamma v}{\omega}\operatorname{sen}\theta\, K_0\left(\frac{\omega\rho'}{\gamma v}\right)\cos\theta + \frac{i}{\gamma}K_0\left(\frac{\omega\rho'}{\gamma v}\right)\operatorname{sen}\theta\right] =$$

$$= \frac{\hat{\varepsilon}_a}{(\omega/v - K\cos\theta)}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{ze}{v}\left(K\cos\theta - \frac{\omega}{v\gamma^2}\right)(\operatorname{sen}\theta)\iint dx\,dy\, K_0\left(\frac{\omega}{\gamma v}\rho'\right)e^{-iKx\operatorname{sen}\theta}$$

a integral em dx pode ser calculada: $\int_0^\infty K_0(\beta\sqrt{z^2+t^2})\cos(\alpha z) = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}e^{-|t|\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$

o resultado para I é:

$$I = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{ze}{v}\,\frac{\hat{\mathcal{E}}_a}{(\omega/v - k\cos\theta)}\,\sin\theta\left(k\cos\theta - \frac{\omega}{\gamma^2 v}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\pi\,dy'\exp\left(-|y'|\sqrt{k^2\sin^2\theta+\omega^2/\gamma^2v^2}\right)}{\sqrt{k^2\sin^2\theta+\omega^2/\gamma^2v^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{ze}{v}\,\frac{\hat{\mathcal{E}}_a\sin\theta}{(\omega/v-k\cos\theta)}\,(k\cos\theta-\omega/v\gamma^2)\,\frac{2\pi}{k^2\sin^2\theta+\omega^2/\gamma^2v^2} =$$

$$= \frac{\hat{\mathcal{E}}_a\, 2\sqrt{2\pi}\, ze\sin\theta\,(k\cos\theta-\omega/v\gamma^2)}{v(\omega/v-k\cos\theta)(\omega^2/\gamma^2v^2+k^2\sin^2\theta)} \qquad (127)$$

assim: $\vec{E}_{rad} = \dfrac{e^{ikr}}{r}\left[\dfrac{\varepsilon(\omega)-1}{4\pi}\right]\dfrac{k^2\sin\theta}{\omega/v-k\cos\theta}\,\dfrac{2\sqrt{2\pi}\,(ze/v)\,\hat{\mathcal{E}}_a}{k^2\sin^2\theta+\omega^2/\gamma^2v^2}\left(k\cos\theta-\dfrac{\omega}{\gamma^2 v}\right)$

com a aproximação $\varepsilon(\omega)\simeq 1-\omega_p^2/\omega^2$, onde ω_p é a freq. de plasma (122)
o campo (antes da integração) é:

$$\vec{E}_{rad}\simeq\frac{e^{ikr}}{r}\left(\frac{-\omega_p^2}{4\pi c^2}\right)\int_{z'>0}(\hat{k}\times\vec{E}_i)\times\hat{k}\;e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}'}\,d^3x' \qquad (123)$$

com espectro diferencial de energia irradiada:

$$\frac{d^2I}{d\omega\,d\Omega}=\frac{c}{32\pi^3}\left(\frac{\omega_p}{c}\right)^4\left|\int_{z'>0}[\hat{k}\times\vec{E}_i(\vec{x}',\omega)]\times\hat{k}\;e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}'}\,d^3x'\right|^2 \qquad (124)$$

que para $\omega\gg\omega_p$ e introduzindo $\nu\equiv\omega/\gamma\omega_p$ e $\eta=(\gamma\theta)^2$

$\Rightarrow d\Omega = d\varphi\, d(\cos\theta)\simeq d\varphi\, d\eta/2\gamma^2$ e

$$\frac{d^2I}{d\ \ d\ .}=\frac{\pi}{\gamma^2}\,\gamma\omega_p\,\frac{d^2I}{d\omega\,d\Omega}\simeq z^2\frac{e^2\gamma\omega_p}{\pi c}\left[\frac{\eta}{\nu^4(1+1/\nu^2+\eta)^2(1+\eta)^2}\right] \qquad (129)$$