

Cinemática relativística

Física de Partículas Elementares - I

Prof. Marcelo A. Leigui de Oliveira

Centro de Ciências Naturais e Humanas
Universidade Federal do ABC
Av. dos Estados, 5001
09210-580 Santo André-SP

2 de março de 2023

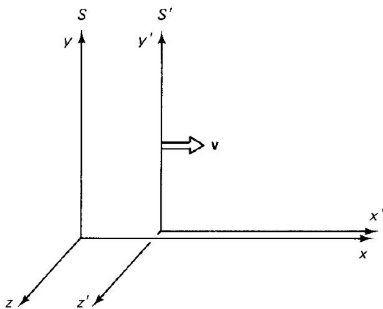


Universidade Federal do ABC

Transformações de Lorentz

- Postulados da relatividade especial:

- 1 As leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais (S e S' , se $\vec{v} = \text{const.}$);
- 2 A velocidade da luz é independente do movimento da fonte ou do observador ($c = 299.792.458 \text{ m/s}$).

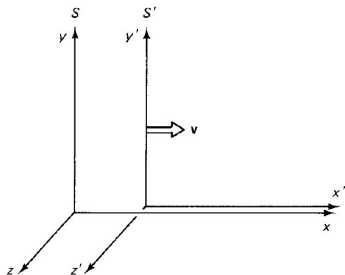


Transformações de Lorentz

- Tomando-se $x \parallel x'$ e ajustando-se os relógios, tal que $t = t' = 0$, quando $x = x' = 0$, vêm as *transformações de Lorentz*:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - vx/c^2) \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma(t' + vx'/c^2) \end{cases},$$

onde $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ é o *fator de Lorentz*.



Transformações de Lorentz

- As transformações de Lorentz têm as seguintes consequências:

- 1 *A relatividade da simultaneidade*: sejam 2 eventos simultâneos ($t_A = t_B$), mas ocorrendo em locais diferentes ($x_A \neq x_B$), em S. Então, em S':

$$t'_A = t'_B + \frac{\gamma v}{c^2}(x_B - x_A);$$

- 2 *Contração de Lorentz*: uma régua de comprimento L' , em repouso no referencial S', no referencial S, tem comprimento:

$$L = L'/\gamma;$$

- 3 *Dilatação temporal*: uma partícula com *tempo de vida próprio* T' tem em outro referencial inercial, um tempo dilatado de (ou, dito de outra forma, *relógios em movimento são mais lentos*):

$$T = \gamma T';$$

- 4 *Adição de velocidades*: diferenciando-se as coordenadas das transformações de Lorentz e rearranjando-se os termos, vem:

$$u = \frac{u' + v}{1 + (u'v/c^2)},$$

onde u é a velocidade da partícula no referencial S, u' sua velocidade no referencial S' e v a velocidade relativa entre S e S'.

Quadrivetores

- Definimos o *quadrivetor posição-tempo*, x^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$, da seguinte forma:

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z.$$

- Os quadrivetores seguem as transformações de Lorentz:

$$\begin{cases} x^{0'} = \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x^{1'} = \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x^{2'} = x^2 \\ x^{3'} = x^3 \end{cases},$$

onde $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ e $\beta = v/c$.

Quadrivetores

- De uma forma mais compacta:

$$x^{\mu'} = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \quad (\mu = 0, 1, 2, 3),$$

onde Λ_{ν}^{μ} são os elementos da matriz:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Ou, ainda, na convenção de Einstein:

$$x^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu},$$

com a soma implícita correndo nos índices repetidos, isto é:

$$x^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} = \Lambda_0^{\mu} x^0 + \Lambda_1^{\mu} x^1 + \Lambda_2^{\mu} x^2 + \Lambda_3^{\mu} x^3,$$

para cada valor de μ .

Quadrivetores

- Na forma matricial, então, temos:

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

- Existe uma combinação particular de quadrivetores que permanece a mesma quando vamos do referencial S para o S':

$$I = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x^{0'})^2 - (x^{1'})^2 - (x^{2'})^2 - (x^{3'})^2,$$

ou seja, I é um *invariante*. Novamente, na forma matricial:

$$I = \begin{pmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

e analogamente para as coordenadas em S'.

Quadrivetores

- Onde a matriz:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

é chamada de *métrica*. Ela dá conta dos 3 sinais de menos ao multiplicarmos os quadrivetores linha e coluna na expressão anterior. O invariante fica:

$$I = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} = g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu}.$$

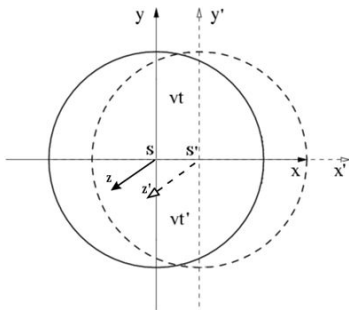
- Agora definimos o *quadrivetor covariante*, x_{μ} (índices embaixo):

$$x_{\mu} \equiv g_{\mu\nu} x^{\nu},$$

onde o quadrivetor original é um *quadrivetor contravariante*, x^{μ} (índices em cima). E, finalmente:

$$I = x_{\mu} x^{\mu}.$$

Quadrivetores



- Sejam 2 pulsos de luz que partem ao mesmo tempo ($t=t'=0$) da origem dos referenciais S e S' , quando $O=O'$. Como eles viajam à mesma velocidade c nos 2 referenciais:

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2 &\Leftrightarrow (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \Leftrightarrow (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0 \\
 x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2 &\Leftrightarrow (ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0 \Leftrightarrow (x'^0)^2 - (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - (x'^3)^2 = 0 \\
 &\Rightarrow I = x_\mu x^\mu = x'_\mu x'^{\mu} = 0
 \end{aligned}$$

Quadrivetores

- Um quadrivetor genérico a^μ é definido com base nas mesmas propriedades (álgebra) do quadrivetor x^μ :

- ▶ Transformações de Lorentz:

$$a^{\mu'} = \Lambda_{\mu}^{\nu} a^{\mu};$$

- ▶ Covariância e contravariância:

$$a_{\mu} = g_{\mu\nu} a^{\nu};$$

$$a^{\mu} = g^{\mu\nu} a_{\nu},$$

onde $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ são os elementos da matriz inversa g^{-1} ;

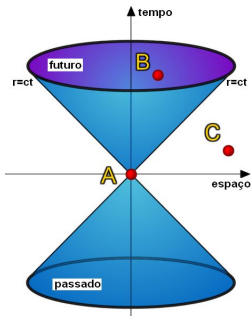
- ▶ O *produto escalar* com um outro quadrivetor b^μ :

$$a^{\mu} b_{\mu} = a_{\mu} b^{\mu} = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$$

e o produto escalar com ele mesmo:

$$a^2 = a \cdot a = a^{\mu} a_{\mu} = a_{\mu} a^{\mu} = (a^0)^2 - |\vec{a}|^2.$$

Quadrivetores



- O produto escalar de a^μ com ele mesmo é equivalente ao *intervalo* entre o evento $a^\mu = (ct, x, y, z)$ e o evento da origem $(0,0,0,0)$, então o evento final pode ser:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{tipo tempo} & , \text{ se } a^2 > 0 \\ \text{tipo luz} & , \text{ se } a^2 = 0 \\ \text{tipo espaço} & , \text{ se } a^2 < 0 \end{array} \right.$$

Quadrivetores

- Agora, podemos definir tensores de classes superiores:

- ▶ Tensores de segunda classe (com $4^2 = 16$ componentes):

$$s^{\mu\nu} = \Lambda_{\kappa}^{\mu} \Lambda_{\sigma}^{\nu} s^{\kappa\sigma};$$

- ▶ Tensores de terceira classe (com $4^3 = 64$ componentes):

$$t^{\mu\nu\lambda} = \Lambda_{\kappa}^{\mu} \Lambda_{\sigma}^{\nu} \Lambda_{\tau}^{\lambda} t^{\kappa\sigma\tau}.$$

- Um escalar (invariante) é um tensor de classe 0, um vetor é um tensor de classe 1, uma matriz é um tensor de classe 2, um “cubo de dados” é um tensor de classe 3, etc;
- Obtemos os tensores covariantes, abaixando-se os índices:

$$s_{\nu}^{\mu} = g_{\nu\lambda} s^{\mu\lambda}; \quad s_{\mu\nu} = g_{\mu\kappa} g_{\nu\lambda} s^{\kappa\lambda};$$

- $a^{\mu} b^{\mu}$ é um tensor de classe 2, $a^{\mu} t^{\nu\lambda\sigma}$ é um tensor de classe 4, etc;
- *Contração* (somas de índices repetidos): s_{μ}^{μ} é um escalar, $t_{\nu}^{\mu\nu}$ é um vetor, $a_{\mu} t^{\mu\nu\lambda}$ é um tensor de classe 2, etc;

Energia e momento

- A distinção entre o intervalo de tempo da partícula $d\tau$ (ou *tempo próprio*) e o intervalo de tempo do laboratório dt é:

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma},$$

onde γ é o fator de Lorentz;

- A velocidade da partícula em relação ao laboratório é:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt},$$

mas a *velocidade própria* é definida com relação ao tempo próprio:

$$\vec{\eta} \equiv \frac{d\vec{x}}{d\tau}$$

- Então:

$$\vec{\eta} = \gamma \vec{v}$$

- Agora, na mudança do referencial do laboratório S para o referencial da partícula S', o numerador e o denominador da velocidade \vec{v} se transformam por Lorentz, mas somente o numerador de $\vec{\eta}$ o faz.

Energia e momento

- Assim, o quadrivetor velocidade (ou *quadrivelocidade*) é:

$$\eta^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau},$$

cujas componentes são:

$$\left. \begin{aligned} \eta^0 &= \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{c dt}{dt/\gamma} = \gamma c \\ \eta^1 &= \frac{dx^1}{d\tau} = \frac{dx}{dt/\gamma} = \gamma v_x \\ \eta^2 &= \frac{dx^2}{d\tau} = \frac{dy}{dt/\gamma} = \gamma v_y \\ \eta^3 &= \frac{dx^3}{d\tau} = \frac{dz}{dt/\gamma} = \gamma v_z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \eta^\mu = \gamma(c, v_x, v_y, v_z).$$

Calculando a contração $\eta_\mu \eta^\mu$:

$$\eta_\mu \eta^\mu = \gamma^2(c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2) = \gamma^2 c^2(1 - v^2/c^2) = \gamma^2 c^2(1/\gamma^2) = c^2,$$

que é um invariante!

Energia e momento

- Para termos a conservação do momento em todos os referenciais inerciais, o momento relativístico é definido com a velocidade própria:

$$\vec{p} \equiv m\vec{\eta}$$

e, por conseguinte:

$$p^\mu = m\eta^\mu.$$

As coordenadas do momento são:

$$p^0 = m(\gamma c) = \gamma mc$$

$$\vec{p} = m(\gamma \vec{v}) = \gamma m\vec{v} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

- A energia relativística é definida por:

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

de onde concluímos que: $p^0 = E/c$; e o *quadrivetor energia-momento* pode ser escrito:

$$p^\mu = (E/c, p_x, p_y, p_z).$$

Contraindo-se, temos outro invariante:

$$p_\mu p^\mu = m^2 \eta_\mu \eta^\mu = m^2 c^2 = E^2/c^2 - p^2 \Rightarrow \boxed{E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4}.$$

Energia e momento

- O momento relativístico reduz-se ao clássico no limite de baixas velocidades ($v \ll c$):

$$\lim_{v \ll c} p = \lim_{\gamma \rightarrow 1} (\gamma m v) = m v.$$

- Mas a energia relativística não tende à energia cinética clássica:

$$\lim_{v \ll c} E = \lim_{v \ll c} \left(\frac{m c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \approx m c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right) = m c^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \dots,$$

onde além do termo de energia cinética clássica ($\frac{1}{2} m v^2$) há um termo de ordem zero na velocidade:

$$E_0 = m c^2,$$

chamado de *energia de repouso*. Denominaremos o restante do resultado *energia cinética relativística* (K):

$$E = E_0 + K \Rightarrow \gamma m c^2 = m c^2 + K \Rightarrow K = (\gamma - 1) m c^2.$$

- Além disso, podemos definir a *massa relativística* como:

$$m' = \gamma m,$$

onde m é a *massa de repouso* da partícula.

Energia e momento

- Resumindo:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (\text{momento relativístico})$$

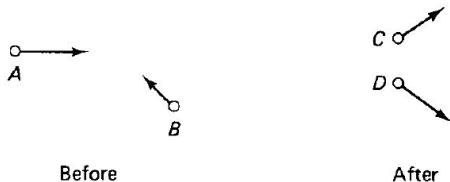
$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (\text{energia relativística})$$

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \quad (\text{energia relativística})$$

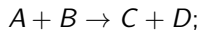
De onde:

- ▶ se $v = 0$: $E = E_0 = mc^2$ e $\vec{p} = 0$;
- ▶ se $v \ll c$: $E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$ e $\vec{p} = m\vec{v}$;
- ▶ se $v \sim c$: $E = \gamma mc^2$ e $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$;
- ▶ se $v = c$: $E = pc$ e $m = 0$ (fóton).

Colisões



- Seja a colisão:



- Nas colisões clássicas:

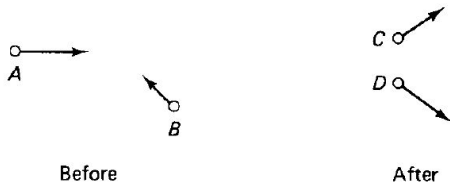
- ① A massa é conservada: $m_A + m_B = m_C + m_D$;
- ② O momento é conservado: $\vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{p}_C + \vec{p}_D$;
- ③ A energia cinética nas colisões elásticas.

- Tipos de colisões:

- a. “Pegajosa”: $K_A + K_B > K_C + K_D$;
- b. “Explosiva”: $K_A + K_B < K_C + K_D$;
- c. Elástica: $K_A + K_B = K_C + K_D$,

onde o caso limite de (a) é: $A + B \rightarrow C$ (ou seja, C e D se fundem)
e o caso limite de (b) é: $A \rightarrow C + D$ (ou seja, um decaimento).

Colisões



- Seja a colisão:

$$A + B \rightarrow C + D;$$

- Nas colisões relativísticas:

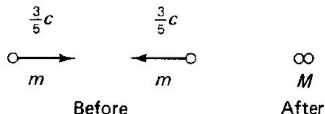
- 1 O momento é conservado: $\vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{p}_C + \vec{p}_D;$
 - 2 A energia é conservada: $E_A + E_B = E_C + E_D;$
 - 3 A energia cinética nas colisões elásticas.
- $$\left. \begin{array}{l} \text{1} \\ \text{2} \end{array} \right\} \Rightarrow p_A^\mu + p_B^\mu = p_C^\mu + p_D^\mu$$

- Tipos de colisões:

- a. "Pegajosa": K decresce, E_0 e m crescem;
- b. "Explosiva": K cresce, E_0 e m decrescem;
- c. Elástica: K , E_0 e m são conservados.

Exemplos e aplicações

- 1 Dois pedaços de barro de massa m colidem de frente a $v = \frac{3}{5}c$ (figura) e ficam grudados. Qual é a massa M do pedaço final?



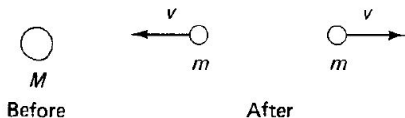
$$\text{cons. E: } E_1 + E_2 = E_M \Rightarrow 2\gamma m c^2 = M c^2$$

$$\text{cons. p: } \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = (p_1 - p_2) \hat{x} = \vec{p}_M = 0$$

$$\Rightarrow M = \frac{2m}{\sqrt{1 - (3/5)^2}} = \frac{5}{2}m$$

Exemplos e aplicações

- 2 Uma partícula de massa M , inicialmente em repouso, decai em dois pedaços de massa m (figura). Qual é a velocidade final de cada pedaço?



$$\text{cons. E: } E_M = E_1 + E_2 \Rightarrow M\cancel{c^2} = 2\gamma m\cancel{c^2}$$

$$\text{cons. p: } \vec{p}_M = 0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = (-p_1 + p_2) \hat{x}$$

$$\Rightarrow M = \frac{2m}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \Rightarrow v = c\sqrt{1 - (2m/M)^2},$$

que tem um *limiar* de ocorrência: $M \geq 2m$.

- Ex.: o dêuteron é estável, pois:

$$m_d = 1875,6 \text{ MeV}/c^2 < m_p + m_n = 1879,9 \text{ MeV}/c^2$$

Exemplos e aplicações

- 9 Um píon em repouso decai em um múon e um neutrino. Qual é a velocidade final do múon?



cons. E: $E_\pi = E_\mu + E_\nu$

cons. p: $\vec{p}_\pi = \vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu = 0 \Rightarrow \vec{p}_\mu = -\vec{p}_\nu$

Sugestão 1: calcular energia a partir do momento (e vice-versa) usando o invariante:

$$E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4$$

Para este caso:

$$E_\pi = m_\pi c^2$$

$$E_\mu = c \sqrt{m_\mu^2 c^2 + \vec{p}_\mu^2}$$

$$E_\nu \approx |\vec{p}_\nu| c = |\vec{p}_\mu| c$$

$$\Rightarrow m_\pi c^2 = c \sqrt{m_\mu^2 c^2 + |\vec{p}_\mu|^2} + |\vec{p}_\mu| c \Leftrightarrow (m_\pi c - |\vec{p}_\mu|)^2 = m_\mu^2 c^2 + |\vec{p}_\mu|^2$$

Exemplos e aplicações

- 9 Um pión em repouso decai em um múon e um neutrino. Qual é a velocidade final do múon?



Resolvendo para $|\vec{p}_\mu|$:

$$|\vec{p}_\mu| = \frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2)c}{2m_\pi}$$

E para E_μ :

$$E_\mu = \frac{(m_\pi^2 + m_\mu^2)c^2}{2m_\pi}$$

Sugestão 2: uma vez com a energia ($E = \gamma mc^2$) e o momento ($\vec{p} = \gamma m\vec{v}$) da partícula, é fácil encontrar sua velocidade:

$$\vec{p}/E = \vec{v}/c^2 \Rightarrow \vec{v} = \vec{p}c^2/E \Rightarrow v_\mu = \frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2)c}{m_\pi^2 + m_\mu^2}$$

Exemplos e aplicações

- 3 Um pión em repouso decai em um múon e um neutrino. Qual é a velocidade final do múon?



Sugestão 3: usar a notação de quadrivetores:

$$p_\pi = p_\mu + p_\nu \Leftrightarrow p_\nu = p_\pi - p_\mu$$

Tomando-se o produto escalar:

$$p_\nu^2 = p_\pi^2 + p_\mu^2 - 2p_\pi \cdot p_\mu,$$

mas $p_\nu^2 \approx 0$, $p_\pi^2 = m_\pi^2 c^2$, e $p_\mu^2 = m_\mu^2 c^2$ e $p_\pi \cdot p_\mu = \frac{E_\pi}{c} \frac{E_\mu}{c} = m_\pi E_\mu$

$$\Rightarrow 0 = m_\pi^2 c^2 + m_\mu^2 c^2 - 2m_\pi E_\mu \Rightarrow E_\mu = \frac{(m_\pi^2 + m_\mu^2)c^2}{2m_\pi}$$

Exemplos e aplicações

- 3 Um pión em repouso decai em um múon e um neutrino. Qual é a velocidade final do múon?



Analogamente:

$$p_{\mu} = p_{\pi} - p_{\nu}$$

Quadrando-se, vem:

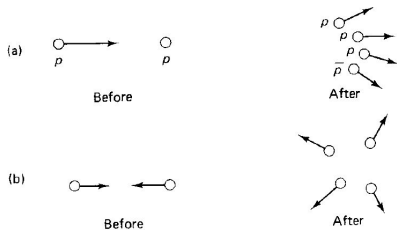
$$m_{\mu}^2 c^2 = m_{\pi}^2 c^2 - 2m_{\pi} E_{\nu},$$

mas $E_{\nu} \approx |\vec{p}_{\nu}|c = |\vec{p}_{\mu}|c$, assim:

$$|\vec{p}_{\mu}| = \frac{(m_{\pi}^2 - m_{\mu}^2)c}{2m_{\pi}}$$

Exemplos e aplicações

- 4 O acelerador Bevatron de Berkeley foi construído para produzir antiprótons pela reação $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$. Qual é o limiar para esta reação?

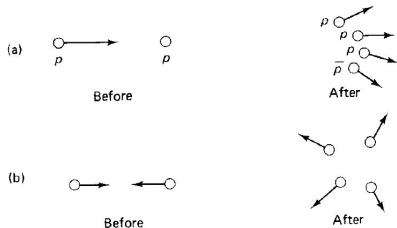


Sugestão 4: trabalhar no centro de momento (CM).

No referencial do CM é fácil ver que o limiar da reação dá-se quando a energia é suficiente para criar as 2 partículas extras, estando todas do estado final em repouso.

Exemplos e aplicações

- 4 O acelerador Bevatron de Berkeley foi construído para produzir antiprótons pela reação $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$. Qual é o limiar para esta reação?



No referencial do **laboratório**, **antes** da reação o momento total é:

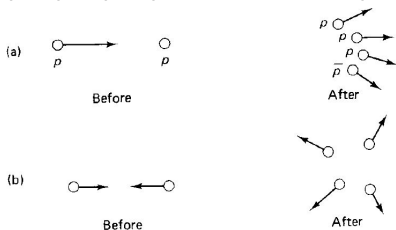
$$p_{TOT}^{\mu} = \left(\frac{E + mc^2}{c}, |\vec{p}|, 0, 0 \right).$$

No referencial do **CM**, **depois** da reação o momento total para o limiar é:

$$p_{TOT}^{\mu} = (4mc, 0, 0, 0).$$

Exemplos e aplicações

- 4 O acelerador Bevatron de Berkeley foi construído para produzir antiprótons pela reação $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$. Qual é o limiar para esta reação?



Agora, na transformação e um referencial para o outro, temos o invariante:

$$p_{\mu TOT} p^{\mu}_{TOT} = p'_{\mu TOT} p^{\mu'}_{TOT} \Rightarrow \left(\frac{E + mc^2}{c} \right)^2 - |\vec{p}|^2 = (4mc^2)^2$$

e usando-se a energia relativística, obtém-se o limiar de E :

$$E = 7mc^2,$$

ou seja, a energia cinética de pelo menos $K = 6mc^2$.

- A produção de antiprótons foi obtida com $K \geq 6$ GeV.

Exemplos e aplicações

- 4 Numa colisão ainda mais complicada (m_1, m_2, m_3, \dots e v_1, v_2, v_3, \dots) será que existe sempre um referencial de CM? *Resp.:* sim (e vamos demonstrar ...)
A energia total e o momento total, no referencial de laboratório é:

$$E_{TOT} = \sum_i \gamma_i m_i c^2; \quad \vec{p}_{TOT} = \sum_i \gamma_i m_i \vec{v}_i.$$

Como p_{TOT}^μ transforma-se por Lorentz:

$$|\vec{p}'_{TOT}| = \gamma \left(|\vec{p}_{TOT}| - \beta \frac{E_{TOT}}{c} \right),$$

que é zero se:

$$|\vec{p}_{TOT}| = \beta \frac{E_{TOT}}{c} \Rightarrow \beta = \frac{v}{c} = \frac{|\vec{p}_{TOT}|c}{E_{TOT}} = \frac{|\sum_i \gamma_i m_i \vec{v}_i|}{\sum_i \gamma_i m_i c},$$

isto é, o CM existe e tem velocidade:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{|\vec{p}_{TOT}|c^2}{E_{TOT}}.$$

Ademais, pela soma vetorial, sabemos que:

$$\frac{v}{c} \leq \left| \sum_i \gamma_i m_i (v_i/c) \right| / \sum_i \gamma_i m_i \leq 1.$$

Exemplos e aplicações

- 5 Suponha 2 partículas idênticas, cada uma de massa m e energia cinética K , colidem-se frontalmente no CM. Qual é a cinética relativa K' (ou seja, a de uma partícula no referencial em que a outra está em repouso)?



Tomando-se os quadrimomentos:

$$\text{@CM: } p_{TOT}^{\mu} = \left(\frac{2E}{c}, \vec{0} \right), \quad \text{@Lab: } p_{TOT}^{\mu'} = \left(\frac{E' + mc^2}{c}, \vec{p}' \right),$$

calculando-se o invariante $(p_{TOT})^2 = (p'_{TOT})^2$:

$$\left(\frac{2E}{c} \right)^2 = \left(\frac{E' + mc^2}{c} \right)^2 - \vec{p}'^2$$

e eliminando-se \vec{p}' , com a fórmula da energia relativística, vem:

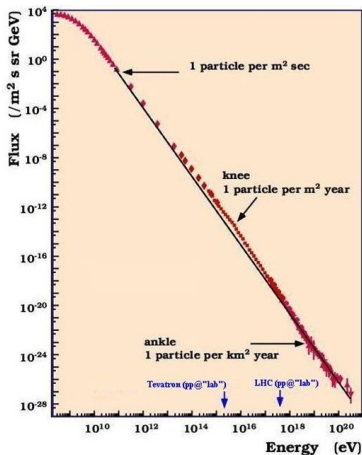
$$2E^2 = mc^2(E' + mc^2) \Rightarrow 2(K + mc^2)^2 = mc^2[(K' + mc^2) + mc^2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K' = 4K \left(1 + \frac{K}{2mc^2} \right)$$

Exemplos e aplicações

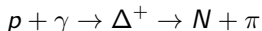
- 5 Por exemplo, o LHC acelera prótons até $K = 14$ TeV no CM, então:

$$\Rightarrow K' = 4K \left(1 + \frac{K}{2m_p c^2} \right) = 4 \cdot 14 \cdot 10^{12} \left(1 + \frac{14 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 938 \cdot 10^6} \right) = 4,2 \cdot 10^{17} \text{ eV}$$



Exemplos e aplicações

- 6 Corte GZK: Logo após a descoberta da radiação cósmica de fundo (RCF), Greisen e, independentemente, Zatsepin e Kuz'min notaram que, devido a um efeito Doppler relativístico, prótons (ou outras núcleos mais pesados) podem gerar uma partícula Δ^+ , na interação com os fótons da RCF, a qual depois decai, tipicamente, em um núcleon e um pión:



a) Qual é a energia do fóton no referencial em que o próton está em repouso?

- ▶ Primeiramente, vamos calcular a energia do fóton no referencial em que o próton está em movimento:

$$E_\gamma = \frac{3}{2} k_B T = \frac{3}{2} \cdot 8,62 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K} \cdot 2,7 \text{ K} = 3,49 \cdot 10^{-4} \text{ eV},$$

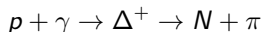
- ▶ mas no referencial em que o próton está em repouso:

$$m_p c^2 + E'_\gamma = m_\Delta c^2 \Rightarrow E'_\gamma = (m_\Delta - m_p) c^2 = (1232 - 938) \text{ MeV} = 294 \text{ MeV},$$

ou seja, um fator de amplificação de $E'_\gamma/E_\gamma = 8,4 \cdot 10^{11}$.

Exemplos e aplicações

- ⑥ Corte GZK: Logo após a descoberta da radiação cósmica de fundo (RCF), Greisen e, independentemente, Zatsepin e Kuz'min notaram que, devido a um efeito Doppler relativístico, prótons (ou outras núcleos mais pesados) podem gerar uma partícula Δ^+ , na interação com os fótons da RCF, a qual depois decai, tipicamente, em um núcleon e um pión:



b) Estime o fator γ de Lorentz do próton.

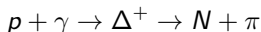
- Para um observador se aproximando da fonte, o efeito Doppler relativístico é:

$$f = f_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \Rightarrow \beta = \frac{(f/f_0)^2 - 1}{(f/f_0)^2 + 1},$$

mas como $(f/f_0)^2 = (E'_\gamma/E_\gamma)^2 = 7 \cdot 10^{23}$ é impraticável calcular-se β numa calculadora comum, que vai ser um número que se desvia de 0,999... \sim na 24ª casa decimal $\Rightarrow \gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2} \sim 10^{24}$.

Exemplos e aplicações

- ⑥ Corte GZK: Logo após a descoberta da radiação cósmica de fundo (RCF), Greisen e, independentemente, Zatsepin e Kuz'min notaram que, devido a um efeito Doppler relativístico, prótons (ou outros núcleos mais pesados) podem gerar uma partícula Δ^+ , na interação com os fótons da RCF, a qual depois decai, tipicamente, em um núcleon e um píon:



c) Supondo o modo de decaimento $\Delta^+ \rightarrow p + \pi^0$, qual seria a mínima perda de energia do próton?

- Neste caso, no referencial de movimento do próton, teremos:

$$\cancel{m_p c^2} + K_p + E_\gamma = \cancel{m_p c^2} + K'_p + m_\pi c^2 + K'_\pi \Rightarrow$$

$$K_p - K'_p = m_\pi c^2 + K'_\pi - E_\gamma \geq m_\pi c^2 - E_\gamma \approx 135 \text{ MeV}.$$

Exemplos e aplicações

6 Corte GZK:

