Eletrodinâmica quântica

Física de Partículas Elementares - I

Prof. Marcelo A. Leigui de Oliveira

Centro de Ciências Naturais e Humanas
Universidade Federal do ABC
Av. dos Estados, 5001
09210-580 Santo André-SP

4 de abril de 2023

A equação de Dirac

- Introdução à equação de Dirac, estabelecimento das regras de Feynman para a QED e desenvolvimento de ferramentas de cálculo;
- O "modelo ABC" não leva em conta os spins das partículas;
- Na MQ não relativística: equação de Schrödinger.

  Partindo da relação clássica de energia e momento:

  $$\frac{p^2}{2m} + V = E$$

  e aplicando os operadores:

  $$\vec{p} \to -i\hbar\vec{\nabla}, \quad E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

  à função de onda, Ψ:

  $$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}};$$

- Na MQ relativística:
  - spin 0: equação de Klein-Gordon;
  - spin $\frac{1}{2}$: equação de Dirac;
  - spin 1: equação de Proca.

A equação de Dirac

- A equação de Klein-Gordon (spin 0):

  Partindo da relação relativística de energia e momento (da partícula livre, $V = 0$):

  $$E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^2 \Leftrightarrow p^\mu p_\mu - m^2 c^2 = 0,$$

  e aplicando o operador (notação de quadrimomentos):

  $$p_\mu \to i\hbar\partial_\mu, \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

  à função de onda, ψ:

  $$-\hbar^2 \partial^\mu \partial_\mu \psi - m^2 c^2 \psi = 0 \Rightarrow$$

  $$\boxed{-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \nabla^2\psi = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \psi},$$

  que é a equação de Klein-Gordon.

A equação de Dirac

- A equação de Dirac (spin $\frac{1}{2}$):

  Fatorando-se a relação relativística de energia e momento (da partícula livre, $V = 0$). Primeiramente, para a componente p^0 (com $\vec{p} = 0$):

$$(p^0)^2 - m^2c^2 = (p^0 + mc)(p^0 - mc) = 0 \Rightarrow \begin{cases} (p^0 - mc) = 0, \\ (p^0 + mc) = 0, \end{cases}$$

  mas, para $\vec{p} \neq 0$, é mais complicado:

$$p^\mu p_\mu - m^2c^2 = (\beta^\kappa p_\kappa + mc)(\gamma^\lambda p_\lambda - mc) =$$

$$= \beta^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda - mc\cancel{(\beta^\kappa - \gamma^\kappa)}p_\kappa - m^2c^2 = 0,$$

  onde β^κ e γ^λ são 8 coeficientes a serem determinados. ($\beta^\kappa = \gamma^\kappa$, pois não queremos termos lineares em p_κ.)

$$\Rightarrow \beta^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda - m^2c^2 = 0.$$

A equação de Dirac

- A equação de Dirac (spin $\frac{1}{2}$):

Inspecionando-se:

$$p^\mu p_\mu = \gamma^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
(p^0)^2-(p^1)^2-(p^2)^2-(p^3)^2 \;=\; & (\gamma^0)^2(p^0)^2+(\gamma^1)^2(p^1)^2+(\gamma^2)^2(p^2)^2+\\
& +(\gamma^3)^2(p^3)^2+(\gamma^0\gamma^1+\gamma^1\gamma^0)p_0p_1+\\
& +(\gamma^0\gamma^2+\gamma^2\gamma^0)p_0p_2+(\gamma^0\gamma^3+\gamma^3\gamma^0)p_0p_3+\\
& +(\gamma^1\gamma^2+\gamma^2\gamma^1)p_1p_2+(\gamma^1\gamma^3+\gamma^3\gamma^1)p_1p_3+\\
& +(\gamma^2\gamma^3+\gamma^3\gamma^2)p_2p_3
\end{aligned} \quad ,$$

onde também não queremos os termos cruzados. A única saída são *matrizes*, tais que:

$$(\gamma^0)^2 = 1, \quad (\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1,$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 0, \quad \text{para } \mu \neq \nu,$$

ou melhor:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu},$$

onde $g^{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski e o *anticomutador*:

$$\{A, B\} = AB + BA.$$

A equação de Dirac

- As menores matrizes que funcionam são 4×4, na convenção de Bjorken e Drell:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix},$$

  onde σ^i são as matrizes de Pauli 2×2, 1 são matrizes identidade 2×2 e 0 matrizes nulas 2×2 preenchendo o resto.

- Com essas matrizes 4×4, a relação de energia e momento é fatorável:

$$p^\mu p_\mu - m^2c^2 = (\gamma^\kappa p_\kappa + mc)(\gamma^\lambda p_\lambda - mc) = 0$$

  Tomando-se uma delas (tanto faz, probl. 7.10), por convenção:

$$\gamma^\mu p_\mu - mc = 0.$$

  Fazendo-se agora a substituição $p_\mu \to i\hbar\partial_\mu$ e aplicando sobre uma função de onda ψ:

$$\boxed{i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc\psi = 0},$$

  que é a equação de Dirac.

  Note que ψ é um *bispinor*, ou *spinor de Dirac*: $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$.

Soluções da equação de Dirac

- Seja, inicialmente, ψ independente da posição:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial z} = 0,$$

como $\vec{p} = i\hbar\partial_\mu \Rightarrow \vec{p} = 0$, a equação de Dirac reduz-se a:

$$\frac{i\hbar}{c}\gamma^0\frac{\partial\psi}{\partial t} - mc\psi = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi_A}{\partial t} \\ \frac{\partial\psi_B}{\partial t} \end{pmatrix} = -i\frac{mc^2}{\hbar}\begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix},$$

onde:

$$\psi_A = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \psi_B = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}.$$

Assim:

$$\frac{\partial\psi_A}{\partial t} = -i\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)\psi_A, \quad -\frac{\partial\psi_B}{\partial t} = -i\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)\psi_B$$

e as soluções são:

$$\psi_A(t) = \psi_A(0)e^{-i(mc^2/\hbar)t}, \quad \psi_B(t) = \psi_B(0)e^{+i(mc^2/\hbar)t}.$$

Lembrando que:

$$e^{\mp i(mc^2/\hbar)t} = e^{\mp i(E/\hbar)t} \Rightarrow E = \pm mc^2 :$$

  - ψ_A descreve *elétrons* com $\vec{p} = 0$ e energia positiva: $E = +mc^2$;
  - ψ_B descreve *pósitrons* com $\vec{p} = 0$ e energia negativa: $E = -mc^2$.

Soluções da equação de Dirac

As soluções (sem as normalizações) são:

$$\psi^{(1)} = e^{-i(mc^2/\hbar)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi^{(2)} = e^{-i(mc^2/\hbar)t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\psi^{(3)} = e^{+i(mc^2/\hbar)t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi^{(4)} = e^{+i(mc^2/\hbar)t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

descrevendo, respectivamente, elétrons com spin para cima, elétrons com spin para baixo, pósitrons com spin para cima e pósitrons com spin para baixo.

Soluções da equação de Dirac

- Vamos procurar pelas soluções de onda plana:

$$\psi(\vec{r}, t) = ae^{-(i/\hbar)(Et - \vec{p}\cdot\vec{r})}u(E, \vec{p}),$$

ou, na notação de quadrivetores:

$$\psi(x) = ae^{-(i/\hbar)x\cdot p}u(p),$$

onde $p = (E/c, \vec{p})$ e $u(p)$ é um bispinor que satisfaz à equação de Dirac.

Calculando:

$$\partial_\mu \psi = -\frac{i}{\hbar} p_\mu ae^{-(i/\hbar)x^\mu p_\mu} u$$

e substituindo na equação de Dirac:

$$\gamma^\mu p_\mu ae^{-(i/\hbar)x^\mu p_\mu} u - mcae^{-(i/\hbar)x^\mu p_\mu} u = 0 \Rightarrow$$

$$(\gamma^\mu p_\mu - mc)u = 0,$$

conhecida como "*equação de Dirac no espaço de momento*", que é uma equação puramente algébrica (sem derivadas).

Soluções da equação de Dirac

Agora:

$$\gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 p_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} = \frac{E}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \vec{p} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c & -\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & -E/c \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(\gamma^\mu p_\mu - mc) u = \begin{pmatrix} (E/c - mc) & -\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & (-E/c - mc) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (E/c - mc) u_A - (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) u_B \\ (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) u_A - (E/c + mc) u_B \end{pmatrix},$$

onde u_A e u_B contêm as 2 componentes: para cima e para baixo.
Então:

$$(E/c - mc) u_A - (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) u_B = 0 \Rightarrow u_A = \frac{c}{E - mc^2} (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) u_B,$$

$$(\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) u_A - (E/c + mc) u_B = 0 \Rightarrow u_B = \frac{c}{E + mc^2} (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) u_A.$$

Substituindo-se uma na outra:

$$u_A = \frac{c^2}{E^2 - m^2 c^4} (\vec{p} \cdot \vec{\sigma})^2 u_A.$$

Soluções da equação de Dirac

Mas:

$$\vec{p}\cdot\vec{\sigma} = p_x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + p_y \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + p_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_z & (p_x - ip_y) \\ (p_x + ip_y) & -p_z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})^2 = \begin{pmatrix} \overbrace{p_z^2 + (p_x - ip_y)(p_x + ip_y)}^{p_z^2+p_x^2+p_y^2=p^2} & \overbrace{p_z(p_x - ip_y) - p_z(p_x - ip_y)}^{0} \\ \overbrace{p_z(p_x + ip_y) - p_z(p_x + ip_y)}^{0} & \overbrace{(p_x + ip_y)(p_x - ip_y) + p_z^2}^{p_x^2+p_y^2+p_z^2=p^2} \end{pmatrix} = \vec{p}^2\mathbb{1}.$$

Então:

$$u_A = \frac{\vec{p}^2 c^2}{E^2 - m^2c^4} u_A \Rightarrow E^2 - m^2c^4 = \vec{p}^2c^2,$$

que é a relação de energia e momento relativística. Ou seja, a função de onda proposta satisfaz à equação de Dirac. Sabemos que:

$$E = \pm\sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2},$$

com a solução positiva para partículas e a solução negativa para antipartículas.

Soluções da equação de Dirac

Agora, retornando-se às relações:

$$u_A = \frac{c}{E - mc^2}(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})u_B, \quad u_B = \frac{c}{E + mc^2}(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})u_A,$$

e substituindo-se o resultado de $(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})$, vêm:

(1) tomando-se: $u_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, então: $u_B = \dfrac{c}{E + mc^2}(\vec{p}\cdot\vec{\sigma}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{c}{E + mc^2} \begin{pmatrix} p_z \\ px + ip_y \end{pmatrix}$,

(2) tomando-se: $u_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, então: $u_B = \dfrac{c}{E + mc^2}(\vec{p}\cdot\vec{\sigma}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{c}{E + mc^2} \begin{pmatrix} px - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix}$,

(3) tomando-se: $u_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, então: $u_A = \dfrac{c}{E - mc^2}(\vec{p}\cdot\vec{\sigma}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{c}{E - mc^2} \begin{pmatrix} p_z \\ px + ip_y \end{pmatrix}$,

(4) tomando-se: $u_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, então: $u_A = \dfrac{c}{E - mc^2}(\vec{p}\cdot\vec{\sigma}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{c}{E - mc^2} \begin{pmatrix} px - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix}$.

- (1) e (2) representam os estados de *partículas*, enquanto que (3) e (4) representam os estados de *antipartículas*.

Soluções da equação de Dirac

- Normalização dos spinores:

$$u^\dagger u = 2|E|/c,$$

onde $u^\dagger$ é o *conjugado hermitiano*:

$$u^\dagger u = (\alpha^* \beta^* \gamma^* \delta^*) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 2|E|/c \Rightarrow$$

$$u^{(1)} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{E+mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E+mc^2} \end{pmatrix}, \; u^{(2)} = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(p_x-ip_y)}{E+mc^2} \\ \frac{-cp_z}{E+mc^2} \end{pmatrix}, \text{ com } E = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2}$$

$$u^{(3)} = N \begin{pmatrix} \frac{cp_z}{E-mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E-mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; u^{(4)} = N \begin{pmatrix} \frac{c(p_x-ip_y)}{E-mc^2} \\ \frac{cp_z}{E-mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ com } E = -\sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2}$$

e a constante N (probl. 7.3):

$$N = \sqrt{(|E| + mc^2)/c}.$$

Soluções da equação de Dirac

- As soluções $u^{(1)}$ e $u^{(2)}$ descrevem o elétron com spin para cima e para baixo, enquanto que $u^{(3)}$ e $u^{(4)}$ descrevem o pósitron com spin para cima e para baixo, respectivamente, certo? Errado ...

  Para partículas de Dirac, as matrizes de spin são:

  $$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}, \text{ com } \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

  e as funções $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, u^{(4)}$ não são autoestados de Σ_z. Contudo, orientando-se o eixo z ao longo do movimento ($p_x = p_y = 0, p_z = p$), as funções $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, u^{(4)}$ são autoestados de S_z (Probl. 7.6).

Soluções da equação de Dirac

- *Reinterpretação das soluções de energia negativa*: $u^{(3)}$ e $u^{(4)}$ não podem representar partículas livres (com $E > 0$), então, vamos alterar o sinal das funções:

$$\psi(\vec{r}, t) = ae^{+i/\hbar(Et-\vec{p}\cdot\vec{r})}u(-E, -\vec{p}), \text{ para as soluções 3 e 4}$$

e vamos redefiní-las como $v^{(1)}$ e $v^{(2)}$:

$$v^{(1)}(E, \vec{p}) = u^{(4)}(-E, -\vec{p}) = N \begin{pmatrix} \frac{c(p_x - ip_y)}{E+mc^2} \\ \frac{-cp_z}{E+mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$v^{(2)}(E, \vec{p}) = -u^{(3)}(-E, -\vec{p}) = N \begin{pmatrix} \frac{cp_z}{E+mc^2} \\ \frac{c(p_x + ip_y)}{E+mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

com $E = +\sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2}$.

As funções $u^{(1)}$ e $u^{(2)}$ satisfazem à equação:

$$(\gamma^\mu p_\mu - mc)u = 0$$

e as funções $v^{(1)}$ e $v^{(2)}$ satisfazem à equação:

$$(\gamma^\mu p_\mu + mc)u = 0.$$

Covariantes bilineares

- Seja a transformação de referencial $S \to S'$, com S' movendo-se com velocidade v na direcão x. Um spinor de Dirac se transforma com:

$$\psi \to \psi' = S\psi,$$

onde S é a matriz 4×4:

$$S = a_+ + a_-\gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} a_+ & a_-\sigma_1 \\ a_-\sigma_1 & a_+ \end{pmatrix},$$

com

$$a_\pm = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(\gamma \pm 1)}.$$

- Vamos construir um escalar a partir do spinor ψ:

$$\psi^\dagger\psi = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2,$$

que não é bem um escalar:

$$(\psi^\dagger\psi)' = (\psi')^\dagger\psi' = \psi^\dagger S^\dagger S\psi \neq (\psi^\dagger\psi),$$

pois (probl. 7.11):

$$S^\dagger S = S^2 = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\sigma_1 v/c \\ -\sigma_1 v/c & 1 \end{pmatrix} \neq 1.$$

Covariantes bilineares

- Introduzindo o *spinor adjunto*:
$$\overline{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 = (\psi_1^* \; -\psi_2^* \; -\psi_3^* \; -\psi_4^*),$$
encontramos o invariante:
$$\overline{\psi}\psi = \psi^\dagger \gamma^0 \psi = |\psi_1|^2 - |\psi_2|^2 - |\psi_3|^2 - |\psi_4|^2,$$
pois (do probl. 7.11, $S^\dagger \gamma^0 S = \gamma^0$):
$$(\overline{\psi}\psi)' = (\psi')^\dagger \gamma^0 \psi' = \psi^\dagger S^\dagger \gamma^0 S \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \psi = \overline{\psi}\psi,$$
que é também invariante sob operação de paridade, portanto, é um *escalar* (de verdade).
- Por outro lado:
$$\overline{\psi}\gamma^5\psi, \text{ onde: } \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
é um *pseudoescalar* e um invariante de Lorentz (probl. 7.12).
Note que γ^0 comuta consigo mesma e anticomuta com as outras matrizes γ^i:
$$[\gamma^0, \gamma^0] = 0, \quad \{\gamma^0, \gamma^i\} = 0, \; i = 1, 2, 3 \Rightarrow$$
$$\gamma^5\gamma^0 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0 = (-1)^3\gamma^0 i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\gamma^0\gamma^5 \Rightarrow \{\gamma^0, \gamma^5\} = 0$$
$$\Rightarrow \{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0, \; \mu = 0, 1, 2, 3$$
e assim $\overline{\psi}\gamma^5\psi$ é um pseudoescalar:
$$(\overline{\psi}\gamma^5\psi)' = -(\overline{\psi}\gamma^5\psi).$$

Covariantes bilineares

- Estendendo os resultados:

$$\begin{array}{lll}
(1) & \overline{\psi}\psi = \text{escalar} & (1\text{ componente}), \\
(2) & \overline{\psi}\gamma^5\psi = \text{pseudoescalar} & (1\text{ componente}), \\
(3) & \overline{\psi}\gamma^\mu\psi = \text{vetor} & (4\text{ componentes}), \\
(4) & \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi = \text{pseudovetor} & (4\text{ componentes}), \\
(5) & \overline{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi = \text{tensor antissimétrico} & (6\text{ componentes}),
\end{array}$$

onde:

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu).$$

Note que os "recheios dos sanduíches":

$$1,\ \gamma^5,\ \gamma^\mu,\ \gamma^\mu\gamma^5 \text{ e } \sigma^{\mu\nu}$$

formam a base das matrizes 4×4 invariantes de Lorentz.

O fóton

Formulação covariante da eletrodinâmica.

- Partindo das equações de Maxwell:

$$\text{(i)}\ \nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \qquad \text{(iii)}\ \nabla \cdot \vec{B} = 0,$$

$$\text{(ii)}\ \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad \text{(iv)}\ \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}.$$

Em notação relativística, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ formam um tensor antissimétrico de classe-2, o *tensor intensidade de campo*, $F^{\mu\nu}$:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

e as densidades de carga e de corrente formam um quadrivetor:

$$J^\mu = (c\rho, \vec{J}).$$

As equações inomogêneas de Maxwell, (i) e (iv), ficam (Probl. 7.18):

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu.$$

Agora, de $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} =$ vem (Probl. 7.19):

$$\partial_\mu J^\mu = 0,$$

que é a *equação da continuidade*.

O fóton

- Por outro lado:

$$\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \nabla \times \vec{A}} \Rightarrow$$

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\nabla V - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}},$$

  onde V é o potencial escalar e $\vec{A}$ é o potencial vetor.
  Na notação relativística:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \text{ onde: } A^\mu = (V, \vec{A}).$$

  Com isto, as equações inomogêneas de Maxwell, (i) e (iv), ficam (Probl. 7.73):

$$(\partial_\mu \partial^\mu) A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = \frac{4\pi}{c} J^\nu$$

  e as equações homogêneas de Maxwell, (ii) e (iii) ficam automaticamente satisfeitas.

- Note que uma mudança de potencial na forma (*mudança de calibre):*

$$A'_\mu = A_\mu + \partial\lambda, \quad \textit{onde } \lambda = f(\vec{r}, t),$$

  não altera os resultados finais (as equações de Maxwell).
  Impondo ainda:

$$\partial_\mu A^\mu = 0,$$

  o chamado calibre/condição de Lorenz, as equações de Maxwell simplificam ainda mais:

$$\Box A^\mu = \frac{4\pi}{c} J^\mu,$$

  onde $\Box = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ é o *operador d'Alambertiano.*

O fóton

- No vácuo, onde $J^\mu = 0$, *tomamos*:
$$A^0 = V = 0$$
e a condição de Lorenz fica:
$$\nabla \cdot \vec{A} = 0,$$
conhecida como *calibre de Coulomb*;
- Na eletrodinâmica quântica, A^μ torna-se a função de onda do fóton. O fóton livre ($J^\mu = 0$) satisfaz:
$$\Box A^\mu = 0,$$
que é a equação de Klein-Gordon para $m = 0$.
A solução de onda plana é:
$$A^\mu(x) = a e^{-(i/\hbar) p \cdot x} \epsilon^\mu(p),$$
onde ϵ^μ é o ***vetor de polarização*** e a uma normalização do fóton.
Substituindo-se na equação diferencial, obtemos:
$$p^\mu p_\mu = 0, \quad \text{tal que: } E = |\vec{p}|c,$$
conforme o esperado para $m = 0$.
A condição de Lorenz requer que:
$$p^\mu \epsilon_\mu = 0$$
e o calibre de Coulomb (ou *calibre transversal*) que:
$$\epsilon^0 = 0, \quad \vec{\epsilon} \cdot \vec{p} = 0,$$
ou seja, 2 polarizações independentes $(\hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2)$ para as 2 helicidades do fóton.

As regras de Feynman para a Eletrodinâmica Quântica

- Vimos que elétrons e pósitrons são representados pelas funções de onda que satisfazem às equações de Dirac do espaço de momentos:

elétrons	*pósitrons*
$\psi(x) = ae^{-(i/\hbar)(p\cdot x)}u^{(s)}(p)$	$\psi(x) = ae^{+(i/\hbar)(p\cdot x)}v^{(s)}(p)$
$(\gamma^\mu p_\mu - mc)u = 0$	$(\gamma^\mu p_\mu + mc)v = 0$

,

onde $p = (E/c, \vec{p})$, $E = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2}$ e $s = 1, 2$ representam os 2 estados de spin.

- As suas funções adjuntas satisfazem às equações de Dirac do espaço de momentos:

elétrons	*pósitrons*
$\overline{u} = u^\dagger\gamma^0$	$\overline{v} = v^\dagger\gamma^0$
$\overline{u}(\gamma^\mu p_\mu - mc) = 0$	$\overline{v}(\gamma^\mu p_\mu + mc) = 0$

;

- Tais funções são ortogonais, normalizadas e formam um conjunto completo (probl. 7.22):

elétrons	*pósitrons*
$\overline{u}^{(1)}u^{(2)} = 0$	$\overline{v}^{(1)}v^{(2)} = 0$
$\overline{u}u = 2mc$	$\overline{v}v = -2mc$
$\sum_{i=1,2} u^{(s)}\overline{u}^{(s)} = (\gamma^\mu p_\mu + mc)$	$\sum_{i=1,2} v^{(s)}\overline{v}^{(s)} = (\gamma^\mu p_\mu - mc)$

;

- Um conjunto conveniente é: $(u^{(1)}, u^{(2)}, v^{(1)}, v^{(2)})$.

As regras de Feynman para a Eletrodinâmica Quântica

- Enquanto que para fótons livres, as funções de onda que satisfazem à equação de Klein-Gordon/Poisson do espaço de momentos é:

$$\begin{array}{c} \hline fótons \\ \hline A^{\mu}(x) = ae^{-(i/\hbar)(p\cdot x)}\epsilon^{\mu}_{(s)} \\ \epsilon^{\mu} p_{\mu} = 0 \\ \hline \end{array} ;$$

  onde $p = (E/c, \vec{p})$, $E = |\vec{p}|c$ e $s = 1, 2$ representam os 2 estados de spin (polarização) do fóton.

- Tais funções são ortogonais, normalizadas e (no calibre de Coulomb: $\epsilon^0 = 0, \vec{\epsilon}\cdot\vec{p} = 0$) formam um conjunto completo (probl. 7.23):

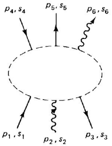
$$\begin{array}{c} \hline fótons \\ \hline \epsilon^{\mu *}_{(1)}\epsilon_{\mu\,(2)} = 0 \\ \epsilon^{\mu *}\epsilon_{\mu} = 1 \\ \sum_{s=1,2}(\epsilon_{(s)})_i(\epsilon^{*}_{(s)})_j = \delta_{ij} - \hat{p}_i\hat{p}_j \\ \hline \end{array} ;$$

- Um par conveniente é: $(\epsilon_{(1)}, \epsilon_{(2)})$.

As regras de Feynman para a Eletrodinâmica Quântica

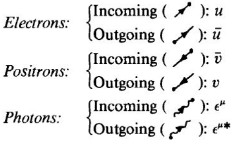
- Para calcular a amplitude $\mathcal{M}$ associada a um diagrama de Feynman em particular, seguiremos os passos:

  1. *Notação.* Denote os quadrimomentos de entrada e de saída $p_1, p_2, \ldots, p_n$, seus spins correspondentes $s_1, s_2, \ldots, s_n$ e os momentos internos $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Estabeleça com setas uma direção positiva (abitrária para linhas internas):



;

  2. *Linhas externas.* Para cada linha externa, introduza um fator:



;

  3. *Fatores de vértice.* Para cada vértice, escreva um fator:

$$ig_e\gamma^\mu,$$

onde $g_e = e\sqrt{4\pi/\hbar c} = \sqrt{4\pi\alpha}$ é a *constante de acoplamento*;

As regras de Feynman para a Eletrodinâmica Quântica

4. *Propagador*. Cada linha interna contribui com um fator:

$$\begin{array}{ll} \text{elétrons e pósitrons:} & \frac{i(\not{q}+mc)}{q^2-m^2c^2} \\ \text{fótons:} & \frac{-ig_{\mu\nu}}{q} \end{array},$$

   onde $\not{q} \equiv \gamma^\mu q_\mu$.
5. *Conservação de energia e momento*. Para cada vértice, escreva uma função delta:

$$(2\pi)^4\delta^4(k_1 + k_2 + k_3),$$

   onde os ks são os quadrimomentos *entrando* no vértice (ou *saindo* com sinal menos);
6. *Integrar sobre todos os momentos internos*. Para cada momento interno q, escreva um fator:

$$\frac{d^4q}{(2\pi)^4}$$

   e integre sobre todos eles;

As regras de Feynman para a Eletrodinâmica Quântica

7. *Cancelar a delta remanescente.* Cancele do resultado uma função delta:

$$(2\pi)^4\delta^4(p_1 + p_2 + \dots - p_n),$$

que reforça a conservação e energia e momento global.

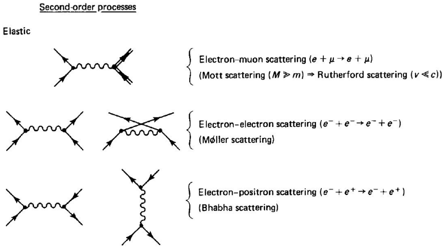
O que sobrar é igual a $-i\mathcal{M}$.

- Entretanto, há um novo passo:

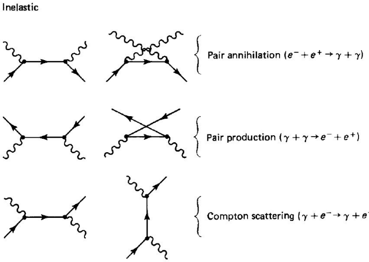
8. *Antissimetrização.* Ao combinarem-se as amplitudes, deve-se incluir um sinal de menos entre diagramas que diferem apenas na troca entre 2 férmions: 2 elétrons que entram, 2 pósitrons que saem, ou 1 elétron que entra com um pósitron que sai, ou vice-versa.

Exemplos

- Vamos calcular alguns dos mais importantes processos:



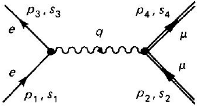
(a)processos elásticos;



(b)processos inelásticos.

Exemplos

1. Espalhamento elétron-múon:



Seguindo de trás para frente ao longo das linhas de cada férmion:

$$(2\pi)^4 \int [\overline{u}^{(s_3)}(p_3)(ig_e\gamma^\mu)u^{(s_1)}(p_1)] \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} [\overline{u}^{(s_4)}(p_4)(ig_e\gamma^\nu)u^{(s_2)}(p_2)] \times$$

$$\times \delta^4(p_1 - p_3 - q)\delta^4(p_2 + q - p_4)d^4q$$

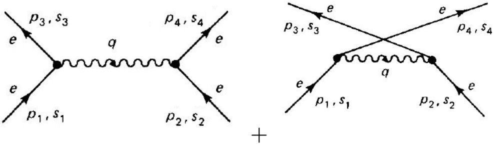
Aplicando $g_{\mu\nu}$, a primeira δ e retirando a δ final:

$$\mathcal{M} = -\frac{g_e^2}{(p_1 - p_3)^2}[\overline{u}^{(s_3)}(p_3)\gamma^\mu u^{(s_1)}(p_1)][\overline{u}^{(s_4)}(p_4)\gamma_\mu u^{(s_2)}(p_2)]$$

Falta trabalhar os spins (Probl. 7.24).

Exemplos

2. Espalhamento elétron-elétron:

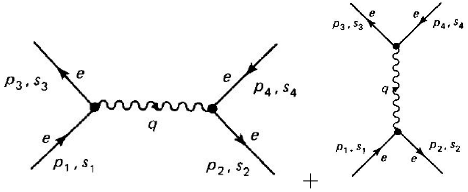


Para o primeiro diagrama usamos o resultado do exemplo anterior, para o segundo também com $p_3, s_3 \leftrightarrow p_4, s_4$. De acordo com a regra 8, os diagramas devem ser subtraídos:

$$\mathcal{M} = -\frac{g_e^2}{(p_1 - p_3)^2}[\overline{u}(3)\gamma^\mu u(1)][\overline{u}(4)\gamma_\mu u(2)] + \frac{g_e^2}{(p_1 - p_4)^2}[\overline{u}(4)\gamma^\mu u(1)][\overline{u}(3)\gamma_\mu u(2)]$$

Exemplos

3. Espalhamento elétron-pósitron:



Para o 1°diagrama:

$$(2\pi)^4 \int [\overline{u}(3)(ig_e\gamma^\mu)u(1)] \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} [\overline{v}(2)(ig_e\gamma^\nu)v(4)] \times \delta^4(p_1 - p_3 - q)\delta^4(p_2 + q - p_4)d^4q$$

vem que:

$$\mathcal{M}_1 = -\frac{g_e^2}{(p_1 - p_3)^2}[\overline{u}(3)\gamma^\mu u(1)][\overline{v}(2)\gamma_\mu v(4)].$$

Para o 2°diagrama:

$$(2\pi)^4 \int [\overline{u}(3)(ig_e\gamma^\mu)v(4)] \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} [\overline{v}(2)(ig_e\gamma^\nu)u(1)] \times \delta^4(q - p_3 - p_4)\delta^4(p_1 + p_2 - q)d^4q$$

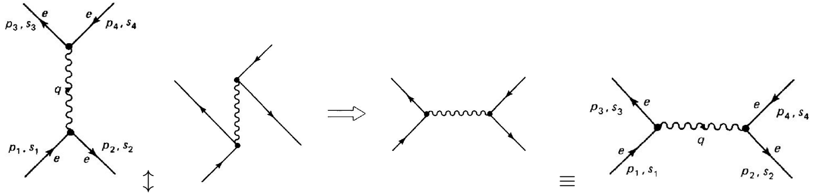
vem que:

$$\mathcal{M}_2 = -\frac{g_e^2}{(p_1 + p_2)^2}[\overline{u}(3)\gamma^\mu v(4)][\overline{u}(2)\gamma_\mu u(1)].$$

Exemplos

3. Espalhamento elétron-pósitron:

   Note agora que, do 2° diagrama, permutando-se as partículas dos vértices, obtém-se o 1° diagrama:

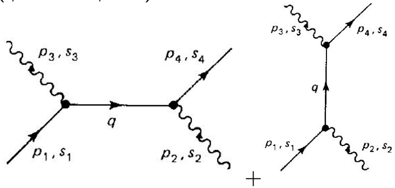


Portanto, pela regra 8, temos que subtraí-los:

$$\mathcal{M} = -\frac{g_e^2}{(p_1 - p_3)^2}[\overline{u}(3)\gamma^\mu u(1)][\overline{v}(2)\gamma_\mu v(4)] + \frac{g_e^2}{(p_1 + p_2)^2}[\overline{u}(3)\gamma^\mu v(4)][\overline{u}(2)\gamma_\mu u(1)].$$

Exemplos

4. Espalhamento Compton ($\gamma + e \to \gamma + e$):



Há também 2 diagramas que *não diferem* pela troca, então, pela regra 8, temos que somá-los. Do 1° diagrama, vem que:

$$(2\pi)^4 \int \epsilon_\mu(2)[\overline{u}(4)(ig_e\gamma^\mu)\frac{i(\not{q}+mc)}{q^2-m^2c^2}(ig_e\gamma^\nu)u(1)]\times\epsilon_\nu(3)^*\delta^4(p_1-p_3-q)\delta^4(p_2+q-p_4)d^4q,$$

onde $\not{a} = a_\mu\gamma^\mu$ ou $\not{a} = \gamma^\nu a_\nu$. A amplitude deste diagrama é:

$$\mathcal{M}_1 = \frac{g_e^2}{(p_1-p_3)^2-m^2c^2}[\overline{u}(4)\not{\epsilon}(2)(\not{p}_1-\not{p}_3+mc)\not{\epsilon}(3)^*u(1)].$$

A amplitude do 2° diagrama é:

$$\mathcal{M}_2 = \frac{g_e^2}{(p_1+p_3)^2-m^2c^2}[\overline{u}(4)\not{\epsilon}(3)(\not{p}_1+\not{p}_2+mc)\not{\epsilon}(2)^*u(1)].$$

E a amplitude final é:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2.$$

O truque de Casimir e os teoremas de traços

- Próximo passo: introduzir os spinores em $\mathcal{M}$, calcular $|\mathcal{M}|^2$ e, depois, τs e σs;
- Na maioria dos experimentos, os spins são aleatórios e as grandezas relevantes (τ ou σ) são promediadas sobre todos os spins iniciais e somadas sobre todas as configurações finais:

$$< |\mathcal{M}|^2 > \equiv \textit{ média } \text{sobre os spins } i \text{ e } \textit{soma} \text{ sobre todos os spins } f \text{ de } |\mathcal{M}(i \to f)|^2;$$

- Considere a amplitude do espalhamento elétron-múon, quadrando-se:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{g_e^4}{(p_1 - p_3)^4}[\overline{u}(3)\gamma^\mu u(1)][\overline{u}(4)\gamma_\mu u(2)][\overline{u}(3)\gamma^\mu u(1)]^*[\overline{u}(4)\gamma_\nu u(2)]^*;$$

- Note que sempre há (em outros processos também) termos do tipo:

$$G \equiv [\overline{u}(a)\Gamma_1 u(b)][\overline{u}(a)\Gamma_2 u(b)]^*;$$

  - Avaliando o complexo conjugado:

$$[\overline{u}(a)\Gamma_2 u(b)]^* = [u(a)^\dagger\gamma^0\Gamma_2 u(b)]^\dagger = u(b)^\dagger\Gamma_2^\dagger\gamma^{0\dagger}u(a) = u(b)^\dagger\Gamma_2^\dagger\gamma^0 u(a) =$$

$$= u(b)^\dagger\gamma^0\gamma^0\Gamma_2^\dagger\gamma^0 u(a) = [u(b)^\dagger\gamma^0](\gamma^0\Gamma_2^\dagger\gamma^0)u(a) = \overline{u}(b)\overline{\Gamma}_2 u(a),$$

onde usamos: $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$, $(\gamma^0)^2 = 1$, $\overline{\Gamma}_2 \equiv \gamma^0\Gamma_2^\dagger\gamma^0$.

$$\Rightarrow G = [\overline{u}(a)\Gamma_1 u(b)][\overline{u}(b)\overline{\Gamma}_2 u(a)].$$

O truque de Casimir e os teoremas de traços

- Somando-se sobre os spins da partícula b:

$$\sum_{spins\ b} G = \overline{u}(a)\Gamma_1 \left\{ \sum_{s_b=1,2} u^{(s_b)}(p_b)\overline{u}^{(s_b)}(p_b) \right\} \overline{\Gamma}_2 u(a) = \overline{u}(a) \left[\Gamma_1 \{ \not{p}_b + m_b c \} \overline{\Gamma}_2 \right] u(a).$$

Definindo-se:

$$Q \equiv \Gamma_1 \left\{ (\not{p}_b + m_b c) \right\} \overline{\Gamma}_2,$$

vem:

$$\sum_{spins\ b} G = \overline{u}(a)\ Q\ u(a);$$

- Somando-se, agora, sobre os spins da partícula a:

$$\sum_{spins\ a} \sum_{spins\ b} G = \sum_{s_a=1,2} \overline{u}^{(s_a)}(p_a)\ Q\ u^{(s_a)}(p_a),$$

ou, explicitamente, os elementos de matriz são:

$$\sum_{s_a=1,2} \overline{u}^{(s_a)}(p_a)_i\ Q_{ij}\ u^{(s_a)}(p_a)_j = Q_{ij} \left\{ \sum_{s_a=1,2} u^{(s_a)}(p_a)\overline{u}^{(s_a)}(p_a) \right\}_{ji} =$$

$$= Q_{ij}(\not{p}_a + m_a c)_{ji} = Tr[Q(\not{p}_a + m_a c)],$$

onde $Tr(A) = \sum_i A_{ii}$.

O truque de Casimir e os teoremas de traços - Exemplos

- Conclusão:

$$\sum_{\text{todos spins}} G = [\overline{u}(a)\Gamma_1 u(b)][\overline{u}(a)\Gamma_2 u(b)]^* = Tr[\Gamma_1(\not{p}_b + m_b c)\overline{\Gamma}_2(\not{p}_a + m_a c)],$$

que é uma expressão algébrica (sem spinores). Este é o *truque de Casimir*.

  - Obs.: trocando-se $u \to v$, o sinal da massa muda também: $(\not{p} - mc)$.

5. Espalhamento elétron-múon:

Neste caso: $\Gamma_2 = \gamma^\nu \Rightarrow \overline{\Gamma}_2 = \gamma^0 \gamma^{\nu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\nu$ (Probl. 7.26).

Aplicando-se o truque de Casimir:

$$< |\mathcal{M}|^2 >= \frac{g_e^4}{4(p_1 - p_3)^4} Tr[\gamma^\mu(\not{p}_1 + mc)\gamma^\nu(\not{p}_3 + mc)] \times Tr[\gamma_\mu(\not{p}_2 + Mc)\gamma_\nu(\not{p}_4 + Mc)],$$

onde m é a massa do elétron, M é a massa do múon e o fator 4 do denominador é resultado da média.

O truque de Casimir e os teoremas de traços

- Os teoremas de traços (Probls. 7.29 - 7.32):

  Dadas as matrizes A e B e o escalar α:

  1. $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$
  2. $Tr(\alpha A) = \alpha Tr(A)$
  3. $Tr(AB) = Tr(BA)$

  $\Rightarrow \quad Tr(ABC) = Tr(CAB) = Tr(BCA) \quad \neq \quad Tr(ACB) = Tr(BAC) = Tr(CBA)$

  4. $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4$
  5. $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$ — 5′. $\not{a}\not{b} + \not{b}\not{a} = 2a \cdot b$
  6. $\gamma_\mu \gamma^\mu = 4$
  7. $\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = -2\gamma^\nu$ — 7′. $\gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu = -2\not{a}$
  8. $\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\mu = 4g^{\nu\lambda}$ — 8′. $\gamma_\mu \not{a}\not{b} \gamma^\mu = 4a \cdot b$
  9. $\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\lambda \gamma^\nu$ — 9′. $\gamma_\mu \not{a}\not{b}\not{c} \gamma^\mu = -2\not{c}\not{b}\not{a}$
  10. o traço do produto de um número ímpar de matrizes gama é zero

  $\Rightarrow \quad Tr(\gamma^5 \gamma^\mu) = Tr(i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^\mu) = 0 \qquad Tr(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda) = 0$

O truque de Casimir e os teoremas de traços

- Os teoremas de traços (Probls. 7.29 - 7.32):

Dadas as matrizes A e B e o escalar α:

11. $Tr(1) = 4$
12. $Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$ — 12′. $Tr(\not a \not b) = 4a \cdot b$
13. $Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda})$ — 13′. $Tr(\not a \not b \not c \not d) = 4(a \cdot b\, c \cdot d - a \cdot c\, b \cdot d + a \cdot d\, b \cdot c)$
14. $Tr(\gamma^5) = 0$
15. $Tr(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu) = 0$ — 15′. $Tr(\gamma^5 \not a \not b) = 0$
16. $Tr(\gamma^5\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma) = 4i\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$ — 15′. $Tr(\gamma^5 \not a \not b \not c \not d) = 4i\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} a_\mu b_\nu c_\lambda d_\sigma$,

onde

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} = \begin{cases} -1 & \text{, se } \mu\nu\lambda\sigma \text{ estão em permutações pares de 0123;} \\ +1 & \text{, se } \mu\nu\lambda\sigma \text{ estão em permutações ímpares de 0123;} \\ 0 & \text{, para 2 índices iguais.} \end{cases}$$

O truque de Casimir e os teoremas de traços - Exemplos

6. Avalie o espalhamento elétron-múon:

Partindo de:

$$Tr[\gamma^\mu(\not{p}_1 + mc)\gamma^\nu(\not{p}_3 + mc)] =$$

$$Tr(\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_3) + mc\cancel{[Tr(\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu) + Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \not{p}_3)]} + (mc)^2\, Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu),$$

onde, pela regra 10, o termo entre colchetes é zero.
O primeiro termo vem da regra 13:

$$\begin{aligned} Tr(\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_3) &= (p_1)_\lambda (p_3)_\sigma\, Tr(\gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\sigma) = \\ &= (p_1)_\lambda (p_3)_\sigma 4(g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\lambda\nu}) = \\ &= 4(p_1^\mu p_3^\nu - g^{\mu\nu}(p_1 \cdot p_3) + p_3^\mu p_1^\nu) \end{aligned}$$

O último termo vem da regra 12: $Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$.

$$\Rightarrow Tr[\gamma^\mu(\not{p}_1 + mc)\gamma^\nu(\not{p}_3 + mc)] = 4\{p_1^\mu p_3^\nu + p_3^\mu p_1^\nu + g^{\mu\nu}[(mc)^2 - (p_1 \cdot p_3)]\}$$

O segundo traço é análogo trocando-se: $m \to M, 1 \to 2, 3 \to 4$ e abaixando-se os índices:

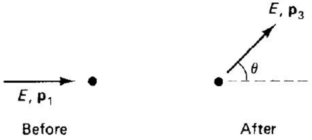
$$< |\mathcal{M}|^2 >= \frac{4g_e^4}{(p_1 - p_3)^4}\{p_1^\mu p_3^\nu + p_3^\mu p_1^\nu + g^{\mu\nu}[(mc)^2 - (p_1 \cdot p_3)]\}\times$$

$$\times\{p_{2\mu} p_{4\nu} + p_{4\mu} p_{2\nu} + g_{\mu\nu}[(Mc)^2 - (p_2 \cdot p_4)]\} =$$

$$= \frac{8g_e^4}{(p_1 - p_3)^4}[(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) - (p_1 \cdot p_3)(Mc)^2 - (p_2 \cdot p_4)(mc)^2 + 2(mMc^2)^2].$$

Seções de choque e tempos de vida - Exemplos

- Retornemos aos cálculos de seções de choque e tempos de vida:
  7. Espalhamentos Mott e Rutherford
     Um elétron de massa m espalha por um múon $M >> m$. Calcule a seção de choque diferencial no referencial do laboratório (despreze o recuo do múon).



Lembrando (6.8):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar}{8\pi Mc}\right)^2 < |\mathcal{M}|^2 >$$

Para um alvo estacionário:

$$p_1 = (E/c, \vec{p}_1), \quad p_2 = (Mc, \vec{0}), \quad p_3 = (E/c, \vec{p}_3), \quad p_4 = (Mc, \vec{0}),$$

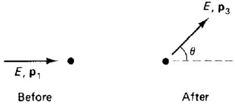
onde supomos que $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_3| = |\vec{p}|$. O ângulo θ entre eles é tal que:

$$\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3 = \vec{p}^2 \cos\theta \Rightarrow$$

$$(p_1 - p_3)^2 = -(\vec{p}_1 - \vec{p}_3)^2 = -\vec{p}_1^2 - \vec{p}_3^2 + 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3 = -2\vec{p}^2(1 - \cos\theta) = -4\vec{p}^2 \sin^2\frac{\theta}{2}$$

Seções de choque e tempos de vida - Exemplos

7. Espalhamentos Mott e Rutherford
Um elétron de massa m espalha por um múon $M >> m$. Calcule a seção de choque diferencial no referencial do laboratório (despreze o recuo do múon).



$$(p_1 \cdot p_3) = \frac{E^2}{c^2} - (\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3) = \vec{p}_1^2 + m^2c^2 - \vec{p}^2 \cos\theta = m^2c^2 + 2\vec{p}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) = (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) = (ME)^2, \qquad (p_2 \cdot p_4) = (Mc)^2$$

$$\Rightarrow < |\mathcal{M}|^2 >= \left(\frac{g_e^2 Mc}{\vec{p}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2 \left[(mc)^2 + \vec{p}^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha\hbar}{2\vec{p}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2 \left[(mc)^2 + \vec{p}^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]},$$

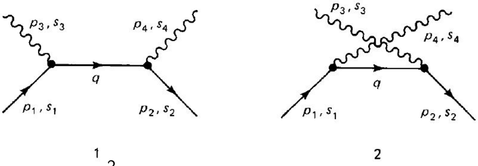
que é a fórmula de Mott. Se o elétron for não relativístico ($\vec{p}^2 << (mc)^2$):

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{2mv^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2},$$

que é a fórmula de Rutherford.

Seções de choque e tempos de vida - Exemplos

8. Aniquilação de pares
Compute a amplitude $\mathcal{M}$ para $e^+ + e^- \to \gamma + \gamma$, assumindo o elétron e o pósitron em reposuso e a configuração de spin singleto.



Lembrando que:

$$\mathcal{M}_1 = \frac{g_e^2}{(p_1 - p_3)^2 - m^2c^2}[\overline{v}(2)\not{\epsilon}_4(\not{p}_1 - \not{p}_3 + mc)\not{\epsilon}_3 u(1)],$$

$$\mathcal{M}_2 = \frac{g_e^2}{(p_1 - p_4)^2 - m^2c^2}[\overline{v}(2)\not{\epsilon}_3(\not{p}_1 - \not{p}_4 + mc)\not{\epsilon}_4 u(1)],$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2.$$

No CM, com os 2 elétrons em repouso e alinhando-se o eixo z ao longo dos fótons:

$$p_1 = mc(1, 0, 0, 0), \quad p_2 = mc(1, 0, 0, 0),$$

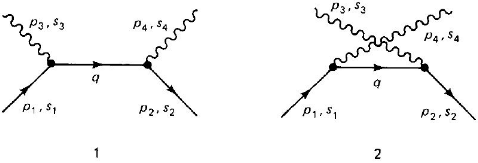
$$p_3 = mc(1, 0, 0, 1), \quad p_4 = mc(1, 0, 0, -1).$$

Assim, temos:

$$(p_1 - p_3)^2 - m^2c^2 = (p_1 - p_4)^2 - m^2c^2 = -2(mc)^2$$

Seções de choque e tempos de vida - Exemplos

8. Aniquilação de pares
Compute a amplitude $\mathcal{M}$ para $e^+ + e^- \to \gamma + \gamma$, assumindo o elétron e o pósitron em reposuso e a configuração de spin singleto.



Da regra 5' e aplicando-se os calibres (de Coulomb e Lorenz, respectivamente):

$$\not{p}_1 \not{\epsilon}_3 = -\not{\epsilon}_3 \not{p}_1 + 2\cancel{(p_1 \cdot \epsilon_3)} = -\not{\epsilon}_3 \not{p}_1$$

$$\not{p}_3 \not{\epsilon}_3 = -\not{\epsilon}_3 \not{p}_3 + 2\cancel{(p_3 \cdot \epsilon_3)} = -\not{\epsilon}_3 \not{p}_3$$

Então:

$$(\not{p}_1 - \not{p}_3 + mc)\not{\epsilon}_3 u(1) = \not{\epsilon}_3(-\not{p}_1 + \not{p}_3 + mc)u(1),$$

mas $(\not{p}_1 - mc)u(1) = 0$, pois $u(1)$ satisfaz à equação de Dirac, então:

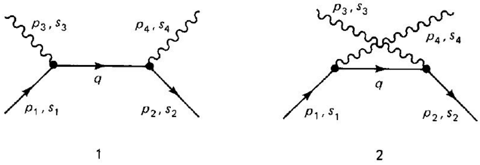
$$(\not{p}_1 - \not{p}_3 + mc)\not{\epsilon}_3 u(1) = \not{\epsilon}_3 \not{p}_3 u(1)$$

e, analogamente:

$$(\not{p}_1 - \not{p}_4 + mc)\not{\epsilon}_4 u(1) = \not{\epsilon}_4 \not{p}_4 u(1)$$

Seções de choque e tempos de vida - Exemplos

8. Aniquilação de pares
Compute a amplitude $\mathcal{M}$ para $e^+ + e^- \to \gamma + \gamma$, assumindo o elétron e o pósitron em reposuso e a configuração de spin singleto.



Juntando tudo:

$$\mathcal{M} = \frac{g_e^2}{2(mc)^2}\bar{v}(2)[\not{\epsilon}_4\not{\epsilon}_3\not{p}_3 + \not{\epsilon}_3\not{\epsilon}_4\not{p}_4]u(1),$$

mas

$$\not{p}_3 = mc(\gamma^0 - \gamma^3), \quad \not{p}_4 = mc(\gamma^0 + \gamma^3) \Rightarrow$$

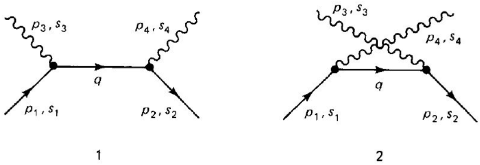
$$\Rightarrow \mathcal{M} = \frac{g_e^2}{2(mc)^2}\bar{v}(2)mc[(\not{\epsilon}_4\not{\epsilon}_3 + \not{\epsilon}_3\not{\epsilon}_4)\gamma^0 - (\not{\epsilon}_4\not{\epsilon}_3 - \not{\epsilon}_3\not{\epsilon}_4)\gamma^3]u(1).$$

Ademais:

$$\not{\epsilon} = -\vec{\epsilon}\cdot\vec{\gamma} = -\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}\cdot\vec{\epsilon} \\ -\vec{\sigma}\cdot\vec{\epsilon} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \not{\epsilon}_3\not{\epsilon}_4 = -\begin{pmatrix} (\vec{\sigma}\cdot\vec{\epsilon}_3)(\vec{\sigma}\cdot\vec{\epsilon}_4) & 0 \\ 0 & (\vec{\sigma}\cdot\vec{\epsilon}_3)(\vec{\sigma}\cdot\vec{\epsilon}_4) \end{pmatrix}$$

Seções de choque e tempos de vida - Exemplos

8. Aniquilação de pares
   Compute a amplitude $\mathcal{M}$ para $e^+ + e^- \to \gamma + \gamma$, assumindo o elétron e o pósitron em reposuso e a configuração de spin singleto.



Agora (probl. 4.20):

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i\sigma \cdot (\vec{a} \times \vec{b}),$$

de onde:

$$\not{\epsilon}_4 \not{\epsilon}_3 \not{p}_3 + \not{\epsilon}_3 \not{\epsilon}_4 \not{p}_4 = -2\vec{\epsilon_3} \cdot \vec{\epsilon_4}$$
$$\not{\epsilon}_4 \not{\epsilon}_3 \not{p}_3 - \not{\epsilon}_3 \not{\epsilon}_4 \not{p}_4 = 2i(\vec{\epsilon_3} \times \vec{\epsilon_4}) \cdot \vec{\Sigma},$$

onde:

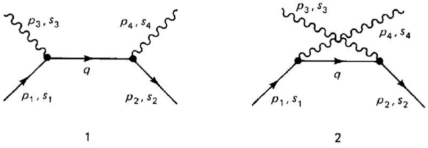
$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}.$$

Portanto:

$$\mathcal{M} = \frac{g_e^2}{(mc)} \overline{v}(2)[\vec{\epsilon_3} \cdot \vec{\epsilon_4} \gamma^0 + i(\vec{\epsilon_3} \times \vec{\epsilon_4}) \cdot \vec{\Sigma}\gamma^3]u(1).$$

Seções de choque e tempos de vida - Exemplos

8. Aniquilação de pares
Compute a amplitude $\mathcal{M}$ para $e^+ + e^- \to \gamma + \gamma$, assumindo o elétron e o pósitron em reposuso e a configuração de spin singleto.



E quanto aos spins?
Para o estado singleto:

$$(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)/\sqrt{2}$$

Então, vamos escrever:

$$\mathcal{M}_{singleto} = (\mathcal{M}_{\uparrow\downarrow} - \mathcal{M}_{\downarrow\uparrow})/\sqrt{2}.$$

Tomemos, inicialmente, $M_{\uparrow\downarrow}$, com elétron de spin para cima: $u(1) = \sqrt{2mc}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

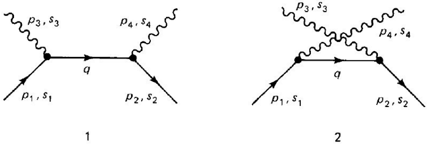
e pósitron de spin para baixo: $\overline{v}(2) = \sqrt{2mc}\,(0\;0\;1\;0)$.

Com estes spinores, temos: $\overline{v}(2)\gamma^0 u(1) = 0, \quad \overline{v}(2)\vec{\Sigma}\gamma^3 u(1) = -2mc\hat{z}$, então:

$$M_{\uparrow\downarrow} = -2ig_e^2(\vec{\epsilon_3} \times \vec{\epsilon_4})_z$$

Seções de choque e tempos de vida - Exemplos

8. Aniquilação de pares
   Compute a amplitude $\mathcal{M}$ para $e^+ + e^- \to \gamma + \gamma$, assumindo o elétron e o pósitron em reposuso e a configuração de spin singleto.



Agora, $M_{\downarrow\uparrow}$, com elétron de spin para baixo e pósitron de spin para cima é:

$$u(1) = \sqrt{2mc}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \overline{v}(2) = \sqrt{2mc}\,(0\;0\;0\;1).$$

Com estes spinores, temos:

$$M_{\downarrow\uparrow} = 2ig_e^2(\vec{\epsilon_3}\times\vec{\epsilon_4})_z = -M_{\uparrow\downarrow} \Rightarrow$$

$$\mathcal{M}_{singleto} = (\mathcal{M}_{\uparrow\downarrow} - \mathcal{M}_{\downarrow\uparrow})/\sqrt{2} = -2\sqrt{2}ig_e^2(\vec{\epsilon_3}\times\vec{\epsilon_4})_z.$$

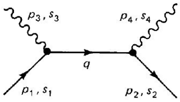
Note que para o tripleto:

$$\mathcal{M}_{tripleto} = (\mathcal{M}_{\uparrow\downarrow} + \mathcal{M}_{\downarrow\uparrow})/\sqrt{2} = 0,$$

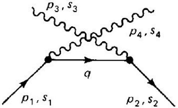
confirmando que para esta combinação, o decaimento em 2 fótons é proibido.

Seções de choque e tempos de vida - Exemplos

8. Aniquilação de pares
   Compute a amplitude $\mathcal{M}$ para $e^+ + e^- \to \gamma + \gamma$, assumindo o elétron e o pósitron em reposuso e a configuração de spin singleto.



1



2

E quanto aos fótons (polarização)?
Para os fótons com spin para cima ($m_s = +1$), ou para baixo ($m_s = -1$), respectivamente:

$$\epsilon_\uparrow = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1, i, 0), \quad \epsilon_\downarrow = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i, 0)$$

Como o momento angular total deve ser zero, os fótons alinham-se (no eixo z) com spins opostos:

$$\uparrow\downarrow = \epsilon_\uparrow \epsilon_\downarrow = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1, i, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i, 0) \Rightarrow \vec{\epsilon_3} \times \vec{\epsilon_4} = i\hat{k},$$

ou:

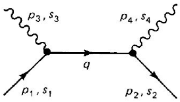
$$\downarrow\uparrow = \epsilon_\downarrow \epsilon_\uparrow = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i, 0), -\frac{1}{\sqrt{2}}(1, i, 0) \Rightarrow \vec{\epsilon_3} \times \vec{\epsilon_4} = -i\hat{k},$$

de onde concluimos:

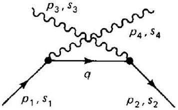
$$\mathcal{M}_{singleto} = (\mathcal{M}_{\uparrow\downarrow} - \mathcal{M}_{\downarrow\uparrow})/\sqrt{2} = -4g_e^2.$$

Seções de choque e tempos de vida - Exemplos

8. Aniquilação de pares
   Compute a amplitude $\mathcal{M}$ para $e^+ + e^- \to \gamma + \gamma$, assumindo o elétron e o pósitron em reposuso e a configuração de spin singleto.



1



2

E agora?
Retornando à fórmula da seção de choque:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi(E_1+E_2)}\right)^2 \frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|}|\mathcal{M}|^2,$$

onde $E_1 = E_2 = mc^2$, $|\vec{p}_f| = mc$ e para uma colisão não relativística: $|\vec{p}_i| = mv$.

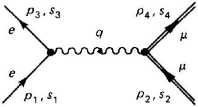
$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi(2mc^2)}\right)^2 \left(\frac{mc}{mv}\right) |-4(4\pi\alpha)|^2 = \frac{1}{cv}\left(\frac{\hbar\alpha}{m}\right)^2 \Rightarrow \sigma = \frac{4\pi}{cv}\left(\frac{\hbar\alpha}{m}\right)^2.$$

E o tempo de vida do positrônio pode agora ser calculado de:

$$\Gamma = \sigma v|\psi(0)|^2 \Rightarrow \boxed{\Gamma = \frac{4\pi}{c}\left(\frac{\hbar\alpha}{m}\right)^2 |\psi(0)|^2},$$

onde $|\psi(0)|^2$ representa a densidade eletrônica.

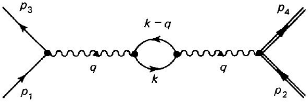
Renormalização



- Vimos o cálculo do espalhamento elétron-múon, com a amplitude:

$$\mathcal{M} = -g_e^2[\overline{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)]\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}[\overline{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2)], \quad \text{com } q = p_1 - p_3.$$

Há vários diagramas de ordem superior, mas talvez um dos mais interessantes seja o de "polarização do vácuo" (*loop*):

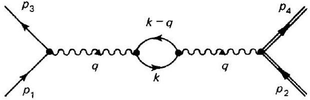


,

cuja amplitude (probl. 7.38) é:

$$\mathcal{M} = \frac{-ig_e^4}{q^2}[\overline{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)]\left\{\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{Tr[\gamma_\mu(\not{k}+mc)\gamma_\nu(\not{q}-\not{k}+mc)]}{(k^2-m^2c^2)((q-k)^2-m^2c^2)}\right\}[\overline{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2)].$$

Renormalização



,

Sua introdução leva a uma modificação no propagador do fóton:

$$\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \to \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} - \frac{i}{q^4} I_{\mu\nu},$$

onde:

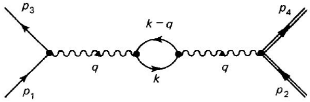
$$I_{\mu\nu} = -g_e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{Tr[\gamma_\mu(\not{k} + mc)\gamma_\nu(\not{q} - \not{k} + mc)]}{(k^2 - m^2c^2)((q-k)^2 - m^2c^2)}.$$

Entretanto, esta integral é divergente:

$$\int |k|^3 d|k| \frac{|k|^2}{|k|^4} = \int |k| d|k| = |k|^2 \to \infty, \quad \text{para } |k| \to \infty.$$

Nossa estratégia será absorver a divergência em massas e constantes de acoplamento "*renormalizáveis*".

Renormalização



,

Seja:

$$I_{\mu\nu} = -ig_{\mu\nu} q^2 I(q^2) + q_\mu q_\nu J(q^2).$$

O segundo termo não contribui, pois da contração $q_\mu \gamma^\mu$:

$$[\overline{u}(p_3)\not{q}u(p_1)] = \overline{u}(p_3)(\not{p}_1 - \not{p}_3)u(p_1) = \overline{u}(p_3)\{\not{p}_1 u(p_1)\} - \{\overline{u}(p_3)\not{p}_3\}u(p_1) =$$
$$= \overline{u}(p_3)\{mc\, u(p_1)\} - \{\overline{u}(p_3)\, mc\}u(p_1) = 0.$$

O primeiro termo fica (probl. 7.39):

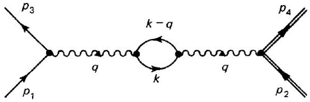
$$I(q^2) = \frac{g_e^2}{12\pi^2}\left\{\int_{m^2}^{\infty}\frac{dx}{x} - 6\int_0^1 z(1-z)\ln\left(1 - \frac{q^2}{m^2c^2}z(1-z)\right)dz\right\}.$$

Vamos impor um corte no limite superior da primeira integral:

$$\int_{m^2}^{\infty}\frac{dx}{x} \to \int_{m^2}^{M^2}\frac{dx}{x} = \ln\frac{M^2}{m^2},$$

onde M **não é** a massa do múon.

Renormalização

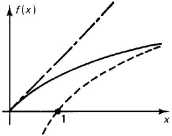


,

A segunda integral é:

$$f(x) \equiv 6 \int_0^1 z(1-z) \ln[1 + xz(1-z)] dz, \quad \text{onde } x \equiv \frac{-q^2}{m^2 c^2}.$$

O seu resultado pode ser aproximado para x pequenos e grandes:



$$f(x) \approx \begin{cases} x/5, & x \ll 1 \\ \ln x, & x \gg 1 \end{cases}$$

Então:

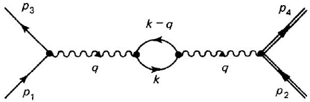
$$I(q^2) = \frac{g_e^2}{12\pi^2} \left\{ \ln\left(\frac{M^2}{m^2}\right) - f\left(\frac{-q^2}{m^2c^2}\right) \right\}.$$

Se o 3-momento do elétron no CM é $\vec{p}$ e o ângulo de espalhamento é θ (probl. 7.40):

$$q^2 = -4\vec{p}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \Rightarrow \frac{-q^2}{m^2c^2} \sim \frac{v^2}{c^2}$$

e os casos limites de $f(x)$ são os limites não relativístico e ultrarrelativístico, respectivamente.

Renormalização



,

Então:

$$\mathcal{M} = -g_e^2[\overline{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)]\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\left\{1 - \frac{g_e^2}{12\pi^2}\left[\ln\left(\frac{M^2}{m^2}\right) - f\left(\frac{-q^2}{m^2c^2}\right)\right]\right\}[\overline{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2)].$$

[Passo crítico] redefine-se a constante de acoplamento:

$$g_R \equiv g_e\sqrt{1 - \frac{g_e^2}{12\pi^2}\ln\left(\frac{M^2}{m^2}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = -g_R^2[\overline{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)]\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\left\{1 + \frac{g_R^2}{12\pi^2}f\left(\frac{-q^2}{m^2c^2}\right)\right\}[\overline{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2)]}.$$

- Os infinitos se foram com $g_e \to g_R$;
- Fica o termo finito e agora $g_R = g_R(q^2)$ ("constante corrente"):

$$g_R(q^2) = g_R^2(0)\sqrt{1 - \frac{g_R^2(0)}{12\pi^2}f\left(\frac{-q^2}{m^2c^2}\right)}.$$

Renormalização

Outros casos que demandam renormalização são: