

# Cromodinâmica quântica

## Física de Partículas Elementares - I

Prof. Marcelo A. Leigui de Oliveira

Centro de Ciências Naturais e Humanas  
Universidade Federal do ABC  
Av. dos Estados, 5001  
09210-580 Santo André-SP

13 de abril de 2023



Universidade Federal do ABC

# Regras de Feynman para a cromodinâmica

- Veremos as regras de Feynman para a cromodinâmica quântica (QCD) e como são descritas as partículas coloridas;
- As interações eletromagnéticas são mediadas na eletrodinâmica por fótons, com intensidade dada pela constante de acoplamento:

$$g_e = \sqrt{4\pi\alpha},$$

enquanto que as interações fortes são mediadas na cromodinâmica por glúons, com intensidade dada pela constante de acoplamento forte:

$$g_s = \sqrt{4\pi\alpha_s},$$

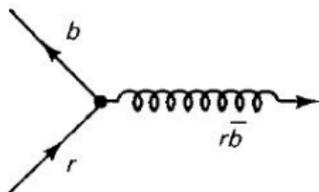
que pode ser pensada como a unidade fundamental de cor;

- Os quarks vêm em 3 cores: vermelha ( $r$ ), azul ( $b$ ) e verde ( $g$ ). Então, a especificação do estado de um quark exige, além do spinor de Dirac  $u^{(s)}(p)$ , vetores colunas de 3 elementos:

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ para o vermelho, } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ para o azul, } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ para o verde.}$$

# Regras de Feynman para a cromodinâmica

- Tipicamente, a cor do quark muda no vértice quark-glúon:



- ▶ o quark muda de vermelho ( $r$ ) para azul ( $b$ ) e o glúon leva a cor vermelha+antiazul ( $r\bar{b}$ ).

Cada glúon porta uma cor e uma anticor. Em princípio, são 9 glúons possíveis:  $r\bar{r}$ ,  $r\bar{b}$ ,  $r\bar{g}$ ,  $b\bar{r}$ ,  $b\bar{b}$ ,  $b\bar{g}$ ,  $g\bar{r}$ ,  $g\bar{b}$ ,  $g\bar{g}$ , mas na simetria SU(3) de cores, há um octeto de cores:

$$\begin{array}{ll}
 |1\rangle = (r\bar{b} + b\bar{r})/\sqrt{2} & |5\rangle = -i(r\bar{g} - g\bar{r})/\sqrt{2} \\
 |2\rangle = -i(r\bar{b} - b\bar{r})/\sqrt{2} & |6\rangle = (b\bar{g} + g\bar{b})/\sqrt{2} \\
 |3\rangle = (r\bar{r} - b\bar{b})/\sqrt{2} & |7\rangle = -i(b\bar{g} - g\bar{b})/\sqrt{2} \\
 |4\rangle = (r\bar{g} + g\bar{r})/\sqrt{2} & |8\rangle = (r\bar{r} + b\bar{b} - 2g\bar{g})/\sqrt{6}
 \end{array}$$

e um singleto de cores:

$$|9\rangle = (r\bar{r} + b\bar{b} + g\bar{g})/\sqrt{3}.$$

- ▶ Obs.: o nono glúon poderia ser o fóton (vide <sup>†</sup> e o probl. 9.1) e, se ocorresse, daria origem a uma interação forte de alcance infinito (vide \*).

# Regras de Feynman para a cromodinâmica

- Glúons são partículas sem massa de spin 1, como o fóton. Portanto, são representados da mesma forma, por um vetor de polarização  $\epsilon^\mu$  ortogonal ao momento  $p^\mu$  (condição de Lorenz):

$$\epsilon^\mu p_\mu = 0.$$

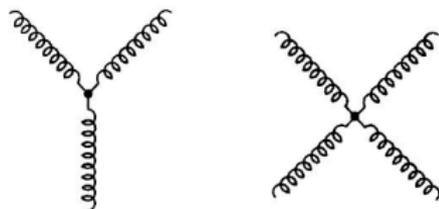
Adotando o calibre de Coulomb:

$$\epsilon^0 = 0, \text{ tal que: } \vec{\epsilon} \cdot \vec{p} = 0.$$

Para descrever o estado de cor, precisamos de vetores colunas de 8 elementos:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ para } |1\rangle, \dots \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ para } |7\rangle, \dots \quad (1)$$

- Como os glúons carregam cor (ao contrário do fóton que é neutro), eles acoplam-se entre si:



# Regras de Feynman para a cromodinâmica

- Introduzimos as *matrizes- $\lambda$*  de Gell-Mann:

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

que são para SU(3) o que as matrizes de Pauli são para SU(2).

- E seus comutadores:

$$[\lambda^\alpha, \lambda^\beta] = 2if^{\alpha\beta\gamma}\lambda^\gamma,$$

onde  $f^{\alpha\beta\gamma}$  são as “*constantes de estrutura*” e a soma sobre índices repetidos está implícita (de 1 a 8, portanto, são  $8^3 = 512$  constantes!).

Elas são antissimétricas:  $f^{\beta\alpha\gamma} = f^{\alpha\gamma\beta} = -f^{\alpha\beta\gamma}$  e muitas são zero.

As restantes podem ser obtidas da antissimetria a partir de:

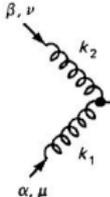
$$f^{123} = 1, \quad f^{147} = f^{246} = f^{257} = f^{345} = f^{516} = f^{637} = \frac{1}{2}, \quad f^{458} = f^{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

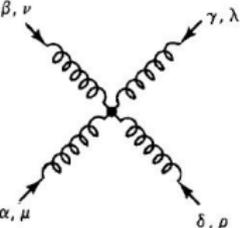


# Regras de Feynman para a cromodinâmica

- 3 Vértices: cada vértice introduz um fator:

Quark-gluon (  ):  $\frac{-ig_s}{2} \lambda^a \gamma^\mu$

Three gluon (  ): 
$$-g_s f^{\alpha\beta\gamma} [g_{\mu\nu}(k_1 - k_2)_\lambda + g_{\nu\lambda}(k_2 - k_3)_\mu + g_{\lambda\mu}(k_3 - k_1)_\nu]$$

Four gluon (  ): 
$$-ig_s^2 [f^{\alpha\beta\eta} f^{\gamma\delta\eta} (g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda}) + f^{\alpha\delta\eta} f^{\beta\gamma\eta} (g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho}) + f^{\alpha\gamma\eta} f^{\delta\beta\eta} (g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} - g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho})]$$

- 4 Seguem-se as outras regras, analogamente.

# A interação quark-quark

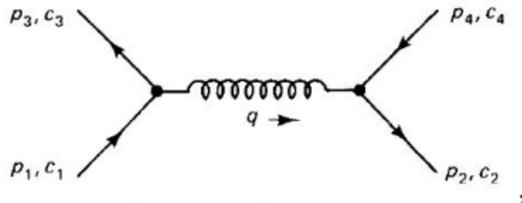
- Vamos estudar as interações  $qq$  e  $q\bar{q}$ , mas como não podemos acessar diretamente essas interações em laboratório, não serão obtidas as seções de choque, concentraremos em *potenciais efetivos* entre quarks;
- Lembre-se que é uma teoria de perturbação, válida para pequenos valores de  $\alpha_s$ . Não vai ser possível obter o termo de confinamento — para isto, confiamos na liberdade assintótica;
- Resultado sugestivo:
  - ▶ “*Quarks atraem-se mais intensamente em singletos de cor.*”

Ademais, em outras configurações, eles até se repelem. Em alcances muito curtos, o singleto de cor é canal com “*atratividade máxima*”: indicativo que a ligação é mais provável nesta configuração. No entanto, isto não prova que a ligação *deve* ocorrer no singleto, nem que, em outras configurações, a ligação *não possa* ocorrer;

# A interação quark-quark

Casos:

- ④ **Quark e antiquark:** Seja a interação entre quarks de diferentes sabores. A de menor ordem é dada pelo diagrama:



representando, p.ex.:

$$u + \bar{d} \rightarrow u + \bar{d},$$

cujas amplitude é:

$$-i\mathcal{M} = [\bar{u}(3)c_3^\dagger] \left[ -i\frac{g_s}{2} \lambda^\alpha \gamma^\mu \right] [u(1)c_1] \left[ -i\frac{g_{\mu\nu} \delta^{\alpha\beta}}{q^2} \right] [\bar{v}(2)c_2^\dagger] \left[ -i\frac{g_s}{2} \lambda^\beta \gamma^\nu \right] [v(4)c_4]$$

$$\Rightarrow \mathcal{M} = -\frac{g_s^2}{4} \frac{1}{q^2} [\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)][\bar{v}(2)\gamma_\mu v(4)](c_3^\dagger \lambda^\alpha c_1)(c_2^\dagger \lambda^\alpha c_4),$$

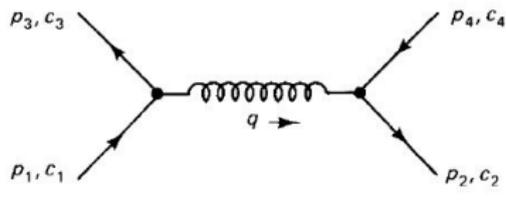
com soma implícita em  $\alpha$ . A fórmula é análoga ao espalhamento  $e^- e^+$ , com  $g_e \rightarrow g_s$  e o “fator de cor”:

$$f = \frac{1}{4} (c_3^\dagger \lambda^\alpha c_1)(c_2^\dagger \lambda^\alpha c_4).$$

O potencial é, então, análogo ao de Coulomb:

$$V_{q\bar{q}}(r) = -f \frac{\alpha_s \hbar c}{r}.$$

# A interação quark-quark - Exemplos



- 4 **Fator de cor na configuração do octeto.** Como vimos, um estado típico do octeto é  $r\bar{b}$  (quark vermelho e antiquark antiazul entrando). Neste caso, tomaremos os mesmos estados de saída, então, a cor é conservada nos vértices. Assim:

$$c_1 = c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_2 = c_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

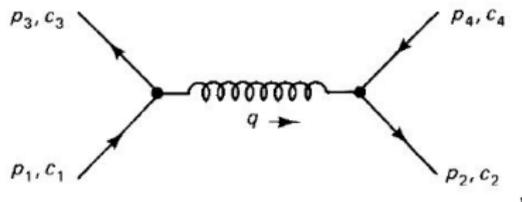
então:

$$f = \frac{1}{4} \left[ (1 \ 0 \ 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left[ (0 \ 1 \ 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{4} \lambda_{11}^\alpha \lambda_{22}^\alpha,$$

com soma implícita em  $\alpha$ . Note que só  $\lambda^3$  e  $\lambda^8$  têm elementos 11 e 22 diferentes de zero:

$$f = \frac{1}{4} (\lambda_{11}^3 \lambda_{22}^3 + \lambda_{11}^8 \lambda_{22}^8) = \frac{1}{4} [(1)(-1) + (1/\sqrt{3})(1/\sqrt{3})] = -\frac{1}{6}$$

# A interação quark-quark - Exemplos



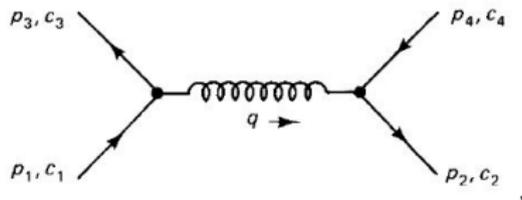
- 2 **Fator de cor na configuração do singlete.** Como vimos, o estado do singlete é:

$$(r\bar{r} + b\bar{b} + g\bar{g})/\sqrt{3}$$

O singlete de cor (como num méson) é a soma de 3 termos:

$$f = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \left[ c_3^\dagger \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left[ (1 \ 0 \ 0) \lambda^\alpha c_4 \right] + \right. \\ \left. + \left[ c_3^\dagger \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left[ (0 \ 1 \ 0) \lambda^\alpha c_4 \right] + \left[ c_3^\dagger \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \left[ (0 \ 0 \ 1) \lambda^\alpha c_4 \right] \right\}$$

# A interação quark-quark - Exemplos



- ② **Fator de cor na configuração do singlete.** Os quarks emergentes são também necessariamente estados singletos e teremos 9 termos, compactados na forma:

$$f = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} (\lambda_{ij}^\alpha \lambda_{ji}^\alpha) = \frac{1}{12} \text{Tr}(\lambda^\alpha \lambda^\alpha),$$

com soma implícita em  $\alpha$ .

Agora (probl. 9.3):

$$\text{Tr}(\lambda^\alpha \lambda^\beta) = 2\delta^{\alpha\beta} \Rightarrow \text{Tr}(\lambda^\alpha \lambda^\alpha) = 16 \Rightarrow f = \frac{4}{3}$$

E os potenciais ficam:

$$V_{q\bar{q}}(r) = -\frac{4}{3} \left( \frac{\alpha_s \hbar c}{r} \right), \text{ para o singlete;}$$

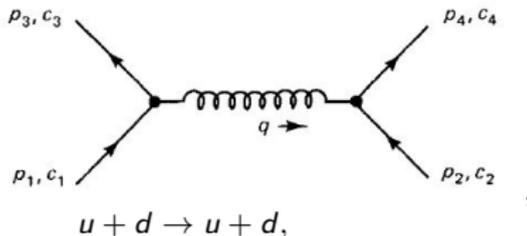
$$V_{q\bar{q}}(r) = \frac{1}{6} \left( \frac{\alpha_s \hbar c}{r} \right), \text{ para o octeto;}$$

ou, potencial *atrativo* ( $V_{q\bar{q}}(r) < 0$ ) para o singlete e *repulsivo* ( $V_{q\bar{q}}(r) > 0$ ) para o octeto.

# A interação quark-quark

Casos:

- ② **Quark e quark:** Seja a interação entre quarks de diferentes sabores. A de menor ordem é dada pelo diagrama:



representando, p.ex.:

cuja amplitude é:

$$\mathcal{M} = -\frac{g_s^2}{4} \frac{1}{q^2} [\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)][\bar{u}(4)\gamma_\mu u(2)](c_3^\dagger \lambda^\alpha c_1)(c_4^\dagger \lambda^\alpha c_2),$$

que, desta vez, é análoga à do espalhamento elétron-múon com  $g_e \rightarrow g_s$  e o “fator de cor” (que depende da configuração dos quarks):

$$f = \frac{1}{4}(c_3^\dagger \lambda^\alpha c_1)(c_4^\dagger \lambda^\alpha c_2).$$

O potencial é, então, análogo ao de Coulomb:

$$V_{qq}(r) = f \frac{\alpha_s \hbar c}{r}$$

Com 2 quarks, montamos 1 triplete (combinações antissimétricas):

$$(rb - br)/\sqrt{2}, \quad (bg - gb)/\sqrt{2}, \quad (gr - rg)/\sqrt{2}$$

e 1 sexteto (combinações simétricas):

$$rr, \quad bb, \quad gg, \quad (rb + br)/\sqrt{2}, \quad (bg + gb)/\sqrt{2}, \quad (gr + rg)/\sqrt{2}$$

# A interação quark-quark - Exemplos

## 3 Fator de cor na configuração do sexteto.

Tomemos o estado  $rr$ :

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

então:

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{4} \left[ (1 \ 0 \ 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left[ (1 \ 0 \ 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{4} \lambda_{11}^\alpha \lambda_{11}^\alpha = \\ &= \frac{1}{4} [\lambda_{11}^3 \lambda_{11}^3 + \lambda_{11}^8 \lambda_{11}^8] = \frac{1}{4} [(1)(1) + (1/\sqrt{3})(1/\sqrt{3})] = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

# A interação quark-quark - Exemplos

## ● Fator de cor na configuração do tripleto.

Tomemos o estado  $(rb - br)/\sqrt{2}$ :

$$\begin{aligned}
 f &= \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left[ (1 \ 0 \ 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left[ (0 \ 1 \ 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \right. \\
 &- \left[ (0 \ 1 \ 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left[ (1 \ 0 \ 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] - \left[ (1 \ 0 \ 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left[ (0 \ 1 \ 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \\
 &\left. + \left[ (0 \ 1 \ 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left[ (1 \ 0 \ 0) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right\} = \\
 &= \frac{1}{8} \{ \lambda_{11}^\alpha \lambda_{22}^\alpha - \lambda_{21}^\alpha \lambda_{12}^\alpha - \lambda_{12}^\alpha \lambda_{21}^\alpha + \lambda_{22}^\alpha \lambda_{11}^\alpha \} = \frac{1}{4} (\lambda_{11}^\alpha \lambda_{22}^\alpha - \lambda_{12}^\alpha \lambda_{21}^\alpha) = \\
 &= \frac{1}{4} (\lambda_{11}^3 \lambda_{22}^3 + \lambda_{11}^8 \lambda_{22}^8 - \lambda_{12}^1 \lambda_{21}^1 - \lambda_{12}^2 \lambda_{21}^2) = \frac{1}{4} (-1 + \frac{1}{3} - 1 - 1) = -\frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

E os potenciais ficam:

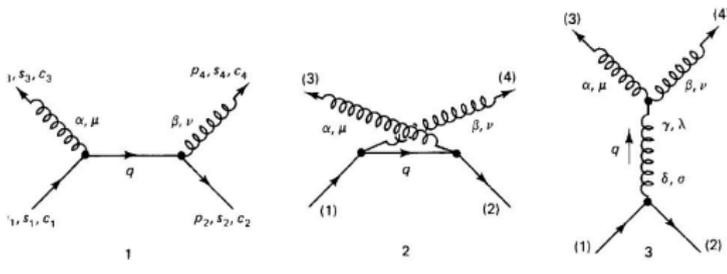
$$V_{qq}(r) = -\frac{2}{3} \left( \frac{\alpha_s \hbar c}{r} \right), \text{ para o tripleto;}$$

$$V_{qq}(r) = \frac{1}{3} \left( \frac{\alpha_s \hbar c}{r} \right), \text{ para o sexteto;}$$

ou, potencial *atractivo* ( $V_{qq}(r) < 0$ ) para o tripleto e *repulsivo* ( $V_{qq}(r) > 0$ ) para o sexteto.

# Aniquilação de pares na QCD

- Estudaremos o processo análogo à aniquilação de pares, na QCD há 3 diagramas:



com amplitude (analogamente ao ex. 7.8) para o processo 1:

$$-i\mathcal{M}_1 = \bar{v}(2)c_2^\dagger \left[ -i\frac{g_s}{2}\lambda^\beta\gamma^\nu \right] [\epsilon_{4\nu}^* a_4^{*\beta}] \left[ \frac{i(\not{q} + mc)}{q^2 - m^2c^2} \right] \left[ -i\frac{g_s}{2}\lambda^\alpha\gamma^\mu \right] [\epsilon_{3\mu}^* a_3^{*\alpha}] u(1)c_1.$$

Agora, de:

$$q = p_1 - p_3 \Rightarrow q^2 - m^2c^2 = p_1^2 - 2p_1 \cdot p_3 + p_3^2 - m^2c^2 = -2p_1 \cdot p_3,$$

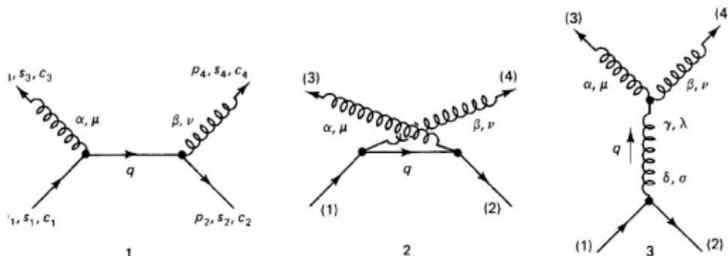
vem:

$$\mathcal{M}_1 = -\frac{g_s^2}{8} \frac{1}{p_1 \cdot p_3} \bar{v}(2)(\gamma^\nu \epsilon_{4\nu}^*) [(\not{q} + mc)] (\gamma^\mu \epsilon_{3\mu}^*) u(1) \times a_3^{*\alpha} a_4^{*\beta} (c_2^\dagger \lambda^\beta \lambda^\alpha c_1) \Rightarrow$$

$$\mathcal{M}_1 = -\frac{g_s^2}{8} \frac{1}{p_1 \cdot p_3} \bar{v}(2) [\not{\epsilon}_4^* (\not{p}_1 - \not{p}_3 + mc) \not{\epsilon}_3^*] u(1) \times a_3^{*\alpha} a_4^{*\beta} (c_2^\dagger \lambda^\beta \lambda^\alpha c_1).$$

# Aniquilação de pares na QCD

- Para a aniquilação de pares, na QCD, há 3 diagramas:



Para o processo 1:

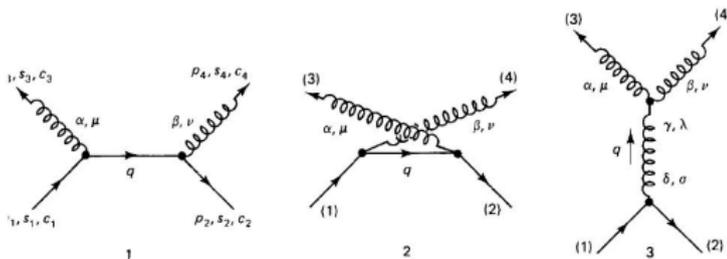
$$\mathcal{M}_1 = -\frac{g_s^2}{8} \frac{1}{p_1 \cdot p_3} \bar{v}(2) [\epsilon_4^* (\not{p}_1 - \not{p}_3 + mc) \epsilon_3^*] u(1) \times a_3^{*\alpha} a_4^{*\beta} (c_2^\dagger \lambda^\beta \lambda^\alpha c_1).$$

Similarmente, para o processo 2:

$$\mathcal{M}_2 = -\frac{g_s^2}{8} \frac{1}{p_1 \cdot p_4} \bar{v}(2) [\epsilon_3 (\not{p}_1 - \not{p}_4 + mc) \epsilon_4] u(1) \times a_3^\alpha a_4^\beta (c_2^\dagger \lambda^\alpha \lambda^\beta c_1).$$

# Aniquilação de pares na QCD

- Para a aniquilação de pares, na QCD, há 3 diagramas:



E para o processo 3:

$$-i\mathcal{M}_3 = \bar{v}(2)c_2^\dagger \left[ -i\frac{g_s}{2}\lambda^\delta\gamma_\sigma \right] u(1)c_1 \left[ -i\frac{g_s\sigma^\lambda\delta\delta^\gamma}{q^2} \right] \cdot \left\{ -g_s f^{\alpha\beta\gamma} [g_{\mu\nu}(-p_3 + p_4)_\lambda + g_{\nu\lambda}(-p_4 - q)_\mu + g_{\lambda\mu}(q + p_3)_\nu] \right\} [\epsilon_3^\mu a_3^\alpha][\epsilon_4^\nu a_4^\beta].$$

Agora, de:

$$q = p_3 + p_4 \Rightarrow q^2 - m^2 c^2 = p_3^2 + 2p_3 \cdot p_4 + p_4^2 - m^2 c^2 = 2p_3 \cdot p_4$$

e usando que  $\epsilon_3 \cdot p_3 = \epsilon_4 \cdot p_4 = 0$ , vem<sup>1</sup>:

$$\mathcal{M}_3 = i\frac{g_s^2}{8} \frac{1}{p_1 \cdot p_4} \bar{v}(2) [(\epsilon_3 \cdot \epsilon_4)(\not{p}_4 - \not{p}_3) + 2(p_3 \cdot \epsilon_4)\not{\epsilon}_3 - 2(p_4 \cdot \epsilon_3)\not{\epsilon}_4] u(1) \times f^{\alpha\beta\gamma} a_3^\alpha a_4^\beta (c_2^\dagger \lambda^\gamma c_1).$$

<sup>1</sup>Correção, 2ª edição.

# Aniquilação de pares na QCD

- Assumindo (como fizemos na QED) que as partículas iniciais estão em repouso:

$$p_1 = p_2 = (mc, \vec{0}), \quad p_3 = (mc, \vec{p}), \quad p_4 = (mc, -\vec{p}) \Rightarrow$$

$$p_1 \cdot p_3 = p_1 \cdot p_4 = (mc)^2, \quad p_1 \cdot p_2 = 2(mc)^2$$

e o calibre de Coulomb, cancelam-se 2 termos:  $p_3 \cdot \epsilon_4 = p_4 \cdot \epsilon_3 = 0$ .

- Usando que  $u(1)$  satisfaz à equação de Dirac e, portanto:

$$(\not{p}_1 - \not{p}_3 + mc)\not{\epsilon}_3 u(1) = \not{\epsilon}_3 \not{p}_3 u(1), \quad (\not{p}_1 - \not{p}_4 + mc)\not{\epsilon}_4 u(1) = \not{\epsilon}_4 \not{p}_4 u(1),$$

simplificando  $\mathcal{M}_1$  e  $\mathcal{M}_2$ .

- De  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_3$ :

$$\mathcal{M} = -\frac{g_s^2}{8(mc)^2} a_3^\alpha a_4^\beta \bar{v}(2) c_2^\dagger \left[ \not{\epsilon}_3 \not{\epsilon}_4 \not{p}_4 \lambda^\alpha \lambda^\beta + \not{\epsilon}_4 \not{\epsilon}_3 \not{p}_3 \lambda^\beta \lambda^\alpha - i(\epsilon_3 \cdot \epsilon_4)(\not{p}_4 - \not{p}_3) f^{\alpha\beta\gamma} \lambda^\gamma \right] c_1 u(1).$$

- Orientando-se o eixo z ao longo de  $\vec{p}$ :

$$\not{p}_3 = mc(\gamma^0 - \gamma^3), \quad \not{p}_4 = mc(\gamma^0 + \gamma^3), \quad \not{p}_4 - \not{p}_3 = 2mc\gamma^3.$$

Além disso, vemos que:

$$\epsilon_3 \epsilon_4 = (\vec{\epsilon}_3 \cdot \vec{\epsilon}_4) - i(\vec{\epsilon}_3 \times \vec{\epsilon}_4) \cdot \vec{\Sigma}, \quad \not{\epsilon}_4 \not{\epsilon}_3 = -(\vec{\epsilon}_3 \cdot \vec{\epsilon}_4) + i(\vec{\epsilon}_3 \times \vec{\epsilon}_4) \cdot \vec{\Sigma}.$$

Assim:

$$\mathcal{M} = \frac{g_s^2}{8mc} a_3^\alpha a_4^\beta \bar{v}(2) c_2^\dagger \left[ (\vec{\epsilon}_3 \cdot \vec{\epsilon}_4) \{ \lambda^\alpha, \lambda^\beta \} \gamma^0 + i(\vec{\epsilon}_3 \times \vec{\epsilon}_4) \cdot \vec{\Sigma} ([\lambda^\alpha, \lambda^\beta] \gamma^0 + \{ \lambda^\alpha, \lambda^\beta \} \gamma^3) \right] c_1 u(1),$$

que reduz-se ao resultado da QED se  $\lambda^\alpha = \lambda^\beta = 1$ ,  $g_s/2 \rightarrow g_e$  e tirarmos todos os estados de cor  $a$  e  $c$ .

# Aniquilação de pares na QCD

- Para os quarks no estado singlete, spin-0 (que pode decair em 2 glúons):

$$\mathcal{M} = (\mathcal{M}_{\uparrow\downarrow} - \mathcal{M}_{\downarrow\uparrow})/\sqrt{2}.$$

Contudo, vimos que:

$$\bar{v}(2)\gamma^0 u(1) = 0, \quad \bar{v}(2)\vec{\Sigma}\gamma^3 u(1) = -2mc\hat{z}$$

e, como antes  $\mathcal{M}_{\uparrow\downarrow} = -\mathcal{M}_{\downarrow\uparrow}$ :

$$\mathcal{M} = -i\sqrt{2}\frac{g_s^2}{4}(\vec{\epsilon}_3 \times \vec{\epsilon}_4)_z a_3^\alpha a_4^\beta (c_2^\dagger \{\lambda^\alpha, \lambda^\beta\} c_1), \quad \text{no singlete.}$$

Novamente, reproduzimos o resultado da QED, com  $g_e \rightarrow g_s$  e com o fator de cor:

$$f = \frac{1}{8} a_3^\alpha a_4^\beta (c_2^\dagger \{\lambda^\alpha, \lambda^\beta\} c_1).$$

Em particular, se os quarks estiverem no estado singlete,  $(r\bar{r} + b\bar{b} + g\bar{g})/\sqrt{3}$ , então:

$$f = \frac{1}{8} a_3^\alpha a_4^\beta \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \begin{aligned} &(1 \quad 0 \quad 0) \{\lambda^\alpha, \lambda^\beta\} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (0 \quad 1 \quad 0) \{\lambda^\alpha, \lambda^\beta\} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &+ (0 \quad 0 \quad 1) \{\lambda^\alpha, \lambda^\beta\} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} = \frac{1}{8\sqrt{3}} a_3^\alpha a_4^\beta (\text{Tr}\{\lambda^\alpha, \lambda^\beta\}) = \frac{1}{8\sqrt{3}} a_3^\alpha a_4^\beta (4\delta^{\alpha\beta}) \Rightarrow$$

$$f = \frac{1}{2\sqrt{3}} a_3^\alpha a_4^\alpha, \quad \text{para o singlete de cor.}$$

# Aniquilação de pares na QCD

- Agora, o estado singlete para 2 glúons (probl. 9.12) é:

$$|\text{singlete}\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}} \sum_{n=1}^8 |n\rangle_1 |n\rangle_2$$

Assim:

$$a_3^\alpha a_4^\alpha = \frac{1}{\sqrt{8}}(8) = 2\sqrt{2} \Rightarrow f = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

- **Conclusão:** Para o processo:

$$q + \bar{q} \rightarrow g + g,$$

no singlete de spin, singlete de cor e com os quarks em repouso, a amplitude é:

$$\mathcal{M} = -4\sqrt{\frac{2}{3}}g_s^2,$$

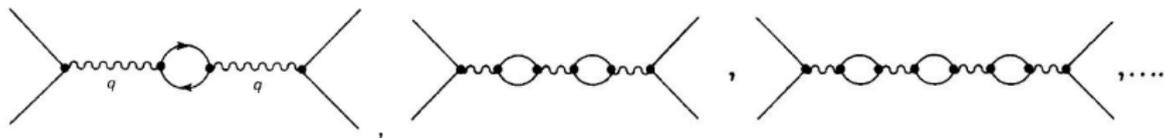
a seção de choque é:

$$\sigma = \frac{2}{3} \frac{4\pi}{cv} \left( \frac{\hbar\alpha_s}{m} \right)^2$$

e a taxa de decaimento:

$$\Gamma = \sigma v |\psi(0)|^2.$$

# Liberdade assintótica



- Na QED, vimos que o diagrama com laços faz a carga efetiva do elétron uma função do momento transferido  $q$ :

$$\alpha(|q^2|) = \alpha(0) \left\{ 1 + \frac{\alpha(0)}{3\pi} \ln(|q^2|/(mc)^2) \right\} \quad (|q^2| = -q^2 \gg (mc)^2);$$

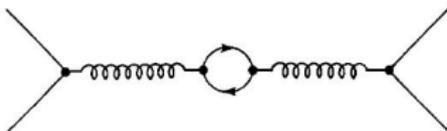
A constante de acoplamento cresce conforme se aproxima da carga, reduzindo-se a blindagem do efeito conhecido como a “*polarização do vácuo*”;

- Adicionando-se diagramas de ordens superiores:

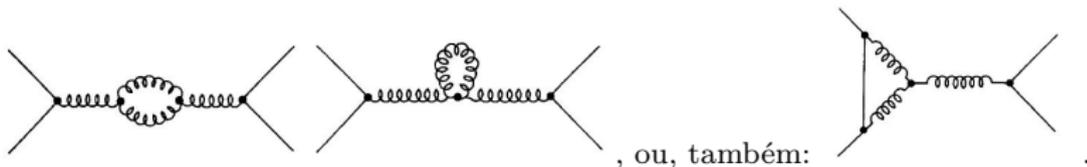
$$\alpha(|q^2|) = \frac{\alpha(0)}{1 - (\alpha(0)/3\pi) \ln(|q^2|/(mc)^2)} \quad (|q^2| \gg (mc)^2),$$

que diverge em  $\ln(|q^2|/(mc)^2) = (3\pi/\alpha(0))$ , isto é, a uma energia de  $10^{280}$  MeV!

# Liberdade assintótica



- Na QCD, ocorre algo bem parecido com bolhas de quark/antiquark, levando a uma blindagem da cor. Entretanto, na QCD surgem também as bolhas de *glúons virtuais*:



Nestes casos, o efeito é de *antibindagem*.

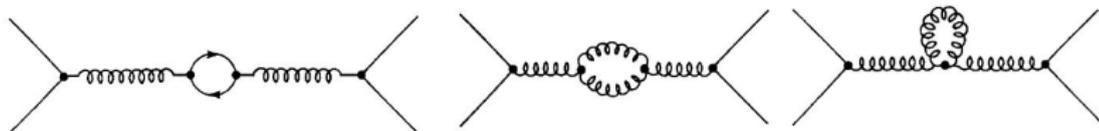
- Mas a fórmula da constantes de acoplamento forte acaba sendo parecida:

$$\alpha_s(|q^2|) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 - (\alpha_s(\mu^2)/12\pi)(11n - 2f) \ln(|q^2|/\mu^2)} \quad (|q^2| \gg \mu^2),$$

onde  $n(= 3)$  é o número de cores e  $f(= 6)$  é o número de sabores (no MP);

- Numa teoria em que  $11n > 2f$ , a antibindagem domina e a constante de acoplamento *diminui* com  $|q^2|$ , a força forte fica fraca a pequenas distâncias: “*liberdade assintótica*”.

# Liberdade assintótica



- Note que em:

$$\alpha_s(|q^2|) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 - (\alpha_s(\mu^2)/12\pi)(11n - 2f) \ln(|q^2|/\mu^2)} \quad (|q^2| \gg \mu^2),$$

a constante da QED  $\rightarrow$  QCD:  $\alpha(0) \rightarrow \alpha_s(\mu^2)$ . Lembrando que:

- Não importa o valor  $\mu$ , desde que  $\alpha_s(\mu^2) < 1$ .

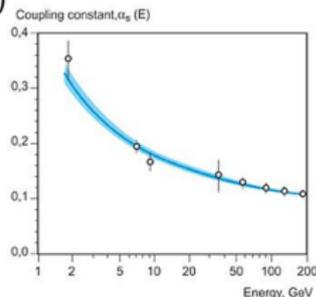
Definindo-se  $\Lambda$  por:

$$\ln \Lambda^2 = \ln \mu^2 - 12\pi / [(11n - 2f)\alpha_s(\mu^2)],$$

assim,  $\alpha_s(|q^2|)$  pode ser expressa em termos de um único parâmetro (probl. 9.17):

$$\alpha_s(|q^2|) = \frac{12\pi}{(11n - 2f) \ln(|q^2|/\Lambda^2)} \quad (|q^2| \gg \Lambda^2).$$

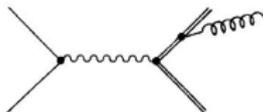
Mas é difícil de obter-se  $\Lambda$  com precisão:  $100 \text{ MeV}/c < \Lambda < 500 \text{ MeV}/c$ .



# Aplicações da QCD

- Teorias perturbativas baseadas na liberdade assintótica (curtas distâncias):

- ▶ Violação de escalonamento, devido à emissão de glúons:



foram analisados com grande concordância com os experimentos;

- ▶ Correções da QCD na fórmula (8.8):

$$R(E) \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hádrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = 3 \sum_i Q_i^2;$$

- ▶ Distribuição de jatos em espalhamentos  $e^+e^-$  e  $e^-p$ ;
- ▶ Processos “Drell-Yan”:

$$p + p \rightarrow \mu^+ + \mu^- + x$$

podem ser estudados com violação de escalonamento.

- No outro extremo: esforços para compreender o confinamento dos quarks: teoria não pode ser perturbativa e tem que ser de longo alcance. Mais promissora é a “QCD na rede” (*teoria de calibre na rede*): espaço-tempo finito e discreto (estrutura cristalina) e cálculos numéricos;
- Problemas ainda em aberto na física hadrônica: diferença  $m_p - m_n$ ? força entre 2 prótons? seção de choque do espalhamento  $\pi N$ ? energia de ligação do deuteron? ... problemas de muitos corpos.