Teorias de calibre

Física de Partículas Elementares - I

Prof. Marcelo A. Leigui de Oliveira

Centro de Ciências Naturais e Humanas
Universidade Federal do ABC
Av. dos Estados, 5001
09210-580 Santo André-SP

25 de abril de 2023

Formulação lagrangeana da mecânica de partículas clássica

- Introduzimos as teorias de calibre que acredita-se serem subjacentes às interações das partículas elementares. Veremos a formulação lagrangeana da mecânica e da teoria de campos, o princípio da invariância local, a noção de quebra espontânea de simetria e o mecanismo de Higgs. Estes temas estão relacionados com a teoria quântica de campos, de onde as regras de Feynman são deduzidas.
- A segunda lei de Newton:

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

onde $\vec{F}$ é a força, m é a massa e $\vec{a}$ a aceleração. Se a força for conservativa, pode ser descrita como o gradiente de um potencial:

$$\vec{F} = -\nabla U$$

e a segunda lei de Newton pode ser escrita:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla U.$$

Formulação lagrangeana da mecânica de partículas clássica

- Na formulação lagrangeana, partimos da função lagangeana:

$$L = T - U,$$

onde T é a energia cinética:

$$T = \frac{1}{2} m v^2.$$

A lagrangeana é uma função das coordenadas generalizadas q_i ($q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$) e de suas derivadas $\dot{q}_i$ ($\dot{q}_1 = v_x, \dot{q}_2 = v_y, \dot{q}_3 = v_z$). A lei de Newton é então a equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

Assim, em coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial v_x} = m v_x$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

e analogamente para as coordenadas 2 e 3 (probl. 11.1).

Lagrangeanas na teoria de campos relativística

- Uma *partícula* é localizada e usualmente na mecânica queremos sua trajetória (posição em função do tempo): $x(t), y(t), z(t)$. Já um *campo* se espalha no espaço e queremos funções da posição e do tempo: $\phi_i(x, y, z, t)$.
- Na teoria de campos, iniciamos com uma *densidade lagrangeana*, $\mathcal{L}$, que é função dos campos ϕ_i e de suas derivadas em x, y, z e t:

$$\partial_\mu \phi_i \equiv \frac{\partial \phi_i}{\partial x^\mu}.$$

- Numa teoria relativística, as variáveis espaciais e temporal devem ser tratadas em pé de igualdade, assim a equação de Euler-Lagrange fica:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Lagrangeanas na teoria de campos relativística - Exemplos

1. **A lagrangeana de Klein-Gordon para um campo escalar (spin 0)**:

Seja um campo escalar ϕ e a lagrangeana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi^2,$$

ou, abrindo mais:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_0\phi\,\partial_0\phi - \partial_1\phi\,\partial_1\phi - \partial_2\phi\,\partial_2\phi - \partial_3\phi\,\partial_3\phi) - \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi^2.$$

Agora, as derivadas são:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} = \partial_0\phi = \partial^0\phi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_1\phi)} = -\partial_1\phi = \partial^1\phi, \quad \ldots$$

ou:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \partial^\mu\phi.$$

Enquanto que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi.$$

Então, a equação de Euler-Lagrange exige:

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi = 0,$$

que é a equação de Klein-Gordon de uma partícula de spin 0 e massa m.

Lagrangeanas na teoria de campos relativística - Exemplos

2. **A lagrangeana de Dirac para um campo espinorial (spin $\frac{1}{2}$):**

Seja um campo espinorial ψ e a lagrangeana:

$$\mathcal{L} = i(\hbar c)\overline{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - (mc^2)\overline{\psi}\psi,$$

com ψ e $\overline{\psi}$ sendo tratadas como variáveis independentes.

Das derivadas em $\overline{\psi}$ temos:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\overline{\psi})} = 0, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\overline{\psi}} = i\hbar c\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - mc^2\psi \Rightarrow \quad i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0$$

que é a equação de Dirac descrevendo uma partícula de spin $\frac{1}{2}$ e massa m.

Enquanto que das derivadas em ψ temos:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi)} = i\hbar c\overline{\psi}\gamma^{\mu}, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = -mc^2\overline{\psi} \Rightarrow \quad i\partial_{\mu}\overline{\psi}\gamma^{\mu} + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)\overline{\psi} = 0,$$

que é a equação adjunta de Dirac descrevendo uma partícula de spin $\frac{1}{2}$ e massa m.

Lagrangeanas na teoria de campos relativística - Exemplos

3. **A lagrangeana de Proca para um campo vetorial (spin 1)**:

Seja um campo vetorial A^μ e a lagrangeana:

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{16\pi}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \frac{1}{8\pi}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu A_\nu .$$

Agora (probl. 11.2):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{-1}{4\pi}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu \Rightarrow$$

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu = 0$$

que é a equação de Proca descrevendo uma partícula de spin 1 e massa m.

Definindo-se o tensor:

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu,$$

a lagrangeana e a equação de campo ficam:

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu A_\nu$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu = 0.$$

- Obs.: impondo $m = 0$ obtemos as equações de Maxwell, pois o campo eletromagnético é um campo vetorial de uma partícula sem massa (o fóton).

Lagrangeanas na teoria de campos relativística - Exemplos

4. **A lagrangeana de Maxwell para um campo vetorial sem massa com fonte (J^μ):**

Seja a lagrangeana:

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{c} J^\mu A_\mu .$$

A equação de Euler-Lagrange fica:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu ,$$

que (como vimos) é a forma tensorial das equações de Maxwell, descrevendo campos eletromagnéticos produzidos pelas fontes J^μ.

Derivando-se novamente, vem a equação da continuidade:

$$\partial_\nu J^\nu = 0.$$

Invariância de calibre local

- Note que a lagrangeana de Dirac:
$$\mathcal{L} = i(\hbar c)\overline{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - (mc^2)\overline{\psi}\psi$$
é invariante sob uma *transformação global de calibre*:
$$\psi \to e^{i\theta}\psi,$$
onde θ é um número real, pois:
$$\overline{\psi} \to e^{-i\theta}\overline{\psi} \Rightarrow \overline{\psi}\psi \to \cancel{e^{-i\theta} e^{i\theta}}\,\overline{\psi}\psi = \overline{\psi}\psi.$$
Agora, se o fator de fase for dependente da posição, $\theta(x)$:
$$\psi \to e^{i\theta(x)}\psi,$$
teremos uma *transformação local de calibre*.

  Será que a lagrangeana é invariante sob uma transformação local de calibre? Não, pois:
$$\partial_\mu[e^{i\theta(x)}\psi] = i[\partial_\mu\theta(x)]e^{i\theta(x)}\psi + e^{i\theta(x)}\partial_\mu\psi,$$
tal que:
$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} - \hbar c[\partial_\mu\theta(x)]\overline{\psi}\gamma^\mu\psi.$$
Definindo-se:
$$\lambda(x) \equiv -\frac{\hbar c}{q}\theta(x),$$
onde q é a carga da partícula.

  Então, em termos de λ:
$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + (q\overline{\psi}\gamma^\mu\psi)\partial_\mu\psi,$$
$$\psi \to e^{-iq\lambda(x)/\hbar c}\psi.$$

Invariância de calibre local

- Se a transformação de calibre local for, por *imposição*, invariante, deve-se subtrair o termo extra da lagrangeana:
$$\mathcal{L} = [i\hbar c\overline{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - mc^2\overline{\psi}\psi] - (q\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi)A_{\mu},$$
onde A_{μ} é um novo campo (de "*calibre*"), que sob uma transformação local de calibre:
$$A_{\mu} \to A_{\mu} + \partial_{\mu}\lambda.$$
- Falta ainda um termo "*livre*" no campo de calibre. Tomando-se a lagrangeana de Proca:
$$\mathcal{L} = \frac{-1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi}\left(\frac{m_A c}{\hbar}\right)^2 A^{\nu}A_{\nu}.$$
Inicialmente, o campo de calibre deve ser sem massa ($m_A = 0$), se não a invariância estará perdida, pois, $F^{\mu\nu}$ é invariante, mas $A^{\nu}A_{\nu}$ não é. Assim, a lagrangeana completa deve ser:
$$\mathcal{L} = [i\hbar c\overline{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - mc^2\overline{\psi}\psi] + \left[\frac{-1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right] - [(q\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi)A_{\mu}].$$
Identificamos o potencial eletromagnético A_{μ} e a lagrangeana de Maxwell com o termo de corrente:
$$J^{\mu} = cq(\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi).$$
    - A imposição da invariância de calibre local à lagrangeana de Dirac gera toda a eletrodinâmica e especifica a corrente de partículas de Dirac.

Invariância de calibre local

- Note que a derivada:
$$\partial_\mu \psi \to e^{-iq\lambda/\hbar c}\left[\partial_\mu - i\frac{q}{\hbar c}(\partial_\mu \lambda)\right]\psi$$
introduz um termo extra envolvendo $\partial_\mu \lambda$. Se substituirmos a derivada ∂_μ pela chamada "*derivada covariante*":
$$\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + i\frac{q}{\hbar c}A_\mu,$$
o termo extra é cancelado, pois:
$$\mathcal{D}_\mu \psi \to e^{-iq\lambda/\hbar c}\mathcal{D}_\mu \psi$$
e a invariância de $\mathcal{L}$ é restaurada. Chamamos esta de "*regra do acoplamento mínimo*".
  - A lagrangeana:
  $$\mathcal{L} = [i\hbar c\overline{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc^2\overline{\psi}\psi] + \left[\frac{-1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right] - [(q\overline{\psi}\gamma^\mu \psi)A_\mu]$$
  é reconhecida como a lagrageana da QED — campos de Dirac (elétrons ou pósitrons) interagindo com campos de Maxwell (fótons).

- A transformação de fase global pode ser pensada como a multiplicação de ψ por uma matriz unitária:
$$\psi \to U\psi, \quad \text{onde } U^\dagger U = 1 \text{ e } U = e^{i\theta}.$$
O grupo dessas matrizes é $U(1)$, portanto, esta simetria é chamada "*invariância de calibre U(1)*".

Teoria de Yang-Mills

- Em 1954, Yang e Mills aplicaram a mesma estratégia (exigir a invariância global localmente) ao grupo $SU(2)$;
- Sejam 2 campos de spin-$\frac{1}{2}$, ψ_1 e ψ_2. A lagrangeana, na ausência de interações, é:

$$\mathcal{L} = [i\hbar c\overline{\psi}_1\gamma^\mu\partial_\mu\psi_1 - m_1c^2\overline{\psi}_1\psi_1] + [i\hbar c\overline{\psi}_2\gamma^\mu\partial_\mu\psi_2 - m_2c^2\overline{\psi}_2\psi_2].$$

Combinando-se:

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{\psi} = \begin{pmatrix} \overline{\psi}_1 & \overline{\psi}_2 \end{pmatrix}$$

e a lagrangeana fica:

$$\mathcal{L} = i\hbar c\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - c^2\overline{\psi}M\psi,$$

onde:

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$$

é a "*matriz de massa*" e $\mathcal{L}$ admite agora a invariância global:

$$\psi \to U\psi \quad \text{e} \quad \overline{\psi} \to \overline{\psi}U^\dagger, \quad \text{com} \quad U^\dagger U = 1.$$

Agora, qualquer matriz unitária pode ser escrita na forma:

$$U = e^{iH},$$

onde H é *hermitiano* ($H^\dagger = H$). Dados 4 números reais θ, a_1, a_2, a_3 (probl. 11.10):

$$H = \theta 1 + \vec{\tau}\cdot\vec{a},$$

onde 1 é a matriz unitária 2×2 e τ_1, τ_2, τ_3 são as matrizes de Pauli. Assim:

$$U = e^{i\theta}e^{i\vec{\tau}\cdot\vec{a}}.$$

Teoria de Yang-Mills

- Seja a transformação global $SU(2)$:

$$\psi \rightarrow e^{i\vec{\tau}\cdot\vec{a}}\psi.$$

A matriz $e^{i\vec{\tau}\cdot\vec{a}}$ tem determinante 1 e, portanto, pertence ao grupo $SU(2)$.
Yang e Mills propuseram, inicialmente, que os parâmetros $\vec{a}$ são funções da posição e do tempo, x^μ, e, assim:

$$\vec{\lambda(x)} \equiv \left(\frac{\hbar c}{q}\right)\vec{a}(x),$$

onde q é uma constante de acoplamento análoga à carga:

$$\psi \rightarrow S\psi, \quad \text{onde } S \equiv e^{-iq\vec{\tau}\cdot\vec{\lambda(x)}/\hbar c}.$$

A lagrangeana $\mathcal{L}$ não é invariante, pois sobra um termo na derivada:

$$\partial_\mu \rightarrow S\partial_\mu\psi + (\partial_\mu)\psi.$$

A saída, de novo, é usar a derivada covariante:

$$\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + i\frac{q}{\hbar c}\vec{\tau}\cdot\vec{A}_\mu$$

e atribuir um campo vetorial de calibre $\vec{A}_\mu$, tal que:

$$\mathcal{D}_\mu\psi \rightarrow S(\mathcal{D}_\mu\psi).$$

Teoria de Yang-Mills

- A transformação $\vec{A}_\mu \to \vec{A}'_\mu$ é tal que (probl. 11.11):

$$\vec{\tau} \cdot \vec{A}'_\mu = S(\vec{\tau} \cdot \vec{A}_\mu)S^{-1} + i\left(\frac{\hbar c}{q}\right)(\partial_\mu S)S^{-1}.$$

A saída, de novo, é usar a derivada covariante:

$$\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + i\frac{q}{\hbar c}\vec{\tau} \cdot \vec{A}_\mu$$

e atribuir um campo vetorial de calibre $\vec{A}_\mu$, tal que:

$$\mathcal{D}_\mu \psi \to S(\mathcal{D}_\mu \psi).$$

- No caso de uma transformação muito pequena ($\lambda \ll 1$), usamos a regra de transformação *aproximada*:

$$S \approx 1 - \frac{iq}{\hbar c}\vec{\tau} \cdot \vec{\lambda}, \quad S^{-1} \approx 1 + \frac{iq}{\hbar c}\vec{\tau} \cdot \vec{\lambda}, \quad \partial_\mu S \approx -\frac{iq}{\hbar c}\vec{\tau} \cdot (\partial_\mu \lambda).$$

Assim:

$$\vec{\tau} \cdot \vec{A}'_\mu \approx \vec{\tau} \cdot \vec{A}_\mu + \frac{iq}{\hbar c}[\vec{\tau} \cdot \vec{A}_\mu, \vec{\tau} \cdot \vec{\lambda}] + \vec{\tau} \cdot \partial_\mu \lambda.$$

A lagrangeana resultante é:

$$\mathcal{L} = i\hbar c\overline{\psi}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi - mc^2\overline{\psi}\psi = [i\hbar c\overline{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc^2\overline{\psi}\psi] - (q\overline{\psi}\gamma^\mu \vec{\tau}\psi) \cdot \vec{A}_\mu,$$

que é invariante sob uma transfomação local, mas tivemos que introduzir 3 novos campos: $\vec{A}^\mu = (A_1^\mu, A_2^\mu, A_3^\mu)$ — obs.: o índice μ pertence às partículas.

Teoria de Yang-Mills

- Estes campos têm sua própria lagrangeana:

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{16\pi} F_1^{\mu\nu} F_{\mu\nu 1} - \frac{1}{16\pi} F_2^{\mu\nu} F_{\mu\nu 2} - \frac{1}{16\pi} F_3^{\mu\nu} F_{\mu\nu 3} = -\frac{1}{16\pi} \vec{F}^{\mu\nu} \cdot \vec{F}_{\mu\nu}$$

e o termo de massa de Proca: $\frac{1}{8\pi} \left(\frac{m_A c}{\hbar} \right)^2 \vec{A}^\nu \cdot \vec{A}_\nu$

é excluído pela invariância local de calibre, mas a associação $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ ainda deve ser modificada (probl. 11.12):

$$\vec{F}^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu \vec{A}^\nu - \partial^\nu \vec{A}^\mu - \frac{2q}{\hbar c} (\vec{A}^\mu \times \vec{A}^\nu).$$

Sob uma transformação local de calibre infinitesimal (probls. 11.13 e 11.14):

$$\vec{F}^{\mu\nu} \to \vec{F}^{\mu\nu} + \frac{2q}{\hbar c} (\vec{\lambda} \times \vec{F}^{\mu\nu})$$

e $\mathcal{L}_A$ é invariante.

Conclusão: a lagrangeana completa é:

$$\mathcal{L} = [i\hbar c \overline{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc^2 \overline{\psi} \psi] - \frac{1}{16\pi} \vec{F}^{\mu\nu} \cdot \vec{F}_{\mu\nu} - (q \overline{\psi} \gamma^\mu \vec{\tau} \psi) \cdot \vec{A}_\mu,$$

que é invariante sob transformação de calibre local $SU(2)$ e descreve 2 campos de Dirac de massas iguais em interação com 3 campos de calibre sem massa.

Os campos de Dirac geram 3 *correntes*:

$$J^\mu \equiv cq(\overline{\psi} \gamma^\mu \vec{\tau} \psi),$$

que atuam como *fontes* para os campos de calibre e sua lagrangeana (de Maxwell) é:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} \vec{F}^{\mu\nu} \cdot \vec{F}_{\mu\nu} - \frac{1}{c} \vec{J}^\mu \cdot \vec{A}_\mu.$$

Cromodinâmica

- Cada sabor de quark vem em 3 cores (r, b e g) que, mesmo os sabores tendo massas diferentes, as cores não diferem em massa. Então, a lagrangeana de um quark de um dado sabor é:

$$\mathcal{L} = [i\hbar c\overline{\psi}_r\gamma^\mu\partial_\mu\psi_r - mc^2\overline{\psi}_r\psi_r] - [i\hbar c\overline{\psi}_b\gamma^\mu\partial_\mu\psi_b - mc^2\overline{\psi}_b\psi_b] - [i\hbar c\overline{\psi}_g\gamma^\mu\partial_\mu\psi_g - mc^2\overline{\psi}_g\psi_g].$$

Como antes, podemos simplificar introduzindo:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_r \\ \psi_b \\ \psi_g \end{pmatrix}, \quad \overline{\psi} \equiv \begin{pmatrix} \overline{\psi}_r & \overline{\psi}_b & \overline{\psi}_g \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{L} = [i\hbar c\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc^2\overline{\psi}\psi],$$

que é a lagrangeana de 3 partículas de massas iguais que exibe simetria $U(3)$, ou seja, é invariante sob a transformação:

$$\psi \to U\psi, \quad \overline{\psi} \to \overline{\psi}U^\dagger,$$

onde U é uma matriz unitária 3×3:

$$U^\dagger U = 1,$$

que pode ser escrita a partir de uma matriz hermitiana:

$$U = e^{iH}, \quad \text{com } H^\dagger = H.$$

Cromodinâmica

- Além disso, qualquer matriz hermitiana 3×3 pode ser obtida a partir de 9 números reais $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ e θ (probl. 11.16):

$$H = \theta 1 + \vec{\lambda} \cdot \vec{a},$$

onde 1 é a matriz unitária 3×3 e $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_8$ são as matrizes de Gell-Mann. O produto escalar é:

$$\vec{\lambda} \cdot \vec{a} = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_8 a_8.$$

Assim:

$$U = e^{i\theta} e^{i\vec{\lambda}\cdot\vec{a}},$$

onde a matriz $e^{i\vec{\lambda}\cdot\vec{a}}$ tem determinante 1 (probl. 11.17) e pertence a $SU(3)$.

- Queremos a invariância da lagrangeana sob $SU(3)$, fazendo a simetria global tornar-se local. Isto é, sob transformação de calibre $SU(3)$:

$$\psi \to S\psi, \quad \text{onde } S \equiv e^{iq\vec{\lambda}\cdot\vec{\phi}(x)/\hbar c}, \quad \text{com } \vec{\phi} \equiv -(\hbar c/q)\vec{a},$$

sendo q uma constante de acoplamento análoga à carga.

Cromodinâmica

- O truque é substituir as derivadas pela derivada convariante:
$$\mathcal{D} \equiv \partial_\mu + i\frac{q}{\hbar c}\vec{\lambda}\cdot\vec{A}_\mu,$$
atribuindo-se a 8 campos vetoriais de calibre $\vec{A}_\mu$ as transformações:
$$\mathcal{D}_\mu\psi \rightarrow S(\mathcal{D}_\mu\psi).$$
- A transformação $\vec{A}_\mu \rightarrow \vec{A}'_\mu$ é tal que :
$$\vec{\lambda}\cdot\vec{A}'_\mu = S(\vec{\lambda}\cdot\vec{A}_\mu)S^{-1} + i\left(\frac{\hbar c}{q}\right)(\partial_\mu S)S^{-1}.$$
No caso de uma transformação muito pequena ($\lambda \ll 1$), então:
$$\vec{A}'_\mu \approx \vec{A}_\mu + \partial_\mu\phi + \frac{2q}{\hbar c}(\vec{\phi}\times\vec{A}_\mu),$$
onde:
$$(\vec{B}\times\vec{C})_i = f_{ijk}B_jC_k$$
e f_{ijk} são as constantes de estrutura da $SU(3)$, análogas às ϵ_{ijk} da $SU(2)$.
- A lagrangeana resultante é:
$$\mathcal{L} = i\hbar c\overline{\psi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi - mc^2\overline{\psi}\psi = [i\hbar c\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc^2\overline{\psi}\psi] - (q\overline{\psi}\gamma^\mu\vec{\lambda}\psi)\cdot\vec{A}_\mu,$$
que é invariante sob uma transfomação de calibre local em $SU(3)$.
    - Obs.: o custo foi a introdução de 8 campos, $\vec{A}_\mu$, que, na linguagem das partículas, correspondem aos 8 glúons.

Cromodinâmica

- Para finalizar o trabalho, vejamos a lagrangeana dos glúons livres:

$$\mathcal{L}_{glúons} = -\frac{1}{16\pi}\vec{F}^{\mu\nu}\cdot\vec{F}_{\mu\nu}$$

e, analogamente:

$$\vec{F}^{\mu\nu} \equiv \partial^{\mu}\vec{A}^{\nu} - \partial^{\nu}\vec{A}^{\mu} - \frac{2q}{\hbar c}(\vec{A}^{\mu}\times\vec{A}^{\nu}).$$

- Conclusão: a lagrangeana completa é:

$$\mathcal{L} = [i\hbar c\overline{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - mc^2\overline{\psi}\psi] - \frac{1}{16\pi}\vec{F}^{\mu\nu}\cdot\vec{F}_{\mu\nu} - (q\overline{\psi}\gamma^{\mu}\vec{\lambda}\psi)\cdot\vec{A}_{\mu},$$

que é invariante sob transformação de calibre local $SU(3)$ e descreve 3 campos de Dirac de massas iguais em interação com 8 campos de calibre sem massa.

- Os campos de Dirac geram 8 *correntes*:

$$J^{\mu} \equiv cq(\overline{\psi}\gamma^{\mu}\vec{\lambda}\psi),$$

que atuam como *fontes* para os campos de calibre e sua lagrangeana é:

$$\mathcal{L}_{glúons} = -\frac{1}{16\pi}\vec{F}^{\mu\nu}\cdot\vec{F}_{\mu\nu} - \frac{1}{c}\vec{J}^{\mu}\cdot\vec{A}_{\mu}.$$

Regras de Feynman

- A teoria quântica de campos não requer alterações nas lagrangeanas ou nas equações de campos, mas requer uma *reinterpretação* das variáveis de campos:
    - *Os campos são quantizados e as partículas emergem como quanta dos campos associados.*

  Assim, o fóton é o quantum do campo eletromagnético, A^μ, os quarks e os léptons são os quanta dos campos de Dirac, os glúons são os quanta dos 8 campos de calibre em $SU(3)$ e os bósons $W^\pm$ e Z^0 são os quanta de Proca apropriados.
  A lagrangeana de Klein-Gordon descreve partículas de spin 0, a de Dirac de spin $\frac{1}{2}$, a de Proca de spin 1, ...
    - *Cada lagrangeana determina um conjunto particular de regras de Feynman.*

- Inicialmente, verificamos que $\mathcal{L}$ sempre é formada por um termo livre e um ou mais termos de interação:
$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{livre} + \mathcal{L}_{int},$$
onde o primeiro determina o *propagador* e o segundo o *fator do vértice* do diagrama:
$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{livre} \quad &\Rightarrow \quad \text{propagador;} \\ \mathcal{L}_{int} \quad &\Rightarrow \quad \text{fator do vértice.} \end{aligned}$$

Regras de Feynman

1- Propagador: a equação de Euler-Lagrange aplicada aos campos livres é:

$$\left[\partial^\mu \partial_\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] \phi = 0, \quad \text{Klein-Gordon, spin } 0;$$
$$\left[i\gamma^\mu \partial_\mu - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)\right] \psi = 0, \quad \text{Dirac, spin } \frac{1}{2};$$
$$\left[\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu\right] = 0, \quad \text{Proca, spin } 1.$$

As equações do espaço de momento são obtidas com a receita $p_\mu \leftrightarrow i\hbar\partial_\mu$:

$$[p^2 - (mc)^2]\phi = 0;$$
$$[\not{p} - (mc)]\psi = 0;$$
$$[(-p^2 + (mc)^2)g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu]A^\nu = 0.$$

O propagador é i vezes o inverso do fator entre colchetes:

$$\text{propagador de spin } 0 : \quad \frac{i}{p^2 - (mc)^2};$$
$$\text{propagador de spin } \frac{1}{2} : \quad \frac{i}{\not{p} - (mc)} = i\frac{(\not{p} + mc)}{p^2 - (mc)^2};$$
$$\text{propagador de spin } 1 : \quad \frac{i}{p^2 - (mc)^2}\left[g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{(mc)^2}\right].$$

Regras de Feynman

No caso do fóton, não podemos fazer simplesmente $m \to 0$ no propagador de Proca, então retornamos à equação do campo livre:

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = 0, \quad \text{Maxwell, spin 1, } m = 0.$$

Na condição de Lorenz:

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

ela reduz-se a:

$$\partial^2 A^\nu = 0,$$

que, no espaço de momento, pode ser escrita:

$$(-p^2 g_{\mu\nu})A^\nu = 0.$$

Então, o propagador do fóton é:

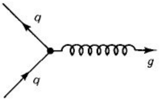
$$\text{propagador de spin 1 e } m = 0: \quad -i\frac{g_{\mu\nu}}{p^2}.$$

Regras de Feynman

2- Fator de vértice: iniciamos escrevendo $i\mathcal{L}_{int}$ no espaço de momento ($i\hbar\partial_\mu \to p$) e examinamos os campos envolvidos, que determinam a estrutura qualitativa da interação. P.ex.:

- Para a lagrangeana da QED:
$$i\mathcal{L}_{int} = -i(q\overline{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu,$$
há 3 campos envolvidos (ψ, $\overline{\psi}$ e A_μ), representando as 3 linhas do vértice (um férmion entrando, um férmion saindo e um fóton); simplesmente *tiramos* estes campos (para o fóton, divide-se pelo fator $\sqrt{\hbar c/4\pi}A^\mu$, por causa do sistema de unidades CGS):
$$-iq\sqrt{\frac{4\pi}{\hbar c}}\gamma^\mu = ig_e\gamma^\mu.$$
Este é o vértice da QED para uma partícula de carga negativa.

- Para a lagrangeana da QCD:
$$\mathcal{L}_{int} = -(q\overline{\psi}\gamma^\mu\vec{\lambda}\psi)\cdot A_\mu,$$
temos o seguinte fator de vértice[1]:
$$-i\frac{g_s}{2}\gamma^\mu\vec{\lambda}.$$



[1] A constante de acoplamento forte é definida com um fator 2 extra: $g_s \equiv 2\sqrt{4\pi/\hbar c q}$.

Regras de Feynman

- E, para o acoplamento glúon-glúon (na QCD), há dentro do termo $\vec{F}^{\mu\nu} \cdot \vec{F}_{\mu\nu}$ um termo de interação:

$$\vec{F}_{\mu\nu} \supset -\frac{2q}{\hbar c}(\vec{A}^{\mu} \times \vec{A}^{\nu});$$

quadrando-se:

$$\mathcal{L}_{int} = \left(\frac{q}{8\pi\hbar c}\right)\left[(\partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}) \cdot (\vec{A}_{\mu} \times \vec{A}_{\nu}) + (\vec{A}^{\mu} \times \vec{A}^{\nu}) \cdot (\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu})\right] +$$

$$-\frac{q^2}{4\pi(\hbar c)^2}(\vec{A}^{\mu} \times \vec{A}^{\nu}) \cdot (\vec{A}_{\mu} \times \vec{A}_{\nu}).$$

O primeiro termo contém 3 fatores de $\vec{A}^{\mu}$ e leva ao vértice de 3 glúons e o segundo termo contém 4 fatores de $\vec{A}^{\mu}$ e leva ao vértice de 4 glúons (probls. 11.20 e 11.21).

O termo de massa

- O princípio da invariância local de calibre funciona bem para as interações eletromagnéticas e forte. Os termos de massa são nulos para os intermediários (fótons e glúons), porém os bósons $W^{\pm}$ e Z^0 são massivos. Como acomodar o a teoria para campos de calibre massivos?
- Seja a seguinte lagrangeana para um campo escalar ϕ:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) + e^{-(\alpha\phi)^2},$$

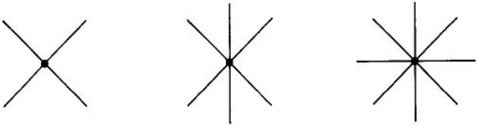
onde α é uma constante real.
Expandindo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) + 1 - \alpha^2\phi^2 + \frac{1}{2}\alpha^4\phi^4 - \frac{1}{6}\alpha^6\phi^6 + ...,$$

notamos um termo parecido ao termo de massa da lagrangeana de Klein-Gordon, com:

$$\alpha^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \Rightarrow m = \frac{\sqrt{2}\alpha\hbar}{c}$$

e os termos de ordem superior representam acoplamentos da forma:



.

O termo de massa

- Seja, agora, a seguinte lagrangeana para um campo escalar ϕ:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) + \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda^2\phi^4,$$

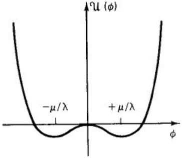
  onde μ e λ são constantes reais. Note o sinal aparentemente errado, levando a uma massa m imaginária! Entretanto, o cálculo de Feynman é *perturbativo*, no qual o estado fundamental (o *vácuo*) é trivial: $\phi = 0$; mas este não é o caso da lagrangeana acima.

- Partindo de:

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{T} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi), \quad \mathcal{U} = -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda^2\phi^4,$$

  onde o mínimo de $U(\phi)$ ocorre em:

$$\phi = \pm\frac{\mu}{\lambda}$$



  e o cálculo de Feynman deve ser feito em torno desses estados.
  Definindo:

$$\eta \equiv \phi \pm \frac{\mu}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) - \mu^2\eta^2 \pm \mu\lambda\eta^3 - \frac{1}{4}\lambda^2\eta^4 + \frac{1}{4}(\mu^2/\lambda)^2,$$

  o termo de massa agora tem o sinal correto:

$$m = \frac{\sqrt{2}\mu\hbar}{c}$$

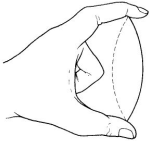
  e os outros 2 termos seguintes representam os acoplamentos:


Quebra espontânea de simetria

- O procedimento anterior foi basicamente uma mudança de notação: $\mathcal{L}(\phi) \to \mathcal{L}(\eta)$. Agora, $\mathcal{L}(\phi)$ é *par*, mas $\mathcal{L}(\eta)$ é *ímpar*, ou seja, a simetria foi "*quebrada espontaneamente*", pois não foi causada por nenhum agente externo.
  - Obs.: o conjunto de todos os estados de vácuo têm a mesma simetria de $\mathcal{L}$, mas individualmente, não necessariamente.

  A verdadeira simetria está "*escondida* " e foi revelada na escolha arbitrária de um estado fundamental (assimétrico) particular.

- Quebras espontâneas de simetria ocorrem em outras áreas da física. P.ex., tome uma pequena vareta de plástico e aperte-a. Ela vai curvar-se, mas somente para um lado (esquerda ou direita). Este é um caso de quebra espontânea de simetria *discreta*.



- Para uma quebra espontânea de simetria *contínua*, consideremos a lagrangeana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)(\partial^\mu \phi_1) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)(\partial^\mu \phi_2) + \frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{1}{4}\lambda^2(\phi_1^4 + \phi_2^4).$$

  Como esta $\mathcal{L}$ envolve a soma dos quadrados de 2 campos, ϕ_1 e ϕ_2, ela é invariante sob $SO(3)$, ou o grupo de rotações de qualquer ângulo θ no espaço ϕ_1, ϕ_2:

$$\begin{cases} \phi_1 \to & \phi_1 \cos\theta + \phi_2 \sin\theta \\ \phi_2 \to & -\phi_1 \sin\theta + \phi_2 \cos\theta \end{cases}$$

Quebra espontânea de simetria

- Para uma quebra espontânea de simetria *contínua*, consideremos a lagrangeana[2]:

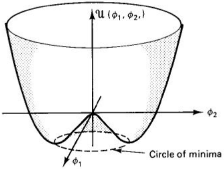
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)(\partial^\mu \phi_1) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)(\partial^\mu \phi_2) + \frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{1}{4}\lambda^2(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2,$$

neste caso[2]:

$$\mathcal{U} = -\frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{1}{4}\lambda^2(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2,$$

os mínimos estão num círculo de raio:

$$\phi_1{}^2_{min} + \phi_2{}^2_{min} = \frac{\mu^2}{\lambda^2}$$



e o cálculo de Feynman deve ser feito em torno de um estado fundamental particular. P.ex.:

$$\phi_{1\,min} = \frac{\mu}{\lambda}, \quad \phi_{2\,min} = 0.$$

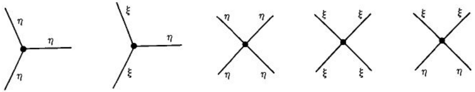
Introduzimos os novos campos: $\eta \equiv \phi_1 \pm \dfrac{\mu}{\lambda}, \quad \xi \equiv \phi_2$

e reescrevemos:

$$\mathcal{L} = \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) - \mu^2\eta^2\right] + \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)(\partial^\mu \xi)\right] + \left[\mu\lambda(\eta^3 + \eta\xi^2) - \frac{\lambda^4}{4}(\eta^4 + \xi^4 + 2\eta^2\xi^2)\right] + \frac{1}{4}(\mu^4/\lambda)^2,$$

onde o primeiro termo contém um termo de massa, o segundo é sem massa e o terceiro representa os 5 acoplamentos:

$$m_\eta = \frac{\sqrt{2}\mu\hbar}{c}, \quad m_\xi = 0,$$



.

[2] 2^a ed.

O mecanismo de Higgs

- Vamos, agora, combinar os campos ϕ_1 e ϕ_2 em um único campo complexo:
$$\phi \equiv \phi_1 + i\phi_2 \quad \Rightarrow \quad \phi^*\phi = \phi_1^2 + \phi_2^2.$$
Nesta notação, a lagrangeana fica:
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^*(\partial^\mu\phi) + \frac{1}{2}\mu^2(\phi^*\phi) - \frac{1}{4}\lambda^2(\phi^*\phi)^2$$
e a simetria de rotação $SO(2)$, que foi quebrada espontaneamente, torna-se invariância sob transformação de fase $U(1)$:
$$\phi \to e^{i\theta}\phi.$$
- Podemos fazer o sistema invariante sob uma transformação local de calibre:
$$\phi \to e^{i\theta(x)}\phi$$
com a introdução de um campo de calibre, A^μ, sem massa e substituindo as derivadas por:
$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + i\frac{q}{\hbar c}A_\mu$$
Assim:
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu - \frac{iq}{\hbar c}A_\mu)\phi^*\right]\left[(\partial^\mu + \frac{iq}{\hbar c}A^\mu)\phi\right] + \frac{1}{2}\mu^2(\phi^*\phi) - \frac{1}{4}\lambda^2(\phi^*\phi)^2 - \frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$
e retomamos os passos anteriores.

O mecanismo de Higgs

- Introduzindo os novos campos:

$$\eta \equiv \phi_1 - \frac{\mu}{\lambda}, \quad \xi \equiv \phi_2$$

e reescrevendo:

$$\mathcal{L} = \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) - \mu^2 \eta^2\right] + \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)(\partial^\mu \xi)\right] +$$
$$+ \left[-\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{q}{\hbar c}\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 A_\mu A^\mu\right] - 2i\left(\frac{q}{\hbar c}\frac{\mu}{\lambda}\right)(\partial_\mu \xi) A^\mu +$$
$$+ \left\{\frac{q}{\hbar c}[\eta(\partial_\mu \xi) - \xi(\partial_\mu \eta)] A^\mu + \frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{q}{\hbar c}\right)^2 \eta (A_\mu A^\mu) + \frac{1}{2}\left(\frac{q}{\hbar c}\right)^2 (\xi^2 + \eta^2)(A_\mu A^\mu) + \right.$$
$$\left. - \lambda\mu(\eta^3 + \eta\xi^2) - \frac{1}{4}\lambda^2(\eta^4 + 2\eta^2\xi^2 + \xi^4)\right\} + \left(\frac{\mu^2}{2\lambda}\right)^2,$$

onde a primeira linha descreve uma partícula massiva e uma sem massa[3]:

$$m_\eta = \frac{\sqrt{2}\mu\hbar}{c}, \quad m_\xi = 0,$$

a segunda linha um campo de calibre que adquire massa:

$$m_A = 2\sqrt{\pi}\frac{q\mu}{\lambda c^2},$$

e o termo entre chaves descreve vários acoplamentos entre η, ξ e A^μ (probl. 11.26).

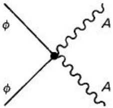
[3]Ou, um bóson de Goldstone.

O mecanismo de Higgs

- Vejamos a origem do termo de massa de A^μ; a lagrangeana original contém um termo:

$$\mathcal{L} \supset \phi^* \phi A_\mu A^\mu,$$

que, sem a quebra de simetria, representa o acoplamento:



,

mas quando o estado fundamental sai do centro, o campo η toma um termo extra, μ/λ:

$$\eta = \phi_1 - \frac{\mu}{\lambda}.$$

- Contudo, ainda temos um bóson de Goldstone ξ. Olhando, agora, para o termo:

$$2i\left(\frac{q}{\hbar c}\frac{\mu}{\lambda}\right)(\partial_\mu \xi)A^\mu,$$

que pode ser tratado como a *interação*:

,

que transforma ξ em A^μ.
Só que não pode haver um"*vértice*" bilinear como este.

O mecanismo de Higgs

- Tais dificuldades são removidas, reescrevendo-se:

$$\phi \to \phi' = (\cos\theta + i\sin\theta)(\phi_1 + i\phi_2) = (\phi_1\cos\theta - \phi_2\sin\theta) + i(\phi_1\sin\theta + \phi_2\cos\theta)$$

e tomando-se:

$$\theta = -\tan\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right),$$

que vai tornar ϕ' real (e o eventual $\phi_2' = 0$). Assim, a lagrangeana reduz-se (com $\xi = 0$) a:

$$\mathcal{L} = \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)(\partial^\mu\eta) - \mu^2\eta^2\right] + \left[-\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{q}{\hbar c}\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 A_\mu A^\mu\right] +$$

$$+\left\{\frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{q}{\hbar c}\right)^2 \eta(A_\mu A^\mu) + \frac{1}{2}\left(\frac{q}{\hbar c}\right)^2 \eta^2(A_\mu A^\mu) - \lambda\mu\eta^3 - \frac{1}{4}\lambda^2\eta^4\right\} +$$

$$+\left(\frac{\mu^2}{2\lambda}\right)^2.$$

Lembre-se de que as lagrangeanas descrevem o mesmo sistema físico. Entretanto, com uma escolha astuta de calibre, eliminamos o bóson de Goldstone e ficamos com um escalar massivo η (o *bóson de Higgs*) e um campo de calibre massivo A^μ. A^μ, inicialmente sem massa e com 2 graus de liberdade, ganha um 3° grau de liberdade (ξ) ao adquirir massa ($W^\pm$ e Z^0).

- Este é o *mecanismo de Higgs*.