Cromodinâmica quântica

Física de Partículas Elementares

Prof. Marcelo A. Leigui de Oliveira

Centro de Ciências Naturais e Humanas
Universidade Federal do ABC
Av. dos Estados, 5001
09210-580 Santo André-SP

10 de abril de 2025

Universidade Federal do ABC

Regras de Feynman para a cromodinâmica

- Veremos as regras de Feynman para a cromodinâmica quântica (QCD) e como são descritas as partículas coloridas;
- As interações eletromagnéticas são mediadas na eletrodinâmica por fótons, com intensidade dada pela constante de acoplamento:

  $$g_e = \sqrt{4\pi\alpha},$$

  enquanto que as interações fortes são mediadas na cromodinâmica por glúons, com intensidade dada pela constante de acoplamento forte:

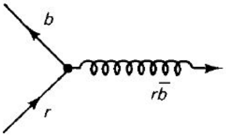
  $$g_s = \sqrt{4\pi\alpha_s},$$

  que pode ser pensada como a unidade fundamental de cor;
- Os quarks vêm em 3 cores: vermelha (r), azul (b) e verde (g). Então, a especificação do estado de um quark exige, além do spinor de Dirac $u^{(s)}(p)$, vetores colunas de 3 elementos:

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ para o vermelho, } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ para o azul, } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ para o verde.}$$

Regras de Feynman para a cromodinâmica

- Tipicamente, a cor do quark muda no vértice quark-glúon:



▶ o quark muda de vermelho (r) para azul (b) e o glúon leva a cor vermelha+antiazul ($r\overline{b}$).

Cada glúon porta uma cor e uma anticor. Em princípio, são 9 glúons possíveis: $r\overline{r}$, $r\overline{b}$, $r\overline{g}$, $b\overline{r}$, $b\overline{b}$, $b\overline{g}$, $g\overline{r}$, $g\overline{b}$, $g\overline{g}$, mas na simetria SU(3) de cores, há um octeto de cores:

$$\begin{aligned} \left|1\right\rangle &= (r\overline{b} + b\overline{r})/\sqrt{2} & \left|5\right\rangle &= -i(r\overline{g} - g\overline{r})/\sqrt{2} \\ \left|2\right\rangle &= -i(r\overline{b} - b\overline{r})/\sqrt{2} & \left|6\right\rangle &= (b\overline{g} + g\overline{b})/\sqrt{2} \\ \left|3\right\rangle &= (r\overline{r} - b\overline{b})/\sqrt{2} & \left|7\right\rangle &= -i(b\overline{g} - g\overline{b})/\sqrt{2} \\ \left|4\right\rangle &= (r\overline{g} + g\overline{r})/\sqrt{2} & \left|8\right\rangle &= (r\overline{r} + b\overline{b} - 2g\overline{g})/\sqrt{6} \end{aligned}$$

e um singleto de cores:

$$\left|9\right\rangle = (r\overline{r} + b\overline{b} + g\overline{g})/\sqrt{3}.$$

▶ Obs.: o nono glúon poderia ser o fóton (vide † e o probl. 8.12) e, se ocorresse, daria origem a uma interação forte de alcance infinito (vide *).

Regras de Feynman para a cromodinâmica

- Glúons são partículas sem massa de spin 1, como o fóton. Portanto, são representados da mesma forma, por um vetor de polarização ϵ^μ ortogonal ao momento p^μ (condição de Lorenz):

$$\epsilon^\mu p_\mu = 0.$$

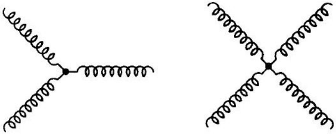
Adotando o calibre de Coulomb:

$$\epsilon^0 = 0, \text{ tal que: } \vec{\epsilon} \cdot \vec{p} = 0.$$

Para descrever o estado de cor, precisamos de vetores colunas de 8 elementos:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ para } \left|1\right\rangle, \ldots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ para } \left|7\right\rangle, \ldots \tag{1}$$

- Como os glúons carregam cor (ao contrário do fóton que é neutro), eles acoplam-se entre si:



Regras de Feynman para a cromodinâmica

- Introduzimos as *matrizes*-λ de Gell-Mann:

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

que são para SU(3) o que as matrizes de Pauli são para SU(2).

- E seus comutadores:

$$[\lambda^\alpha, \lambda^\beta] = 2if^{\alpha\beta\gamma}\lambda^\gamma,$$

onde $f^{\alpha\beta\gamma}$ são as *"constantes de estrutura"* e a soma sobre índices repetidos está implícita (de 1 a 8, portanto, são $8^3 = 512$ constantes!).
Elas são antissimétricas: $f^{\beta\alpha\gamma} = f^{\alpha\gamma\beta} = -f^{\alpha\beta\gamma}$ e muitas são zero.
As restantes podem ser obtidas da antissimetria a partir de:

$$f^{123} = 1, \quad f^{147} = f^{246} = f^{257} = f^{345} = f^{516} = f^{637} = \frac{1}{2}, f^{458} = f^{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Regras de Feynman para a cromodinâmica

- As regras de Feynman para a QCD:

1. *Linhas externas*: para as linhas externas, define-se quarks/antiquarks com momento p, spin s e cor c:

$$
Quark: \begin{cases} \text{Incoming } (\rightarrow\!\bullet) : u^{(s)}(p)c \\ \text{Outgoing } (\bullet\!\rightarrow) : \bar{u}^{(s)}(p)c^{\dagger} \end{cases}
$$

$$
Antiquark: \begin{cases} \text{Incoming } (\leftarrow\!\bullet) : \bar{v}^{(s)}(p)c^{\dagger} \\ \text{Outgoing } (\bullet\!\leftarrow) : v^{(s)}(p)c \end{cases}
$$

e glúons com momento p, polarização ϵ e cor a:

$$
Gluon: \begin{cases} \text{Incoming}(\overset{\alpha,\,\mu}{\rightarrow 0000 \bullet}) : \epsilon_{\mu}(p)a^{\alpha} \\ \text{Outgoing}(\overset{\alpha,\,\mu}{\bullet 0000 \leftarrow}) : \epsilon^{*}_{\mu}(p)a^{\alpha *} \end{cases}
$$

2. *Propagadores*: cada linha interna contribui com um fator:

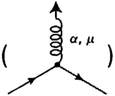
$$
\text{Quarks and antiquarks: } (\bullet\!\overset{q}{\longrightarrow}\!\bullet) : \frac{i(\not{q} + mc)}{q^2 - m^2c^2}
$$

$$
\text{Gluons: } (\underset{\alpha,\,\mu \qquad \beta,\,\nu}{\overset{q}{\bullet 0000 \bullet}}) : \frac{-ig_{\mu\nu}\delta^{\alpha\beta}}{q^2}
$$

Regras de Feynman para a cromodinâmica

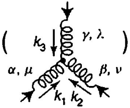
3. *Vértices*: cada vértice introduz um fator:

Quark-gluon: (



) : $\frac{-ig_s}{2}\lambda^\alpha\gamma^\mu$

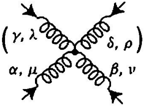
Three gluon: (



) :

$$-g_s f^{\alpha\beta\gamma}[g_{\mu\nu}(k_1-k_2)_\lambda + g_{\nu\lambda}(k_2-k_3)_\mu + g_{\lambda\mu}(k_3-k_1)_\nu]$$

Four gluon: (



) :

$$-ig_s^2[f^{\alpha\beta\eta}f^{\gamma\delta\eta}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}-g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}) + f^{\alpha\delta\eta}f^{\beta\gamma\eta}(g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}-g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}) +$$
$$+f^{\alpha\gamma\eta}f^{\delta\beta\eta}(g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}-g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho})]$$

4. Seguem-se as outras regras, analogamente.

A interação quark-quark

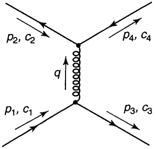
- Vamos estudar as interações qq e $q\overline{q}$, mas como não podemos acessar diretamente essas interações em laboratório, não serão obtidas as seções de choque, concentraremo-nos em *potenciais efetivos* entre quarks;
- Lembre-se que é uma teoria de perturbação, válida para pequenos valores de α_s. Não vai ser possível obter o termo de confinamento — para isto, confiamos na liberdade assintótica;
- Resultado sugestivo:
  - "*Quarks atraem-se mais intensamente em singletos de cor.*"

  Ademais, em outras configurações, eles até se repelem. Em alcances muito curtos, o singleto de cor é canal com "*atratividade máxima*": indicativo que a ligação é mais provável nesta configuração. No entanto, isto não prova que a ligação *deva* ocorrer no singleto, nem que, em outras configurações, a ligação *não possa* ocorrer;

A interação quark-quark

Casos:

1. **Quark e antiquark:** Seja a interação entre quarks de diferentes sabores. A de menor ordem é dada pelo diagrama:



,

representando, p.ex.: $u + \overline{d} \to u + \overline{d}$, cuja amplitude é:

$$-i\mathcal{M} = [\overline{u}(3)c_3^\dagger]\left[-i\frac{g_s}{2}\lambda^\alpha\gamma^\mu\right][u(1)c_1]\left[-i\frac{g_{\mu\nu}\delta^{\alpha\beta}}{q^2}\right][\overline{v}(2)c_2^\dagger]\left[-i\frac{g_s}{2}\lambda^\beta\gamma^\nu\right][v(4)c_4]$$

$$\Rightarrow \mathcal{M} = -\frac{g_s^2}{4}\frac{1}{q^2}[\overline{u}(3)\gamma^\mu u(1)][\overline{v}(2)\gamma_\mu v(4)](c_3^\dagger\lambda^\alpha c_1)(c_2^\dagger\lambda^\alpha c_4),$$

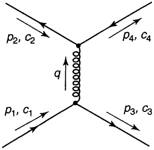
com soma implícita em α. A fórmula é análoga ao espalhamento $e^- e^+$, com $g_e \to g_s$ e o "fator de cor":

$$f = \frac{1}{4}(c_3^\dagger\lambda^\alpha c_1)(c_2^\dagger\lambda^\alpha c_4).$$

O potencial é, então, análogo ao de Coulomb:

$$V_{q\overline{q}}(r) = -f\frac{\alpha_s\hbar c}{r}.$$

A interação quark-quark - Exemplos



1. **Fator de cor na configuração do octeto.** Como vimos, um estado típico do octeto é $r\bar{b}$ (quark vermelho e antiquark antiazul entrando). Neste caso, tomaremos os mesmos estados de saída, então, a cor é conservada nos vértices. Assim:

$$c_1 = c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_2 = c_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

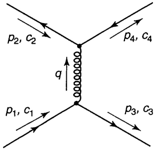
então:

$$f = \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{4}\lambda^\alpha_{11}\lambda^\alpha_{22},$$

com soma implícita em α. Note que só λ^3 e λ^8 têm elementos 11 e 22 diferentes de zero:

$$f = \frac{1}{4}(\lambda^3_{11}\lambda^3_{22} + \lambda^8_{11}\lambda^8_{22}) = \frac{1}{4}[(1)(-1) + (1/\sqrt{3})(1/\sqrt{3})] = -\frac{1}{6}$$

A interação quark-quark - Exemplos



2. **Fator de cor na configuração do singleto.** Como vimos, o estado do singleto é:

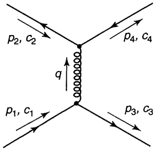
$$(r\bar{r} + b\bar{b} + g\bar{g})/\sqrt{3}$$

O singleto de cor (como num méson) é a soma de 3 termos:

$$f = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\left[c_3^\dagger \lambda^\alpha \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\lambda^\alpha c_4\right] + \right.$$

$$\left. + \left[c_3^\dagger \lambda^\alpha \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}\lambda^\alpha c_4\right] + \left[c_3^\dagger \lambda^\alpha \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}\lambda^\alpha c_4\right]\right\}$$

A interação quark-quark - Exemplos



2. **Fator de cor na configuração do singleto.** Os quarks emergentes são também necessariamente estados singletos e teremos 9 termos, compactados na forma:

$$f = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}(\lambda^{\alpha}_{ij}\lambda^{\alpha}_{ji}) = \frac{1}{12}Tr(\lambda^{\alpha}\lambda^{\alpha}),$$

com soma implícita em α.
Agora (probl. 8.23):

$$Tr(\lambda^{\alpha}\lambda^{\beta}) = 2\delta^{\alpha\beta} \Rightarrow Tr(\lambda^{\alpha}\lambda^{\alpha}) = 16 \Rightarrow f = \frac{4}{3}$$

E os potenciais ficam:

$$V_{q\bar{q}}(r) = -\frac{4}{3}\left(\frac{\alpha_s \hbar c}{r}\right), \text{ para o singleto;}$$

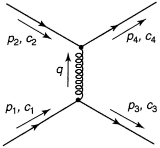
$$V_{q\bar{q}}(r) = \frac{1}{6}\left(\frac{\alpha_s \hbar c}{r}\right), \text{ para o octeto;}$$

ou, potencial ***atrativo*** ($V_{q\bar{q}}(r) < 0$) para o singleto e ***repulsivo*** ($V_{q\bar{q}}(r) > 0$) para o octeto.

A interação quark-quark

Casos:

2. **Quark e quark:** Seja a interação entre quarks de diferentes sabores. A de menor ordem é dada pelo diagrama:



,

representando, p.ex.:$u + d \to u + d$, cuja amplitude é:

$$\mathcal{M} = -\frac{g_s^2}{4}\frac{1}{q^2}[\overline{u}(3)\gamma^\mu u(1)][\overline{u}(4)\gamma_\mu u(2)](c_3^\dagger \lambda^\alpha c_1)(c_4^\dagger \lambda^\alpha c_2),$$

que, desta vez, é análoga à do espalhamento elétron-múon com $g_e \to g_s$ e o "fator de cor" (que depende da configuração dos quarks):

$$f = \frac{1}{4}(c_3^\dagger \lambda^\alpha c_1)(c_4^\dagger \lambda^\alpha c_2).$$

O potencial é, então, análogo ao de Coulomb:

$$V_{qq}(r) = f\frac{\alpha_s \hbar c}{r}$$

Com 2 quarks, montamos 1 tripleto (combinações antissimétricas):

$$(rb - br)/\sqrt{2}, \quad (bg - gb)/\sqrt{2}, \quad (gr - rg)/\sqrt{2}$$

e 1 sexteto (combinações simétricas):

$$rr,\ bb,\ gg,\ (rb + br)/\sqrt{2},\ (bg + gb)/\sqrt{2},\ (gr + rg)/\sqrt{2}$$

A interação quark-quark - Exemplos

3. **Fator de cor na configuração do sexteto.**
Tomemos o estado rr:

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

então:

$$f = \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^{\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^{\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\lambda^{\alpha}_{11}\lambda^{\alpha}_{11} = \frac{1}{4}[\lambda^{3}_{11}\lambda^{3}_{11} + \lambda^{8}_{11}\lambda^{8}_{11}] = \frac{1}{4}[(1)(1) + (1/\sqrt{3})(1/\sqrt{3})] = \frac{1}{3}$$

A interação quark-quark - Exemplos

4. **Fator de cor na configuração do tripleto.**
   Tomemos o estado $(rb - br)/\sqrt{2}$:

$$f = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left[\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\lambda^{\alpha}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}\lambda^{\alpha}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right] + \right.$$

$$-\left[\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}\lambda^{\alpha}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\lambda^{\alpha}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\lambda^{\alpha}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}\lambda^{\alpha}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right] +$$

$$\left. + \left[\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}\lambda^{\alpha}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\lambda^{\alpha}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{8}\{\lambda_{11}^{\alpha}\lambda_{22}^{\alpha} - \lambda_{21}^{\alpha}\lambda_{12}^{\alpha} - \lambda_{12}^{\alpha}\lambda_{21}^{\alpha} + \lambda_{22}^{\alpha}\lambda_{11}^{\alpha}\} = \frac{1}{4}(\lambda_{11}^{\alpha}\lambda_{22}^{\alpha} - \lambda_{12}^{\alpha}\lambda_{21}^{\alpha}) =$$

$$= \frac{1}{4}(\lambda_{11}^{3}\lambda_{22}^{3} + \lambda_{11}^{8}\lambda_{22}^{8} - \lambda_{12}^{1}\lambda_{21}^{1} - \lambda_{12}^{2}\lambda_{21}^{2}) = \frac{1}{4}(-1 + \frac{1}{3} - 1 - 1) = -\frac{2}{3}$$

E os potenciais ficam:

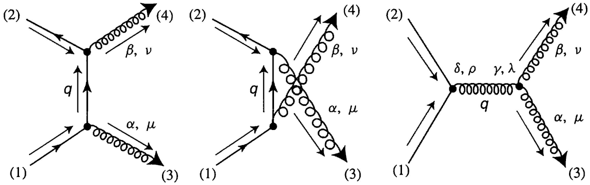
$$V_{qq}(r) = -\frac{2}{3}\left(\frac{\alpha_s \hbar c}{r}\right), \text{ para o tripleto;}$$

$$V_{qq}(r) = \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha_s \hbar c}{r}\right), \text{ para o sexteto;}$$

ou, potencial *atrativo* ($V_{qq}(r) < 0$) para o tripleto e *repulsivo* ($V_{qq}(r) > 0$) para o sexteto.

Aniquilação de pares na QCD

- Estudaremos o processo análogo à aniquilação de pares, na QCD há 3 diagramas:



,

com amplitude (analogamente ao exemp. 7.8) para o processo 1:

$$-i\mathcal{M}_1 = \overline{v}(2)c_2^\dagger \left[-i\frac{g_s}{2}\lambda^\beta\gamma^\nu\right][\epsilon^*_{4\nu}a_4^{*\beta}]\left[\frac{i(\not{q}+mc)}{q^2-m^2c^2}\right]\left[-i\frac{g_s}{2}\lambda^\alpha\gamma^\mu\right][\epsilon^*_{3\mu}a_3^{*\alpha}]u(1)c_1.$$

Agora, de:

$$q = p_1 - p_3 \Rightarrow q^2 - m^2c^2 = p_1^2 - 2p_1\cdot p_3 + p_3^2 - m^2c^2 = -2p_1\cdot p_3,$$

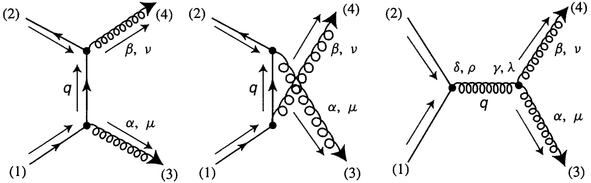
vem:

$$\mathcal{M}_1 = -\frac{g_s^2}{8}\frac{1}{p_1\cdot p_3}\overline{v}(2)(\gamma^\nu\epsilon^*_{4\nu})\left[(\not{q}+mc)\right](\gamma^\mu\epsilon^*_{3\mu})u(1)\times a_3^{*\alpha}a_4^{*\beta}(c_2^\dagger\lambda^\beta\lambda^\alpha c_1)\Rightarrow$$

$$\mathcal{M}_1 = -\frac{g_s^2}{8}\frac{1}{p_1\cdot p_3}\overline{v}(2)\left[\not{\epsilon}_4^*(\not{p}_1-\not{p}_3+mc)\not{\epsilon}_3^*\right]u(1)\times a_3^{*\alpha}a_4^{*\beta}(c_2^\dagger\lambda^\beta\lambda^\alpha c_1).$$

Aniquilação de pares na QCD

- Para a aniquilação de pares, na QCD, há 3 diagramas:



Para o processo 1:

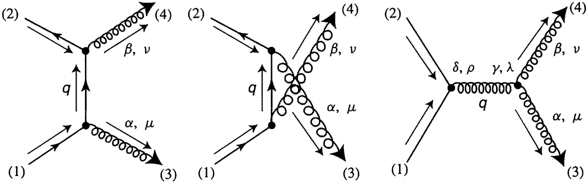
$$\mathcal{M}_1 = -\frac{g_s^2}{8}\frac{1}{p_1 \cdot p_3}\overline{v}(2)\left[\not\epsilon_4^*(\not p_1 - \not p_3 + mc)\not\epsilon_3^*\right] u(1) \times a_3^{*\alpha} a_4^{*\beta}(c_2^\dagger \lambda^\beta \lambda^\alpha c_1).$$

Similarmente, para o processo 2:

$$\mathcal{M}_2 = -\frac{g_s^2}{8}\frac{1}{p_1 \cdot p_4}\overline{v}(2)\left[\not\epsilon_3(\not p_1 - \not p_4 + mc)\not\epsilon_4\right] u(1) \times a_3^{\alpha} a_4^{\beta}(c_2^\dagger \lambda^\alpha \lambda^\beta c_1).$$

Aniquilação de pares na QCD

- Para a aniquilação de pares, na QCD, há 3 diagramas:



E para o processo 3:

$$-i\mathcal{M}_3 = \overline{v}(2)c_2^\dagger \left[-i\frac{g_s}{2}\lambda^\delta\gamma_\sigma\right] u(1)c_1 \left[-i\frac{g^{\sigma\lambda}\delta^{\delta\gamma}}{q^2}\right] \cdot \left\{-g_s f^{\alpha\beta\gamma}[g_{\mu\nu}(-p_3+p_4)_\lambda + \right.$$

$$\left. + g_{\nu\lambda}(-p_4-q)_\mu + g_{\lambda\mu}(q+p_3)_\nu]\right\} [\epsilon_3^\mu a_3^\alpha][\epsilon_4^\nu a_4^\beta].$$

Agora, de:

$$q = p_3 + p_4 \Rightarrow q^2 - m^2c^2 = p_3^2 + 2p_3\cdot p_4 + p_4^2 - m^2c^2 = 2p_3\cdot p_4$$

e usando que $\epsilon_3 \cdot p_3 = \epsilon_4 \cdot p_4 = 0$, vem (probl. 8.20):

$$\mathcal{M}_3 = i\frac{g_s^2}{8}\frac{1}{p_1\cdot p_4}\overline{v}(2)\left[(\epsilon_3\cdot\epsilon_4)(\not{p}_4 - \not{p}_3) + 2(p_3\cdot\epsilon_4)\not{\epsilon}_3 - 2(p_4\cdot\epsilon_3)\not{\epsilon}_4\right] u(1)\times$$

$$\times f^{\alpha\beta\gamma}a_3^\alpha a_4^\beta(c_2^\dagger\lambda^\gamma c_1).$$

Aniquilação de pares na QCD

- Assumindo (como fizemos na QED) que as partículas iniciais estão em repouso:
$$p_1 = p_2 = (mc, \vec{0}), \quad p_3 = (mc, \vec{p}), \quad p_4 = (mc, -\vec{p}) \Rightarrow$$
$$p_1 \cdot p_3 = p_1 \cdot p_4 = (mc)^2, \quad p_1 \cdot p_2 = 2(mc)^2$$
e o calibre de Coulomb, cancelam-se 2 termos: $p_3 \cdot \epsilon_4 = p_4 \cdot \epsilon_3 = 0$.
- Usando que $u(1)$ satisfaz à equação de Dirac e, portanto:
$$(\not{p}_1 - \not{p}_3 + mc)\not{\epsilon}_3 u(1) = \not{\epsilon}_3 \not{p}_3 u(1), \quad (\not{p}_1 - \not{p}_4 + mc)\not{\epsilon}_4 u(1) = \not{\epsilon}_4 \not{p}_4 u(1),$$
simplificando $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$.
- De $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_3$:
$$\mathcal{M} = -\frac{g_s^2}{8(mc)^2} a_3^\alpha a_4^\beta \overline{v}(2) c_2^\dagger \left[\not{\epsilon}_3 \not{\epsilon}_4 \not{p}_4 \lambda^\alpha \lambda^\beta + \not{\epsilon}_4 \not{\epsilon}_3 \not{p}_3 \lambda^\beta \lambda^\alpha - i(\epsilon_3 \cdot \epsilon_4)(\not{p}_4 - \not{p}_3) f^{\alpha\beta\gamma} \lambda^\gamma \right] c_1 u(1).$$
- Orientando-se o eixo z ao longo de $\vec{p}$:
$$\not{p}_3 = mc(\gamma^0 - \gamma^3), \quad \not{p}_4 = mc(\gamma^0 + \gamma^3), \quad \not{p}_4 - \not{p}_3 = 2mc\gamma^3.$$
Além disso, vimos que:
$$\epsilon_3 \epsilon_4 = (\vec{\epsilon}_3 \cdot \vec{\epsilon}_4) - i(\vec{\epsilon}_3 \times \vec{\epsilon}_4) \cdot \vec{\Sigma}, \quad \not{\epsilon}_4 \not{\epsilon}_3 = -(\vec{\epsilon}_3 \cdot \vec{\epsilon}_4) + i(\vec{\epsilon}_3 \times \vec{\epsilon}_4) \cdot \vec{\Sigma}.$$
Assim:
$$\mathcal{M} = \frac{g_s^2}{8mc} a_3^\alpha a_4^\beta \overline{v}(2) c_2^\dagger \left[(\vec{\epsilon}_3 \cdot \vec{\epsilon}_4)\{\lambda^\alpha, \lambda^\beta\}\gamma^0 + i(\vec{\epsilon}_3 \times \vec{\epsilon}_4) \cdot \vec{\Sigma}([\lambda^\alpha, \lambda^\beta]\gamma^0 + \{\lambda^\alpha, \lambda^\beta\}\gamma^3) \right] c_1 u(1),$$
que reduz-se ao resultado da QED se $\lambda^\alpha = \lambda^\beta = 1$, $g_s/2 \to g_e$ e tirarmos todos os estados de cor a e c.

Aniquilação de pares na QCD

- Para os quarks no estado singleto, spin-0 (que pode decair em 2 glúons):
$$\mathcal{M} = (\mathcal{M}_{\uparrow\downarrow} - \mathcal{M}_{\downarrow\uparrow})/\sqrt{2}.$$
Contudo, vimos que:
$$\overline{v}(2)\gamma^0 u(1) = 0, \quad \overline{v}(2)\vec{\Sigma}\gamma^3 u(1) = -2mc\hat{z}$$
e, como antes $\mathcal{M}_{\uparrow\downarrow} = -\mathcal{M}_{\downarrow\uparrow}$:
$$\mathcal{M} = -i\sqrt{2}\frac{g_s^2}{4}(\vec{\epsilon}_3 \times \vec{\epsilon}_4)_z \; a_3^\alpha a_4^\beta (c_2^\dagger \{\lambda^\alpha, \lambda^\beta\} c_1), \quad \text{no singleto.}$$
Novamente, reproduzimos o resultado da QED, com $g_e \to g_s$ e com o fator de cor:
$$f = \frac{1}{8} a_3^\alpha a_4^\beta (c_2^\dagger \{\lambda^\alpha, \lambda^\beta\} c_1).$$
Em particular, se os quarks estiverem no estado singleto, $(r\overline{r} + b\overline{b} + g\overline{g})/\sqrt{3}$, então:
$$f = \frac{1}{8} a_3^\alpha a_4^\beta \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \{\lambda^\alpha, \lambda^\beta\} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \{\lambda^\alpha, \lambda^\beta\} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \right.$$
$$\left. + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \{\lambda^\alpha, \lambda^\beta\} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{8\sqrt{3}} a_3^\alpha a_4^\beta (Tr\{\lambda^\alpha, \lambda^\beta\}) = \frac{1}{8\sqrt{3}} a_3^\alpha a_4^\beta (4\delta^{\alpha\beta}) \Rightarrow$$
$$\text{(probl. 8.13)} \qquad \Rightarrow f = \frac{1}{2\sqrt{3}} a_3^\alpha a_4^\alpha, \quad \text{para o singleto de cor.}$$

Aniquilação de pares na QCD

- Agora, o estado singleto para 2 glúons (probl. 8.22) é:

$$\left|\text{singleto}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}} \sum_{n=1}^{8} \left|n\right\rangle_1 \left|n\right\rangle_2$$

Assim:

$$a_3^\alpha a_4^\alpha = \frac{1}{\sqrt{8}}(8) = 2\sqrt{2} \Rightarrow f = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

- **Conclusão:** Para o processo:

$$q + \overline{q} \to g + g,$$

no singleto de spin, singleto de cor e com os quarks em repouso, a amplitude é:

$$\mathcal{M} = -4\sqrt{\frac{2}{3}} g_s^2,$$

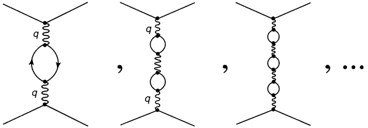
a seção de choque é:

$$\sigma = \frac{2}{3} \frac{4\pi}{cv} \left(\frac{\hbar \alpha_s}{m}\right)^2$$

e a taxa de decaimento:

$$\Gamma = \sigma v |\psi(0)|^2.$$

Liberdade assintótica



- Na QED, vimos que o diagrama com laços faz a carga efetiva do elétron uma função do momento transferido q:

$$\alpha(|q^2|) = \alpha(0)\left\{1 + \frac{\alpha(0)}{3\pi}\ln(|q^2|/(mc)^2)\right\} \quad (|q^2| = -q^2 \gg (mc)^2);$$

  A constante de acoplamento cresce conforme se aproxima da carga, reduzindo-se a blindagem do efeito conhecido como a "*polarização do vácuo*";

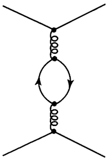
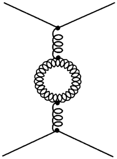
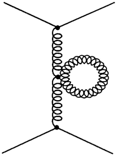
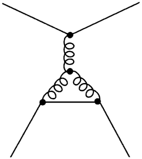
- Adicionando-se diagramas de ordens superiores:

$$\alpha(|q^2|) = \frac{\alpha(0)}{1 - (\alpha(0)/3\pi)\ln(|q^2|/(mc)^2)} \quad (|q^2| \gg (mc)^2),$$

  que diverge em $\ln(|q^2|/(mc)^2) = (3\pi/\alpha(0))$, isto é, a uma energia de 10^{280} MeV!

Liberdade assintótica

- Na QCD, ocorre algo bem parecido com as bolhas de quark/antiquark (a), levando a uma blindagem da cor. Entretanto, na QCD surgem também as bolhas de *glúons virtuais* (b):

  (a)  , (b)   , ou, também: (c)  .

  Nestes casos, o efeito é de ***antiblindagem***.

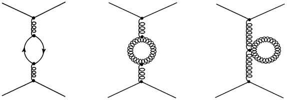
- Mas a fórmula da constantes de acoplamento forte acaba sendo parecida:

$$\alpha_s(|q^2|) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 - (\alpha_s(\mu^2)/12\pi)(11n - 2f)\ln(|q^2|/\mu^2)} \quad (|q^2| \gg \mu^2),$$

  onde $n(= 3)$ é o número de cores e $f(= 6)$ é o número de sabores (no MP);

- Numa teoria em que $11n > 2f$, a antiblindagem domina e a constante de acoplamento ***diminui*** com $|q^2|$, a força forte fica fraca a pequenas distâncias: “***liberdade assintótica***”.

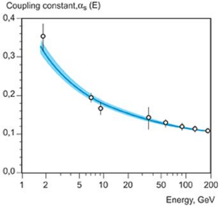
Liberdade assintótica



- Note que em:

$$\alpha_s(|q^2|) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 - (\alpha_s(\mu^2)/12\pi)(11n - 2f)\ln(|q^2|/\mu^2)} \quad (|q^2| \gg \mu^2),$$

a constante da QED→QCD: $\alpha(0) \to \alpha_s(\mu^2)$. Lembrando que:



- Não importa o valor μ (probl. 8.25), desde que $\alpha_s(\mu^2) < 1$.

Definindo-se Λ por:

$$\ln \Lambda^2 = \ln \mu^2 - 12\pi/[(11n - 2f)\alpha_s(\mu^2)],$$

assim, $\alpha_s(|q^2|)$ pode ser expressa em temos de um único parâmetro (probl. 8.26):

$$\alpha_s(|q^2|) = \frac{12\pi}{(11n - 2f)\ln(|q^2|/\Lambda^2)} \quad (|q^2| \gg \Lambda^2).$$

Mas é difícil de obter-se Λ com precisão: 100 MeV/c $< \Lambda <$ 500 MeV/c.