As equações de Maxwell no vácuo e sistemas de Unidades

As equações que governam os fenômenos eletromagnéticos são as equações de Maxwell que no vácuo têm a forma:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0\end{array}\right\} \text{leis de Gauss}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \Big\} \text{ lei de indução de Faraday}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad \Big\} \text{ lei de Ampère-Maxwell}$$

está implícita no último termo da 4ª equação a equação da continuidade

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$$

e a equação da força de Lorentz que é essencial para estudar o movimento da partícula carregada

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right)$$

O sistema de unidades adotado nestas equações é o gaussiano. No eletromagnetismo não existe uma tradição para se definir as grandezas fundamentais como na mecânica: massa (m), comprimento (l), tempo (t). Quando surgiram as unidades eletromagnéticas já haviam vários especialistas com as suas equações. No eletromagnetismo temos os sistemas Eletrostático (esu), Eletromagnético (emu), Gaussiano, de Heaviside-Lorentz e o MKSA racionalizado ou SI.

P. ex.: $I = \frac{dq}{dt}$, quem é fundamental carga ou corrente?

lei de Ohm: $U = RI$

$[U] = V$ (volt)

$[R] = \Omega$ (ohm)

$[I] = A$ (ampère)

Em 1832 Gauss mostrou que unidades magnéticas podem ser descritas em termos de unidades mecânicas (cm, g, s), medindo o campo magnético terrestre (0,3 - 0,6 G), e em 1851 Weber propôs um sistema completo de unidades elétricas.

Em 1872 a British Association (BA) for the Advancement of Science recomendou o sistema cgs, mas definiu uma unidade prática de resistência 10^9 vezes maior que chamou de "ohm".

Em 1881 a 1ª Conferência Internacional de Eletricistas (CIE) em Paris adotou a definição da B.A. de ohm e adicionou definições para volt, ampère, coulomb e farad. Nascia o "sistema prático e absoluto de unidades elétricas":

- absoluto: definido somente em termos de unidades mecânicas
- prático: os valores eram mais convenientes que o cgs

Assim, $1A = 1V/1\Omega$

Mas as definições não eram facilmente reprodutíveis fora de laboratórios especializados. Então em 1893 o 4º CIE em Chicago produziu definições "trabalháveis" de um conjunto de unidades "internacionais":

- ampère internacional: corrente que deposita 1,118 mg/s de prata de uma solução de nitrato de prata ($AgNO_3$) em água numa eletrólise;
- ohm internacional: resistência a 0°C de uma coluna de mercúrio de 106,3 cm de comprimento, tendo seção reta uniforme e massa de 14,4521 g; a massa foi escolhida para que a seção reta fosse de $1 mm^2$;
- volt internacional: a força eletromotriz produzida por uma célula de Clark padrão (tipo de célula que usa mercúrio e zinco) à temperatura de 15°C é de 1,434 Vint.

Contudo, medidas precisas foram feitas depois mostrando que

$$V_{int} \neq \Omega_{int} A_{int}$$

Então, em 1948 na conferência Geral de Pesos e Medidas, estas definições foram revertidas, de forma que

$$\left.\begin{array}{l} A = 1{,}00015\, A_{int} \\ V = 0{,}99966\, V_{int} \end{array}\right\} \quad \Omega = V/A$$

Hoje estas definições estão obsoletas, o Comitê Internacional de Pesos e Medidas convenciona:

→ a constante do efeito Josephson $K_1 = 483597{,}7\ GHz/V$

→ a constante de von Klitzing do efeito Hall $R_K = 25812{,}807\ \Omega$

→ o ampère (A) é a corrente elétrica em dois fios condutores muito longos, paralelos, separados por 1 m de distância e que provoca uma força magnética de 2×10^{-7} N por metro de cada condutor

O ampère é uma unidade fundamental do SI

A propósito, a velocidade da luz hoje é definida por um valor exato $\boxed{c = 299\,792\,458\ m/s}$ e o metro foi redefinido como a distância percorrida pela luz em $1/c$ segundos.

Voltemos a $I = \dfrac{dq}{dt}$ e $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

a lei de Coulomb é: $F = K_1 \dfrac{q q'}{r^2}$

onde $[K]$ é determinada pela equação se $[q]$ for fixada arbitrariamente ou é escolhida arbitrariamente para que se defina $[q]$

então

$$[K_1 q q'] = [F r^2] = m l t^{-2} l^2 = m l^3 t^{-2}$$

campo elétrico: $E \equiv \dfrac{F}{q'} = \dfrac{K_1 q}{r^2}$ poderia ser definido $E \propto \dfrac{F}{q'}$ mas não há nada a ganhar, uma vez que é a primeira grandeza de campo definida a partir da lei fundamental

lei de Ampère: força por unidade de comprimento para dois fios condutores muito longos, paralelos, separados por uma distância d e com correntes I e I':

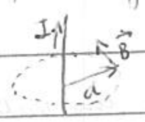
$$\frac{dF_2}{dl} = 2K_2\frac{II'}{d}$$

$$\frac{mlt^{-2}l^2}{q^2}\,\frac{q^2}{t^2}\,\frac{l}{lmlt^{-2}}$$

fazendo $\dfrac{K_1}{K_2} = \dfrac{Fr^2}{qq'}\,\dfrac{2II'}{d\,(dF/dl)} \Rightarrow \left[\dfrac{K_1}{K_2}\right] = \dfrac{l^2}{q^2}\,\dfrac{q^2}{t^2} = l^2t^{-2}$

no vácuo: $\boxed{\dfrac{K_1}{K_2} \simeq c^2}$, no SI: $\dfrac{1/4\pi\varepsilon_0}{\mu_0/4\pi} = \dfrac{1}{\varepsilon_0\mu_0} = \dfrac{9\cdot10^9}{10^{-7}} = 9\cdot10^{16} = c^2$

a indução magnética $\vec{B}$: $B = 2K_2\alpha\dfrac{I}{d}$ para um fio retilíneo comprido com corrente I



$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = 4\pi K_2\alpha\vec{J}$$

aqui também não há necessidade de se introduzir outra constante de proporcionalidade (α), como no caso do SI, mas alguns sistemas usam ...

$$\frac{E}{B} = \frac{K_1 q}{r^2}\,\frac{d}{2K_2\alpha I} = c^2\frac{d}{r^2}\,\frac{q}{I}\,\frac{1}{2\alpha} \Rightarrow \left[\frac{E}{B}\right] = l^2t^{-2}\frac{l}{l^2}\,\frac{q}{qt^{-1}}\,\frac{1}{\alpha} = \frac{l}{t\alpha}$$

para especificar as unidades vejamos a lei de indução de Faraday:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + K_3\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \Rightarrow [K_3] = \left[\frac{\partial E/\partial x}{\partial B/\partial t}\right] = \frac{[E/B]}{[x/t]} = \frac{l}{t\alpha}\,\frac{t}{l} = \frac{1}{\alpha}$$

na verdade K_3 é <u>numericamente</u> igual a α^{-1}:

em termos dos campos que foram definidos aqui, as equações de Maxwell ficam

$\vec\nabla\cdot\vec E = 4\pi k_1 \rho \quad = 0$ no vácuo

$\vec\nabla\cdot\vec B = 0$

$\vec\nabla\times\vec E + k_3 \frac{\partial \vec B}{\partial t} = 0$

$\vec\nabla\times\vec B = 4\pi k_2\alpha \vec J + \frac{k_2\alpha}{k_1}\frac{\partial\vec E}{\partial t} = \frac{k_2\alpha}{k_1}\frac{\partial \vec E}{\partial t}$ no vácuo

$\vec\nabla\cdot\vec J + \frac{\partial\rho}{\partial t} = \vec\nabla\cdot\vec J + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec\nabla\cdot\vec E}{4\pi k_1}\right) =$

$= \vec\nabla\cdot\left(\vec J + \frac{1}{4\pi k_1}\frac{\partial \vec E}{\partial t}\right) = \vec\nabla\cdot\vec J' = 0$

$\vec\nabla\times\vec B = 4\pi k_2\alpha\vec J' = 4\pi k_2\alpha \vec J + \frac{k_2\alpha}{k_1}\frac{\partial\vec E}{\partial t}$

$\vec\nabla\times(\vec\nabla\times\vec B) = \vec\nabla(\overset{0}{\vec\nabla\cdot\vec B}) - \nabla^2\vec B \Rightarrow$

$\nabla^2 B + \vec\nabla\times\left(\frac{k_2\alpha}{k_1}\frac{\partial\vec E}{\partial t}\right) = \nabla^2 B + \frac{k_2\alpha}{k_1}\frac{\partial}{\partial t}(\vec\nabla\times\vec E) = \boxed{\nabla^2\vec B - k_3\frac{k_2\alpha}{k_1}\frac{\partial^2\vec B}{\partial t^2} = 0}$

que é a equação de onda nas regiões livres de fontes, então a velocidade de onda é

$c^2 = \frac{k_1}{k_3 k_2\alpha} = \frac{c^2}{k_3\alpha} \Rightarrow \boxed{k_3 = \frac{1}{\alpha}}$

Os diversos sistemas de unidades eletromagnéticas diferem na escolha das grandezas e nas dimensões de 2 constantes escolhidas arbitrariamente, p. ex., k_1 e k_3

No sistema Eletrostático (ESU): $\begin{cases} k_1 = 1 \Rightarrow k_2 = c^{-2} \\ k_3 = 1 \Rightarrow \alpha = 1 \end{cases}$

$\vec\nabla\cdot\vec E = 4\pi\rho, \quad \vec\nabla\cdot\vec B = 0, \quad \vec\nabla\times\vec E + \frac{\partial\vec B}{\partial t} = 0, \quad \vec\nabla\times\vec B = \frac{4\pi}{c^2}\vec J + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec E}{\partial t}$

No sistema Eletromagnético (EMU): $\begin{cases} k_1 = c^2, \ k_2 = 1 \\ k_3 = 1, \ \alpha = 1 \end{cases}$

$\vec\nabla\cdot\vec E = 4\pi c^2\rho, \quad \vec\nabla\cdot\vec B = 0, \quad \vec\nabla\times\vec E + \frac{\partial\vec B}{\partial t} = 0, \quad \vec\nabla\times\vec B = 4\pi\vec J + \frac{\partial\vec B}{\partial t}$

No sistema Gaussiano: $\begin{cases} k_1 = 1, \ k_2 = c^{-2} \\ k_3 = c^{-1}, \ \alpha = c \end{cases}$

$\vec\nabla\cdot\vec E = 4\pi\rho, \quad \vec\nabla\cdot\vec B = 0, \quad \vec\nabla\times\vec E + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec B}{\partial t} = 0, \quad \vec\nabla\times\vec B = \frac{4\pi}{c}\vec J + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec E}{\partial t}$

No sistema de Heaviside-Lorentz $\begin{cases} k_1 = 1/4\pi \,, & k_2 = 1/4\pi c^2 \\ k_3 = c^{-1} \,, & \alpha = c \end{cases}$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho \,,\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \,,\quad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \,,\quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

10^{-7} H/m

No sistema MKSA racionalizado $\begin{cases} k_1 = 1/4\pi\varepsilon_0 \,, & k_2 = \mu_0/4\pi \\ k_3 = 1 \,, & \alpha = 1 \Rightarrow c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \end{cases}$

$\varepsilon_0 = 8{,}854\cdot 10^{-12}$ F/m

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \,,\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \,,\quad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \,,\quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$= 10^{7}\cdot 10^{-7}/\varepsilon_0\mu_0 =$

ainda $10^7/4\pi\varepsilon_0 = c^2 = 89\,875\,517\,873\,681\,764$ (exato!)

Os dois sistemas mais utilizados são o Gaussiano e o MKSA racionalizado. Para converter de um sistema para o outro, basta substituir as grandezas eletromagnéticas nas equações, mantendo as grandezas mecânicas, de acordo com as seguintes substituições:

$\boxed{\text{Gauss}}$		$\boxed{\text{MKSA}}$
c	$\longleftrightarrow$	$1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$
$\vec{E}$	$\longleftrightarrow$	$\sqrt{4\pi\varepsilon_0}\,\vec{E}$
ϕ	$\longleftrightarrow$	$\sqrt{4\pi\varepsilon_0}\,\phi$
q	$\longleftrightarrow$	$\frac{q}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}$
ρ	$\longleftrightarrow$	$\frac{\rho}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}$
$\vec{J}$	$\longleftrightarrow$	$\frac{\vec{J}}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}$
I	$\longleftrightarrow$	$\frac{I}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}$
$\vec{B}$	$\longleftrightarrow$	$\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}\,\vec{B}$

$Q = 1C \quad D = 1m = 100\,cm = 100\,d$

$q = 1\,statC$

$$F_{MKSA} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{D^2} = 10^{-7}c^2\,[N] = 10^{-7}c^2\,10^5\,[dina] = 10^{-2}c^2\frac{q^2}{d^2} = 10^{-2}c^2\frac{q^2}{10^{-4}D^2} = 10^{2}c^2\frac{q^2}{D^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} = (10c)\,q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1C}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} = 2997924580\,statC \simeq 3\cdot 10^9\,statC$$

Por exemplo, transformando do sistema gaussiano para o MKSA:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\left(\sqrt{4\pi\varepsilon_0}\,\vec{E}\right) = 4\pi\frac{\rho}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{4\pi\rho}{4\pi\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$