

# Modelos Introdutórios para o Tratamento da Matéria das Estrelas de Nêutrons

**Júlio Lanse Silvério**

*Universidade Federal do ABC*

28 de março de 2024

- 1 Introdução
  - Nosso Objetivo
  - Modelos
- 2 Fundamentos
  - Equilíbrio- $\beta$
- 3 Equações de Estado
  - Gás de Fermi
  - Harrison-Wheeler
- 4 Conclusão
  - Resultados
  - Aprimoramentos
- 5 Referências

# Nosso Objetivo

- Queremos encontrar as características termodinâmicas que melhor expliquem as estrelas de nêutrons e que melhor reflitam no que observamos experimentalmente.
- Temos que a nossa missão é encontrar a melhor equação de estado (EOS) que descreva esse sistema. Portanto, vamos então explorar alguns modelos, aumentando gradativamente a complexidade em cada modelo.
- A nossa EOS será uma função da pressão pela densidade de energia,  $P(\varepsilon)$ .



Neste seminário apresentarei as seguintes modelagens para a matéria numa estrela de nêutrons

- Modelo do gás de Fermi
- Modelo de Harrison-Wheeler

Como esses modelos possuem o equilíbrio- $\beta$  como preceito para seu funcionamento, começarei por explicá-lo.

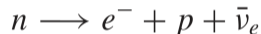
Serão adotadas unidades naturais nesta apresentação.

# Equilíbrio- $\beta$

Aqui, os elétrons, nêutrons e prótons estão em equilíbrio químico, onde somente o número bariônico e carga elétrica são conservadas. Este tipo de equilíbrio é chamado de equilíbrio- $\beta$ , pois envolve as reações de decaimento  $\beta$  dos núcleos. Veja as seguintes reações:



**Dcaimento- $\beta$  inverso**  
Possível



**Dcaimento- $\beta$**   
Bloqueado

O decaimento- $\beta$  é bloqueado quando a densidade é alta o suficiente para que todas as energias no mar de Fermi estejam ocupadas. Ademais, o decaimento inverso é possível se a energia do elétron compensar pela diferença das massas do nêutron e do próton.

No equilíbrio químico, a condição para os potenciais químicos é

$$\mu_e + \mu_p = \mu_n$$

onde o potencial químico dos neutrinos foi igualado a zero, pois eles escapam da estrela. Além disso, se todos os níveis de energia estão ocupados, a energia para se retirar um férmion é a energia de Fermi, que há de ser igual ao potencial químico

$$\mu_i = E_{F,i} = \sqrt{k_{F,i}^2 + m_i^2}$$

Com isso

$$\sqrt{k_{F_e}^2 + m_e^2} + \sqrt{k_{F_p}^2 + m_p^2} = \sqrt{k_{F_n}^2 + m_n^2} \quad (1)$$

Será demonstrado nos slides posteriores que a densidade numérica num gás de Fermi degenerado é dada por

$$n_i = \frac{g_i}{6\pi^2} k_{F,i}^3 = \frac{k_{F,i}^3}{3\pi^2}, \quad (2)$$

onde  $g_i = 2s_i + 1 = 2$  é o fator de degenerescência da  $i$ -ésima partícula de spin  $s_i$ , que, nos nossos casos,  $s_i = 1/2$ . Como a matéria é neutra, segue que

$$n_e = n_p \Rightarrow k_{F,e} = k_{F,p} \quad (3)$$

Agora, antes de partir para os modelos, usarei as eqs. (1), (2) e (3) para demonstrar algumas informações relevantes das estrelas de nêutrons.

Como a soma das massas do elétron e do próton é menor que a massa do nêutron, um gás de prótons e elétrons é preferido energeticamente em densidades baixas, porém, a uma densidade crítica de elétrons, a soma energias de Fermi de elétrons e prótons se tornam suficiente para alcançar a energia de repouso do nêutron, em que  $k_{F,n} = 0$ . Isso faz com que nêutrons comecem a aparecer nesta matéria densa. No limite não relativístico dos prótons,  $k_{F,p} \ll m_p$ , a eq. (1) torna-se:

$$\sqrt{k_{F,e}^2 + m_e^2} \approx m_n - m_p$$



Com isso, da eq. (2), a densidade numérica crítica de elétrons, que também é a de prótons, é aproximadamente:

$$n_{e,c} = \frac{1}{3\pi^2} [(m_n - m_p)^2 - m_e^2]^{\frac{3}{2}} \approx 7,4 \cdot 10^{30} \text{cm}^{-3},$$

que corresponde a uma densidade crítica de

$$\rho_c = m_p \cdot n_{e,c} \approx 1,2 \cdot 10^7 \text{g/cm}^3$$

Esta é considerada a densidade crítica para que surjam nêutrons na matéria.

Agora, para grandes densidades, entramos no limite relativístico,  $k_{F_i} \gg m_i$ , temos que, das eqs. (1) e (3):

$$k_{F_e} + k_{F_p} \approx k_{F_n} \Rightarrow k_{F_n} \approx 2k_{F_p}.$$

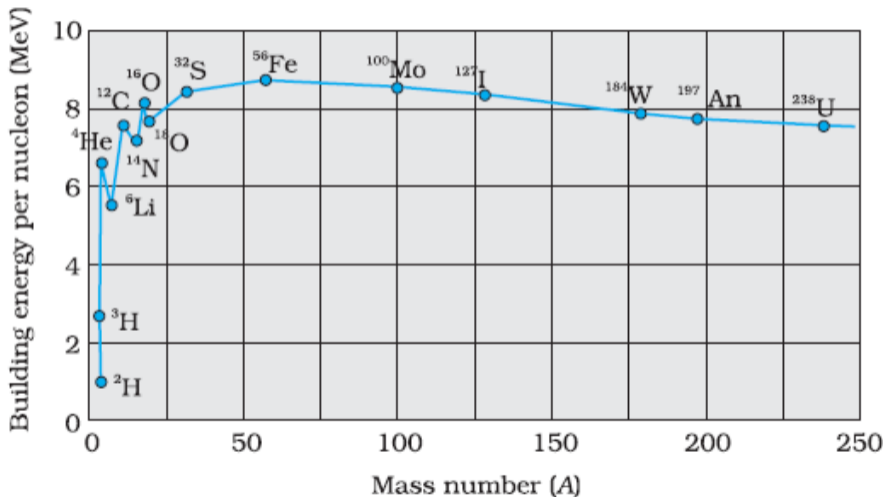
Usando isso na eq. (2), obtemos

$$n_n = 8n_p \Rightarrow \frac{n_n}{n_B} = \frac{8}{9},$$

em que  $n_B$  é a densidade numérica de bárions. Logo, para maiores densidades, a fração de nêutrons aumenta dramaticamente, de forma que  $n_n \gg n_p$ .

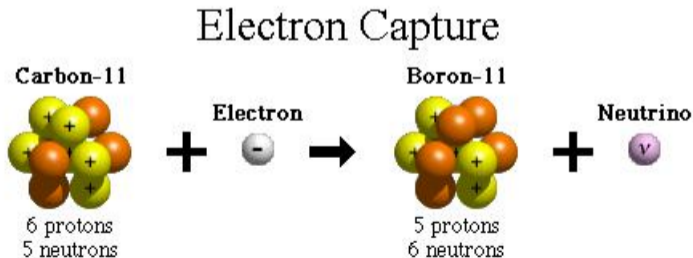
- Portanto, mesmo que o nêutron seja mais massivo que o próton, a matéria densa em equilíbrio- $\beta$  acima do nível crítico consiste majoritariamente de nêutrons. O motivo para esse fenômeno é que se torna mais fácil, energeticamente, adicionar uma partícula de carga neutra ao sistema do que duas opostamente carregadas.
- Logo, há a necessidade de considerar todos os possíveis núcleos para encontrar a melhor composição para o equilíbrio- $\beta$ . Devemos encontrar a melhor relação entre  $A$  e  $Z$  que minimiza a energia total do sistema para uma dada densidade numérica de bárions.
- Já é bastante conhecido que para bárions com  $A \lesssim 90$  o estado de menor energia consiste de um único núcleo, com o  $^{56}\text{Fe}$  sendo o que possui a menor massa por bárion. Para  $A \gtrsim 90$  o estado de menor energia será mais de um núcleo, com  $A$  múltiplo inteiro de 56 sendo o de menor massa por bárion.

# Equilíbrio- $\beta$



# Equilíbrio- $\beta$

Então, conforme a densidade numérica de bárions aumenta,  $A$  aumenta, tornando mais apropriado tratar a matéria da estrela como sendo puramente  $^{56}\text{Fe}$ . Porém, quando  $A$  aumenta acima de  $A \approx 10^{57}$ , que corresponde à densidade crítica  $\rho_c$ , o efeito da gravidade torna-se importante. Conseqüentemente os elétrons relativísticos tendem a combinar-se com os prótons dos núcleos para formar nêutrons!



Os núcleos, então, vão ficando mais ricos em nêutrons com o aumento da densidade numérica bariônica até chegar a nêutron drip line do núcleo, em que nêutrons são ejetados dos núcleos. Isso ocorre, aproximadamente, numa densidade de

$$\rho_d \approx 4 \cdot 10^{11} \text{ g/cm}^3.$$

Aumentando ainda mais a densidade, a pressão providenciada pelos nêutrons torna-se maior que a dos elétrons!

Resumindo, temos que a medida em que a densidade sobe, a composição da matéria em equilíbrio- $\beta$  é:

- $\rho < 10^4 \text{g/cm}^3$ : um gás de átomos, a atmosfera das estrelas;
- $\rho \approx 10^4 \text{g/cm}^3$ : um gás de elétrons livres e uma estrutura de  $^{56}\text{Fe}$  se formam;
- $\rho \approx 2 \cdot 10^6 \text{g/cm}^3$ : elétrons tornam-se relativísticos;
- $\rho \approx 1,2 \cdot 10^7 \text{g/cm}^3$ : uma estrutura além de  $^{56}\text{Fe}$  se forma e os núcleos vão ficando cada vez mais ricos em nêutrons conforme aumentamos a densidade;
- $\rho \approx 4 \cdot 10^{11} \text{g/cm}^3$ : nêutron drip line.

Agora que temos essa ideia inicial, vamos aos modelos em si.

Ná realidade, já usamos o modelo do gás de Fermi nos slides anteriores para termos um entendimento inicial do assunto. Em resumo, o modelo do gás de Fermi desconsidera as interações nucleares, modelando as partículas envolvidas como férmions ideais livres e não interagentes. Da estatística de Fermi-Dirac, a função de Fermi é definida como

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{T}} + 1}$$

Em  $T = 0$ , que é a situação de nosso interesse:

- $f(E) = 1$ , se  $E < E_F = \mu$ ;
- $f(E) = 0$ , se  $E > E_F = \mu$ ;

em que  $E_F$  é a energia de Fermi.



# Gás de Fermi

Para um gás de Fermi, a pressão em unidades naturais à temperatura zero é dada por

$$P_i = \frac{g_i}{3(2\pi)^3} \int k \cdot v_i \cdot f(E_i) d^3k = \frac{2}{3(2\pi)^3} \int_0^{k_{F_i}} \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + m_i^2}} 4\pi k^2 dk,$$

onde  $k$  é o número de onda,  $v = k/E$  é a velocidade e  $i$  denota se é um gás de elétrons, prótons ou nêutrons. Seja  $x_i = \frac{k_{F_i}}{2\pi m_i}$ , a integral acima resulta em:

$$P_i = m_i^4 \cdot \phi(x_i) , \quad (4)$$

onde

$$\phi(x) = \frac{1}{8\pi^2} \left[ x\sqrt{x^2 + 1} \left( \frac{2x^2}{3} - 1 \right) + \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right]$$

Já a densidade de energia é dada por:

$$\varepsilon_i = \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int E_i \cdot f(E_i) d^3k = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{F_i}} \sqrt{k^2 + m_i^2} 4\pi k^2 dk .$$

A equação acima resulta em:

$$\varepsilon_i = m_i^4 \cdot \chi(x_i) , \quad (5)$$

onde

$$\chi(x) = \frac{1}{8\pi^2} [x\sqrt{x^2 + 1}(2x^2 + 1) - \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})]$$

E, como prometido, a demonstração da eq. (2), a densidade numérica:

$$n_i = \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int f(E_i) d^3 k = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{F_i}} 4\pi k^2 dk = \frac{k_{F_i}^3}{3\pi^2}$$

Com as eqs. (2), (4) e (5) as propriedades termodinâmicas podem ser determinadas. As grandezas que temos interesse são a pressão total  $P$ , a densidade de energia total  $\varepsilon$ , a densidade numérica de bárions  $n_B$  e a densidade de carga  $n_Q$ .

$$P = P_e + P_p + P_n \quad (6)$$

$$n_B = n_p + n_n \quad (8)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p + \varepsilon_n \quad (7)$$

$$n_Q = n_p - n_e = 0 \quad (9)$$

# Gás de Fermi

- Podemos então encontrar a pressão total e a sua densidade de energia total, porém perceba que essas grandezas dependem de  $k_{F_e}$ ,  $k_{F_p}$  e  $k_{F_n}$ ;
- Para resolver isso, devemos, para cada valor possível de  $k_{F_e}$ , usar a equação da neutralidade de carga, eq. (3), e encontrar os  $k_{F_p}$  correspondentes. Depois, usar o equilíbrio químico, eq. (1), para encontrar os  $k_{F_n}$ . Então é só usar esses números de onda nas eqs. (2), (4) e (5) para encontrar, respectivamente, a densidade numérica, a pressão e a energia de cada um dos gases fermiônicos;
- Com essas grandezas determinadas, agora é só calcular a pressão total, a densidade de energia total e a densidade de bárions. Assim a EOS é encontrada.

Esse modelo leva em consideração as interações nucleares que ocorrem na matéria, usando o modelo da gota líquida. Nesse caso, devemos acrescentar a energia dos núcleos na eq. (5)

$$\varepsilon = n_N E_N(Z, A) + \varepsilon'_e + \varepsilon_n, \quad (10)$$

onde  $n_N = n_e/Z$  é a densidade numérica de núcleos,  $E_N(Z, A)$  é a de energia do respectivo átomo (que inclui a energia de repouso dos seus respectivos elétrons) e  $\varepsilon'_e = \varepsilon_e - n_e m_e$ . Vale ressaltar que  $\varepsilon_n$  continua sendo a densidade de energia dos nêutrons livres do gás de Fermi.

Usando a fórmula da massa semi-empírica

$$E_N(Z, A) = m_u \left[ b_1 A + b_2 A^{\frac{2}{3}} - b_3 Z + b_4 A \left( \frac{1}{2} - \frac{Z}{A} \right)^2 + b_5 \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} \right], \quad (11)$$

em que  $b_1$  vem do termo de volume,  $b_2$  é o termo de superfície,  $b_3 = (m_n - m_p - m_e)/m_u$ ,  $b_4$  é o termo de assimetria e  $b_5$  é a energia de Coulomb. Seguem os seus valores

$$b_1 = 0.991749, \quad b_3 = 0.000840, \quad b_5 = 0.000763,$$

$$b_2 = 0.01911, \quad b_4 = 0.10175.$$

Os termos de camadas e de emparelhamento não foram considerados

Devemos encontrar  $Z$  e  $A$  que minimizam a energia total, eq. (10), pois este será o sistema mais estável. Portanto, temos duas novas condições de contorno para nosso sistema

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial Z} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial A} = 0.$$

Usando essas condições chegamos nas seguintes equações

$$b_3 + b_4 \left( 1 - \frac{2Z}{A} \right) - 2b_5 \frac{Z}{A^{\frac{1}{3}}} = (\sqrt{1 + x_e^2} - 1) \frac{m_e}{m_u}, \quad (12)$$

$$b_1 + \frac{2b_2}{3A^{\frac{1}{3}}} + b_4 \left( \frac{1}{4} - \frac{Z^2}{A^2} \right) - \frac{b_5 Z^2}{3A^{\frac{4}{3}}} = \sqrt{1 + x_n^2} \frac{m_n}{m_u}. \quad (13)$$

Veja que neste modelo para a estrela estamos aproximando  $Z$  e  $A$  para valores contínuos. Sabendo disso iremos usar a seguinte importante relação da física nuclear

$$Z = \left( \frac{b_2}{2b_5} \right)^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

Por fim, este modelo para a estrela não considera que os núcleos contribuam para a pressão na estrela, portanto a pressão total é dada apenas pelos gases livres

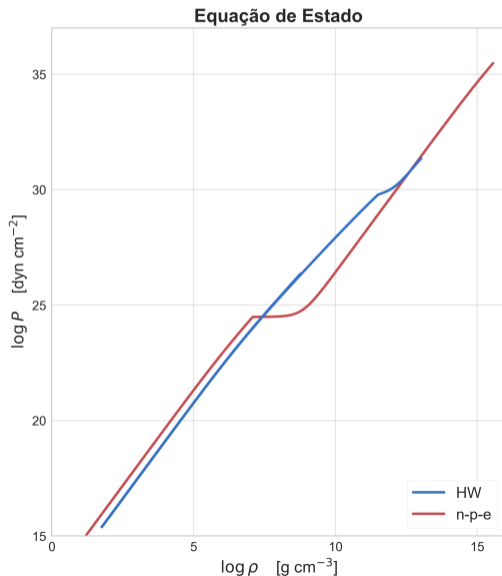
$$P = P_e + P_n \quad (15)$$



- Podemos encontrar a densidade de energia total e a pressão total, mas perceba que, além de  $k_{F_e}$  e de  $k_{F_n}$ , essas grandezas também dependem de  $Z$  e  $A$ .
- A solução então é, para cada valor possível de  $A > 56$ , encontrar  $Z$  pela eq. (14). Depois, encontrar  $k_{F_e}$  e  $k_{F_n}$  pelas eqs. (12) e (13);
- Usar os valores de  $A$  e  $Z$  na fórmula da massa semi-empírica, eq. (11), para encontrar as energias de cada átomo;
- Usar os valores de  $k_{F_e}$  e  $k_{F_n}$  para encontrar tanto  $P_e$  e  $P_n$  pela eq. (4), como  $\varepsilon_e$  e  $\varepsilon_n$  pela eq. (5);
- Com tudo isso, podemos encontrar a densidade de energia total pela eq.(10) e a pressão total pela eq. (15). Assim a EOS pode ser construída.

# Resultados

- A figura ao lado mostra as EOS dos dois modelos apresentados;
- Vale lembrar que  $\varepsilon = \rho \cdot c^2$ , ou seja,  $\varepsilon = \rho$  em unidades naturais;



Essas EOS podem ser usadas na Teoria da Relatividade Geral. Mais especificamente, na Equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff para podermos encontrar  $m(r)$  e  $P(r)$ , a massa e a pressão da estrela, respectivamente, em função da distância em relação ao seu centro. Além disso, podemos construir um gráfico que relacione a massa total,  $M$ , com o raio total,  $R$ , da estrela; assim descobrindo a relação massa-raio das estrelas no céu.

- Infelizmente, esses modelos não funcionam para densidades maiores que a densidade do nêutron drip line. Isso porque o modelo do Gás de Fermi é simples de mais e porque o modelo da gota líquida não descreve muito bem a matéria nuclear em densidades tão altas. Isso resulta em relações massa-raio não condizentes com as observadas experimentalmente;
- Para densidades tão altas, faz-se necessário o uso da Teoria de Quântica de Campos Nuclear Relativística, em que a força forte é mediada por mésons escalares, vetoriais, carregados ou não.
- Nessa teoria, fora do escopo dessa apresentação, podem aparecer bárions mais pesados, além do próton e do nêutron. Ademais, em densidades hadrônicas tão altas, quarks não ficam mais confinados em hádrons individuais e ficam livres para explorar maiores regiões sem cor (a carga fundamental), definindo assim uma matéria de quarks;
- Um modelo inicial interessante é o Modelo  $\sigma - \omega$ .

GLENDENNING, Norman K. **Compact Stars: Nuclear Physics, Particle Physics and General Relativity.** 2.ed.: Springer, 2000.

SHAFFNER-BIELICH, Jürgen. **Compact Star Physics.** 1.ed.: Cambridge University Press, 2020.

SHAPIRO, Stuart L.; TEUKOLSKY, Saul A. **Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects.** 1.ed.: Wiley-VCH, 1983.